

Sommaire 2019

1^{ère} ES - COURS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

I - Génération d'une suite numérique.

1) Définition.

Définition : Une suite est une "succession" de nombres réels.
La suite (u_n) associe, à tout entier n , un nombre réel noté u_n appelé terme général de la suite.

Remarque : il faut distinguer les notations : $u_{n+1} \neq u_n + 1$

2) Définition par une formule explicite.

→ lorsque le terme général u_n est en fonction de n .

Exemples : $u_n = \frac{1}{n}$ $v_n = 1 + n$ $w_n = n - 1$

3) Définition par une formule de récurrence.

→ lorsqu'une suite est définie par :

- * son premier terme
- * la relation de récurrence

Exemple : la suite (u_n) est définie par :

- * son terme initial : $u_0 = 9,5$
- * la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{9}{u_n} \right)$

4) applications

1) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - n + 1$

- a) Calculer u_0 et u_1
- b) Exprimer, en fonction de n , u_{n+1} et u_{n-1}

a) $u_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$

$u_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 100 - 9 = 91$

b) $u_n + 1 = n^2 - n + 1 + 1 = n^2 - n + 2$

$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$

$u_{n+1} = n^2 + n + 1$

2) $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$

- a) Calculer u_0 et u_{10}
- b) Exprimer en fonction de n :

u_{n+1} et u_{n-1}

a) $u_0 = \frac{0+1}{2 \times 0 + 3} = \frac{1}{3}$

$u_{10} = \frac{10+1}{2 \times 10 + 3} = \frac{11}{23}$

b) $u_{n+1} = \frac{n+1+1}{2(n+1)+3} = \frac{n+2}{2n+2+3}$

$u_{n+1} = \frac{n+2}{2n+5}$

$$u_{m-1} = \frac{m-1+1}{2(m-1)+3} = \frac{m}{2m-2+3} = \frac{m}{2m+1}$$

$$u_{m+2} = \frac{m+2+1}{2(m+2)+3} = \frac{m+3}{2m+4+3} = \frac{m+3}{2m+7}$$

3) $u_0 = 2$ et $u_{m+1} = 3u_m - 2$ (1^{ère} suite)

$v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 1 - (v_n)^2$

Ces suites sont définies par récurrence. Calculer $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$.

$$u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$u_3 = 3u_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = 30 - 2 = 28$$

$$v_1 = 1 - (v_0)^2 = 1 - 2^2 = 1 - 4 = -3$$

$$v_2 = 1 - (v_1)^2 = 1 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8$$

$$v_3 = 1 - (v_2)^2 = 1 - (-8)^2 = 1 - 64 = -63$$

II - Sens de variation.

1) Croissance, décroissance.

Définition: La suite (u_n) est:

- * croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- * décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- * constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

2) Méthode pour étudier le sens de variation.

a. Méthode de la différence.

Propriété: Si, pour tout n , la différence

$u_{n+1} - u_n$ est de signe:

* positif, la suite est croissante.

* négatif, la suite est décroissante.

* égale à 0, la suite est constante.

Exemple: 1) $u_n = 2n+1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n+2+1 = 2n+3$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n+3 - (2n+1)$$

$$= 2n+3-2n-1$$

$$= 2$$

$2 > 0$ donc la suite est strictement croissante.

2) $u_{m+1} = u_m + m^2 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} - u_m = m^2$

$m^2 \geq 0$ pour tout $m \Rightarrow$ la suite (u_n) est croissante.

b. Effet du quotient.

Propriété: On considère une suite (u_n) ^{strictement} positive ↗

Cela signifie que $u_n > 0 \quad \forall n$

Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \rightarrow$ alors la suite est strictement croissante.

* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \rightarrow$ alors la suite est strictement décroissante

* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \rightarrow$ alors la suite est constante.

Exemples: 1) $u_n = 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3^{n+1} = 3^n \times 3^1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3^1}{3^n \times 1} = 3$$

$3 > 1 \rightarrow$ la suite (u_n) est strictement croissante.

2) $u_n = \frac{2^n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow$ la suite est croissante: on ne vérifie pas m par o.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n \times 2 \times n}{(n+1) \times 2^n} = \frac{2n}{n+1}$$

Pour $n = 1 \rightarrow 2n = n+1$ car $2 \times 1 = 1+1$

$\forall n > 1 \rightarrow 2n > n+1$

car $2n = n+1$

$n > 1 \Rightarrow n+1 > n+1$

donc $\frac{2n}{n+1} > 1$.

$\rightarrow$ la suite (u_n) est croissante, plus précisément: d'abord constante car $u_1 = u_1$

$$u_1 = \frac{2^1}{1} = 2 \quad u_2 = \frac{2^2}{2} = 2$$

$\rightarrow$ puis strictement croissante car $\forall n \geq 2$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

c. Suites de la forme $u_n = f(n)$

Propriété: Pour que $u_n = f(n) \quad \forall n$, la croissance du sens de variation de f sur $[0; +\infty[$ donne le sens de variation de la suite.

Exemple: $u_n = \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On considère $f: x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

Cette fonction est croissante donc (u_n) aussi est croissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

III. Suites arithmétiques

Définition: Une suite est dite arithmétique lorsque chaque terme s'obtient en ajoutant le même nombre r au terme précédent. Ce nombre r est appelé la raison de la suite arithmétique.

$\forall n, u_{n+1} = u_n + r$ ← formule de récurrence.

Exemples:

1 3 5 7 9 11 13...
 $\xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2}$

5 10 15 20 25 30 35...
 $\xrightarrow{+5} \xrightarrow{+5} \xrightarrow{+5} \xrightarrow{+5} \xrightarrow{+5}$

$\forall n, u_{n+1} = u_n + 2$
 $\xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2}$

Préremme (formule explicite): Soit (u_n) une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 et de raison r .

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

Exemple: Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_0 = -5$ et $r = 3$.
 1) Exprimer u_n en fonction de n (formule explicite) 2) Calculer u_{10}

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = -5 + 3n$

2) $u_{10} = -5 + 3 \times 10 = 25$

$u_n = -5 + 3n$

Sens de variations d'une suite arithmétique:

Exemple: $u_n = -5 + 3n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $u_{n+1} = -5 + 3(n+1) = -5 + 3n + 3 = -2 + 3n$
 $= 3n - 2$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (3n - 2) - (3n - 5)$
 $= -2 + 5$
 $= 3 > 0$

Préremme: Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- * La suite (u_n) est strictement croissante si $r > 0$.
- * La suite (u_n) est strictement décroissante si $r < 0$.
- * La suite (u_n) est constante si $r = 0$.

IV. Suites géométriques

1) Suites géométriques de termes non nuls.

Définition: Une suite est dite géométrique lorsque chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par le même nombre q .

$\forall n, u_{n+1} = u_n \times q$

2) Définition (formule explicite).

Définition: Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ u_1 &= u_0 \times q \\ u_2 &= u_0 \times q \times q \\ &= u_0 \times q^2 \\ u_3 &= u_0 \times q^3 \\ &\vdots \\ u_n &= u_0 \times q^n \end{aligned}$$

Exemple: Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $q = 2$.

- 1) Calculer u_5 .
- 2) (u_n) est-elle croissante?

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 2^n$
 donc $u_5 = 10 \times 2^5 = 320$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10 \times 2^{n+1}$ or $u_n = 10 \times 2^n$
 donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10 \times 2^{n+1}}{10 \times 2^n} = \frac{10 \times 2^n \times 2}{10 \times 2^n} = 2$.

* (u_n) est ci-dessus croissante car $\forall n \in \mathbb{N}, 10 \times 2^{n+1} > 10 \times 2^n$
 * $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$

$\rightarrow$ donc (u_n) est strictement croissante.

3) Sens de variation.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

pourai essayer sur des exemples.

	$q < 0$	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$u_0 > 0$	Altérnée. Ni croissante Ni décroissante	↘	constante	↗
$u_0 < 0$	Altérnée. Ni croissante Ni décroissante	↗	constante	↘

⚠ Sans le calcul du terme général, quand la 1^{re} terme n'est pas u_0 mais u_1 :

suite arithmétique: $u_1 = a_n$ suite géométrique: $u_1 = a_n$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + r \\ u_3 &= u_1 + 2r \\ u_4 &= u_1 + 3r \\ &\vdots \\ u_n &= u_1 + (n-1)r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \times q \\ u_3 &= u_1 \times q^2 \\ u_4 &= u_1 \times q^3 \\ &\vdots \\ u_n &= u_1 \times q^{n-1} \end{aligned}$$

Et si on connaît u_1 ?

suite arithmétique:

$$\begin{aligned} u_4 &= u_1 \\ u_5 &= u_1 + r \\ u_6 &= u_1 + 2r \\ &\vdots \\ u_n &= u_1 + (n-1)r \end{aligned}$$

suite géométrique:

$$\begin{aligned} u_4 &= u_1 \\ u_5 &= u_1 \times q \\ u_6 &= u_1 \times q^2 \\ &\vdots \\ u_n &= u_1 \times q^{n-1} \end{aligned}$$