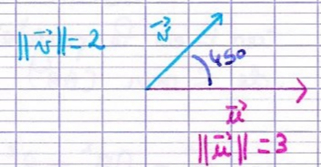
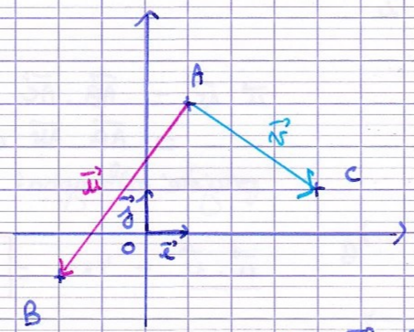
Exercice 1.

a)



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$= 3 \times 2 \times \cos 45°$$
$$= 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \boxed{3\sqrt{2}}$$

b)



$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

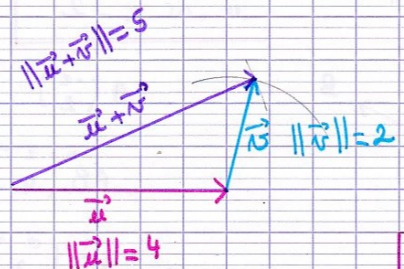
$\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2-1\\-1-3\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}4-1\\1-3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

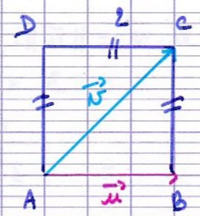
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{AB}\cdot\vec{AC} = x_{\vec{AB}}\, x_{\vec{AC}} + y_{\vec{AB}}\, y_{\vec{AC}}$$
$$= -3\times 3 + (-4)\times(-2)$$
$$= -9 + 8$$
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = -1}$$

c)



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(5^2 - 4^2 - 2^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(25 - 16 - 4)$$
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{5}{2}}$$

d)



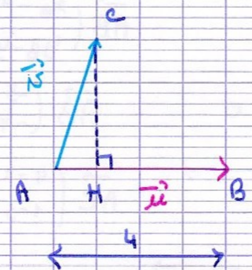
ABCD est un carré de côté 2

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{AB}\cdot\vec{AC}$$
$$= \vec{AB}\cdot\vec{AB}$$

car B est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = AB^2 = 2^2 = \boxed{4}$$

e)

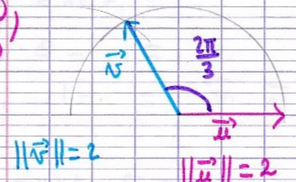


$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{AB}\cdot\vec{AC}$$
$$= \vec{AB}\cdot\vec{AH}$$

car H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

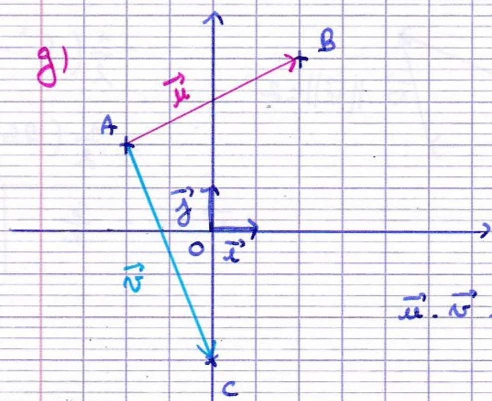
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\times 1 = \boxed{4}$$

f)



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$= 2\times 2\times\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= 2\times\cancel{2}\times\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = -2}$$

g)



$A\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

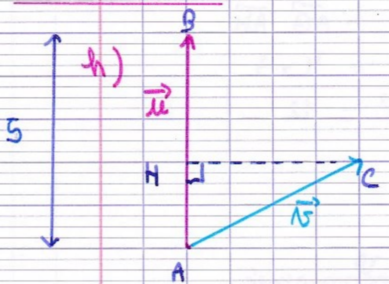
$\vec{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\4-2\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}0-(-2)\\-3-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{AB}\cdot\vec{AC} = x_{\vec{AB}}\, x_{\vec{AC}} + y_{\vec{AB}}\, y_{\vec{AC}}$$
$$= 4\times 2 + 2\times(-5)$$
$$= 8 - 10$$
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = -2}$$

Exercice 1 (suite)

h)

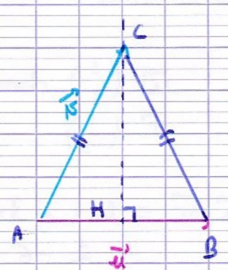


$\vec{u}.\vec{v} = \vec{AB}.\vec{AC}$
$= \vec{AB}.\vec{AH}$

car H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$\vec{u}.\vec{v} = 2\times5 = \boxed{10}$

i)



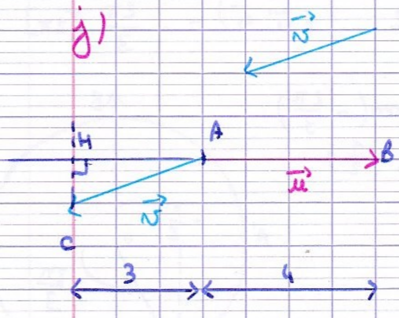
$\|\vec{u}\| = 2$

ABC est un triangle isocèle en C. Sa hauteur issue de C est donc aussi sa médiane issue de C.

Le pied H de cette hauteur est donc le milieu de [AB].

d'où : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH} = 2\times1 = \boxed{2}$

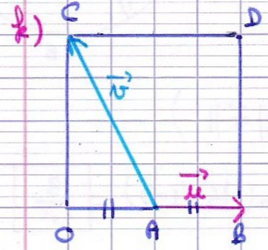
j)



$\vec{u}.\vec{v} = \vec{AB}.\vec{AC}$
$= \vec{AB}.\vec{AH}$
$= -4\times3$

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = -12}$

k)

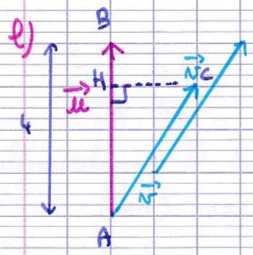


OBDC est un carré de côté 4.

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AO}$
$= -2\times2$

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = -4}$

l)



$\vec{u}.\vec{v} = \vec{AB}.\vec{AC}$
$= \vec{AB}.\vec{AH}$
$= 4\times3$

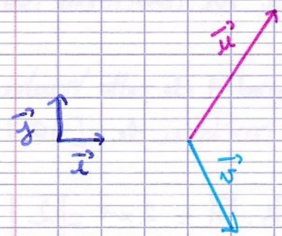
$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = 12}$

Exercice 2.

$(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée.

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

$\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ soit $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

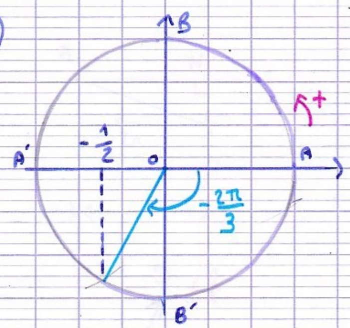


$\vec{u}.\vec{v} = 2\times1 + 3\times(-2)$ ← formule $xx'+yy'$
$= 2 - 6$

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = -4}$

b) $\|\vec{u}\| = 5$ $\|\vec{v}\| = 2$ $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
$= 5 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$



$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = -5}$

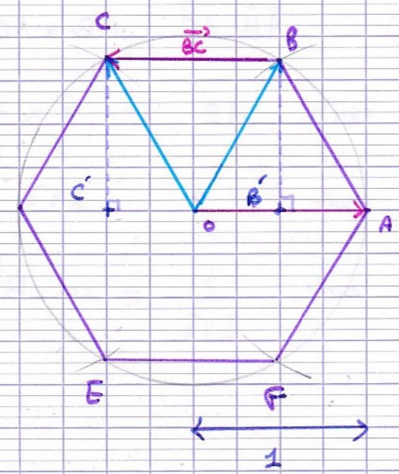
c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = 4$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}(4^2 - 2^2 - 3^2) = \frac{1}{2}(16-4-9) = \boxed{\frac{3}{2}}$

Exercice 3. a) L'hexagone est composé de 6 triangles équilatéraux.



B', milieu de [OA], est aussi le pied de la hauteur issue de B dans le triangle OAB.

$\vec{OA}.\vec{OB} = \vec{OA}.\vec{OB'}$
$= 1 \times \frac{1}{2}$

$\boxed{\vec{OA}.\vec{OB} = \frac{1}{2}}$

b) $\vec{OA}.\vec{OC} = \vec{OA}.\vec{OC'} = -1 \times \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

c) $\vec{BC}$ a même direction et même norme (1) que $\vec{OA}$, mais il est de sens contraire. Donc :

$\vec{OA}.\vec{BC} = -1 \times 1 = \boxed{-1}$

d) $\vec{AD}$ a même direction que $\vec{OA}$
est de sens contraire
a une norme 2 fois plus grande car O est le milieu de [AD]. Donc :

$\vec{OA}.\vec{AD} = -1 \times 2 = \boxed{-2}$

Exercice 4. ABC est un triangle.
$\vec{AB}.\vec{AC} = 18 \quad AB = 6 \quad AC = 2\sqrt{3}$

1) Celle qui contient le cosinus : $\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

2) $\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

soit $18 = 6 \times 2\sqrt{3} \times \cos \widehat{BAC}$:6

:6 soit $3 = 2\sqrt{3} \cos \widehat{BAC}$

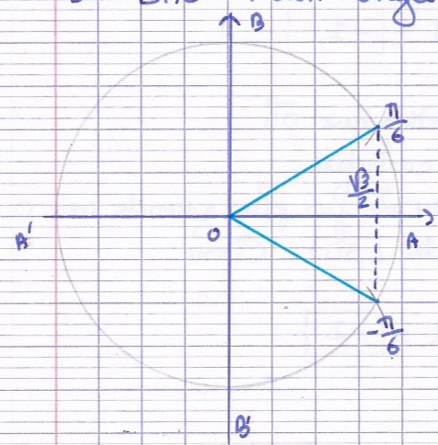
soit $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \cos \widehat{BAC} \iff \cos \widehat{BAC} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$\iff \cos \widehat{BAC} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{2 \times \cancel{3}}$

$\iff \boxed{\cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

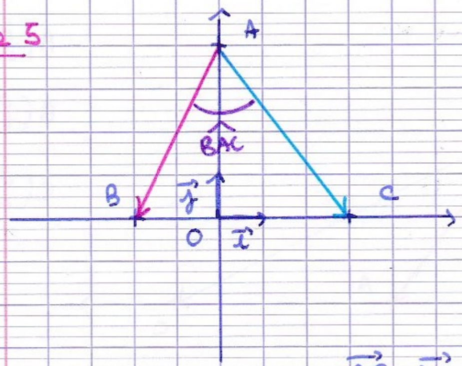
En théorie : le cosinus d'un angle vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ si cet angle est égal à $\frac{\pi}{6}$ ou à $-\frac{\pi}{6}$ à 2π près.

Ici $\widehat{BAC}$ est un angle géométrique, donc pas orienté, donc positif.



On a donc : $\boxed{\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}}$

Exercice 5



A (0 ; 4)
B (−2 ; 0)
C (3 ; 0)

$\vec{AB}\begin{pmatrix} -2-0 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (-2)\times 3 + (-4)\times(-4)$

$= -6 + 16$

$\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 10}$

2) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ $(\mathcal{R})$

$AB = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

donc $(\mathcal{R})$ devient : $10 = 2\sqrt{5} \times 5 \times \cos\widehat{BAC}$ $\quad :10$

soit $1 = \sqrt{5}\cos\widehat{BAC}$

$\boxed{\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

Mettre la calculatrice en mode degrés :

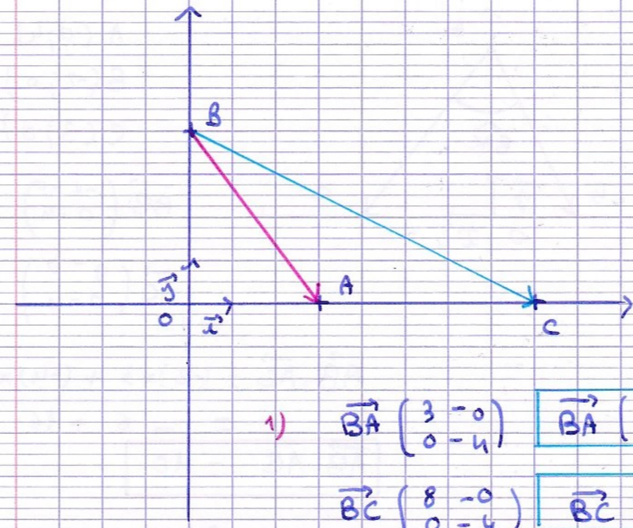
Casio : SHIFT + SETUP → Angle → degrés

Texas Instruments : MODE → choisir degré à la 3ème ligne.

$\boxed{\widehat{BAC} = \text{Arccos}\frac{\sqrt{5}}{5} \approx 63{,}4°}$ TI

ou $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ CASIO

Exercice 6.



$A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) $\vec{BA}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{BA}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix} 8-0 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{BC}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}}$

$BA = \|\vec{BA}\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$BC = \|\vec{BC}\| = \sqrt{8^2+(-4)^2} = \sqrt{64+16}$

$= \sqrt{80} = \sqrt{16\times 5} = \sqrt{16}\times\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

2) $\vec{BA}\cdot\vec{BC} = 3\times 8 + (-4)\times(-4)$ ← $xx'+yy'$

$= 24 + 16$

$\boxed{\vec{BA}\cdot\vec{BC} = 40}$ (E_1)

3) $\vec{BA}\cdot\vec{BC} = BA \times BC \times \cos\widehat{ABC}$

$= 5 \times 4\sqrt{5} \times \cos\widehat{ABC}$

$\boxed{\vec{BA}\cdot\vec{BC} = 20\sqrt{5}\cos\widehat{ABC}}$ (E_2) C.Q.F.D

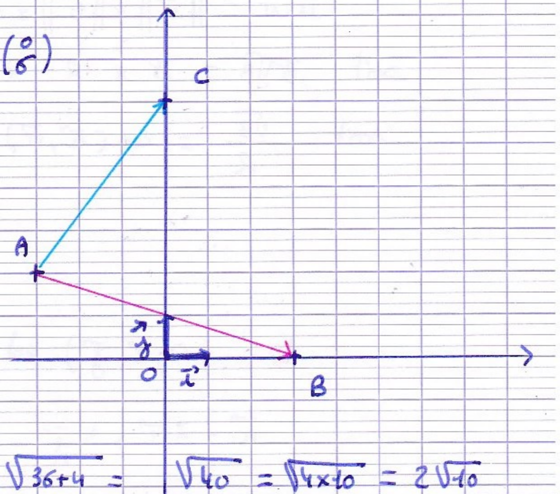
4) (E_1) et (E_2) ⟹ $40 = 20\sqrt{5}\cos\widehat{ABC} \iff 2 = \sqrt{5}\cos\widehat{ABC}$

$\iff \frac{2}{\sqrt{5}} = \cos\widehat{ABC}$

$\iff \boxed{\cos\widehat{ABC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

Suite de l'exercice 6 : $\boxed{\widehat{ABC} = \text{Acos}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \approx 26,6°}$

Exercice 7. $A\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$



1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3-(-3)\\0-2\end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}0-(-3)\\6-2\end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}$

$\vec{AB}.\vec{AC} = 6\times3+(-2)\times(4)$

$= 18-8$

$\boxed{\vec{AB}.\vec{AC} = 10}$

2) $AB = ||\vec{AB}|| = \sqrt{6^2+(-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4\times10} = 2\sqrt{10}$

$AC = ||\vec{AC}|| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

soit $10 = 2\sqrt{10}\times5\times\cos\widehat{BAC}$

soit $1 = \sqrt{10}\cos\widehat{BAC} \iff \boxed{\cos\widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{10}}}$ C.Q.F.D

3) $\widehat{BAC} = \text{acos}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx \boxed{72°}$

Exercice 8 Hypothèses : $AB = 4$ $\vec{AB}.\vec{AC} = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

soit $3 = 4\times AC\times\cos\frac{\pi}{6} \iff 3 = 4\times AC\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff 3 = 2\times AC\times\sqrt{3}$

$\iff \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2} = AC}$

Exercice 9 a) $||\vec{u}|| = 3$ $||\vec{v}|| = 2$ $\vec{u}.\vec{v} = 3\sqrt{3}$

$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

soit $3\sqrt{3} = 3\times2\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

soit $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow (\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $-\frac{\pi}{6}[2\pi]$

mesure de l'angle géométrique

$\frac{\pi}{6}$ rad ou $30°$

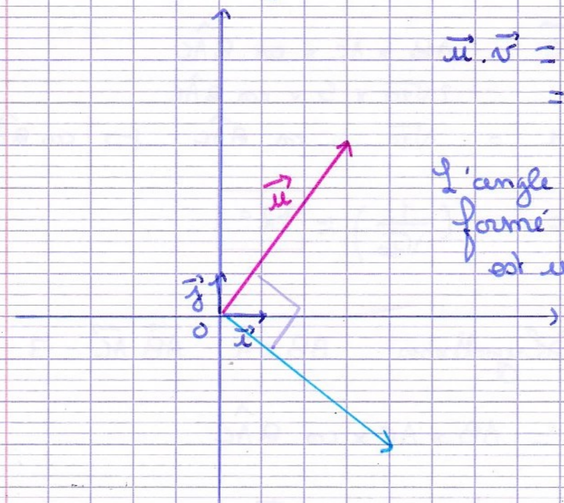
b) $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.

$\vec{u} = 3\vec{i}+4\vec{j}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$

$\vec{v} = 4\vec{i}-3\vec{j}$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ "

$\vec{u}.\vec{v} = 3\times4+4\times(-3)$

$= 0$



L'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un angle droit.

$90°$ ou $\frac{\pi}{2}$ rad

c) On sait que : $||\vec{u}|| = \sqrt{3}$ $||\vec{v}|| = 2\sqrt{3}$ $\vec{u}.\vec{v} = -3$

$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ donne : $-3 = \sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

Suite de l'exercice 9.

soit $-3 = 2\times 3 \cos(\vec{u};\vec{v})$

soit $-1 = 2\cos(\vec{u};\vec{v})$

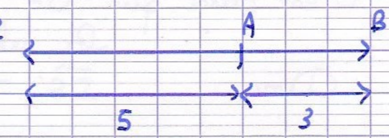
soit $-\frac{1}{2} = \cos(\vec{u},\vec{v})$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{1}{2} \iff (\vec{u},\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \text{ ou } -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

Pour l'angle géométrique, il s'agit de $\boxed{\frac{2\pi}{3}}$ rad ou 120°.

Exercice 10.

- $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires signifie que $(\vec{AB},\vec{AC})$ est un angle plat, donc que $\cos(\vec{AB},\vec{AC}) = -1$.

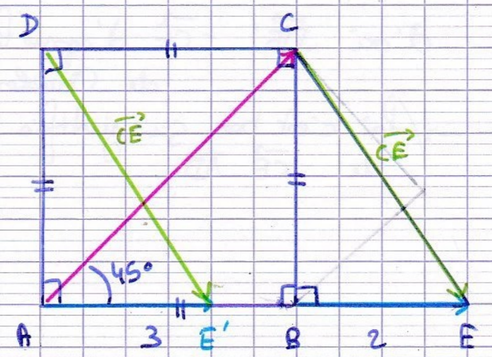


$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \times \cos\pi$

soit $-15 = 3 \times AC \times (-1)$ d'après les hypothèses

soit $5 = AC$

Exercice 11.



Soit E' le point tel que $\vec{BE} = \vec{AE'}$

$\vec{AC}.\vec{BE} = \vec{AC}.\vec{AE'}$

$= AC \times AE' \times \cos 45$

$= 3\sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{\vec{AC}.\vec{BE} = 6}$$

Autre possibilité : utiliser le fait que B est le projeté orthogonal de C sur (AE') :

$\vec{AC}.\vec{BE} = \vec{AB}.\vec{AE'} = 3\times 2 = 6$

$\vec{CE}.\vec{AD} = \vec{DE'}.\vec{AD} = \vec{DA}.\vec{AD}$ car A est le projeté orthogonal de E' sur (AD)

$= -3\times 3$

$\vec{CE}.\vec{AD} = -9$

Je n'ai pas été très rigoureuse ici, à propos du point E'.

→ J'ai défini E' par $\vec{AE'} = \vec{BE}$ mais je n'ai pas prouvé que $\vec{DE'} = \vec{CE}$.

C'est parce que $\vec{DE'} = \vec{DA} + \vec{AE'}$ d'après la relation de Chasles.

Donc $\vec{DE'} = \vec{CB} + \vec{BE}$

car ABCD est un carré donc un parallélogramme

par la définition de E'

d'où $\vec{DE'} = \vec{CE}$ d'après la relation de Chasles

→ là c'est bon, ça justifie mon calcul de $\vec{CE}.\vec{AD}$