1ère ES : Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques ou géométriques.

Exercice 1. $U_0 = 1500$ € placés à 4,5% par an avec intérêts simples.

U_n = le capital obtenu au bout de n années.

1) Le principe des intérêts simples, c'est d'augmenter le capital de la même somme chaque année. Alors on a donc affaire à une suite arithmétique.

* Son premier terme est $U_0 = 1500$
* Sa raison est : 4,5% de 1500 $= 0{,}045 \times 1500 = 67{,}5$

Son terme général est donc : $U_n = U_0 + n \times 67{,}5$ $\quad U_n = 1500 + 67{,}5n$

2) $U_{10} = 1500 + 67{,}5 \times 10 = 2175$

Au bout de 10 ans, le capital sera de 2175 €

3) Pour que le capital ait doublé, il faut que $U_n \geqslant 2U_0$

avec $U_n = 1500 + 67{,}5n$ et $U_0 = 1500$

$$U_n \geqslant 2U_0 \iff 1500 + 67{,}5n \geqslant 2 \times 1500$$
$$\iff 67{,}5n \geqslant 1500$$
$$\iff n \geqslant \frac{1500}{67{,}5}$$

$\frac{1500}{67{,}5} \approx 22{,}22$ → C'est la 23ème année que le capital aura doublé.

Exercice 2. 1) $2013 = 2012 + 1$ $\quad u_1 = u_0 - 6 = 104 - 6 = 98$

L'estimation pour le 1er janvier 2013 est de 98 individus.

2) (u_n) est une suite arithmétique :
* de 1er terme $u_0 = 104$
* de raison -6.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times (-6)$

$u_n = 104 - 6n$

3) $2020 = 2012 + 8$

$u_8 = 104 - 6 \times 8 = 56$

L'estimation est de 56 lémuriens au 1er janvier 2020.

4) Il restera moins de 30 individus lorsque $u_n \leqslant 30$

$$u_n \leqslant 30 \iff 104 - 6n \leqslant 30$$
$$\iff -6n \leqslant -74 \quad (-104)$$
$$\iff n \geqslant \frac{74}{6}$$

$\frac{74}{6} = \frac{37}{3} \approx 12{,}33$

→ C'est au 1er jan de la 13ème année que, d'après l'estimation, le nombre de lémuriens sera inférieur à 30. $2012 + 13 = 2025$, c'est à dire au 1er janvier 2025.

Exercice 3. $U_0 = 3500$ $U_n \xrightarrow{\text{augmentation de 3\%}} U_{n+1}$

Pour augmenter un nombre de 3%, on le multiplie par 1,03. ($100\% + 3\% = 103\% = \frac{103}{100} = 1,03$)

1) (U_n) est une suite géométrique
* de premier terme $U_0 = 3500$
* de raison 1,03

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 1,03^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3500 \times 1,03^n$

2) $U_{10} = 3500 \times 1,03^{10} \approx 4703,71$

Au bout de 10 ans, le capital sera de 4703,71 €.

Exercice 4. $U_0 = 20400$. $U_n \xrightarrow{\times 1,02} U_{n+1}$ (augmentation annuelle de 2%)

1) $U_1 = 20400 \times 1,02 = 20808$

2) Chaque année, le salaire augmente de 2% donc est multiplié par 1,02.
→ (U_n) est donc une suite géométrique de raison 1,02 !
$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 1,02^n$ $U_n = 20400 \times 1,02^n$

3) Le salaire aura doublé lorsque $U_n \geqslant 2U_0$.
$2U_0 = 2 \times 20400 = 40800$

On cherche n tel que $U_n \geqslant 40800$

soit $20400 \times 1,02^n \geqslant 40800$

→ Avec le menu RECUR de la calculatrice CASIO

$a_{n+1} = a_n \times 1,02$ SET : START : 0
END : 40 (par exemple)
a_0 : 20400

On trouve : $U_{35} \approx 40797$ et $U_{36} \approx 41613$

→ le salaire aura doublé au bout de 36 ans.

→ Sur la calculatrice TI : Mode 4ème ligne → sélectionner SUITE au lieu de FONC

Annul puis $f(x)$ en haut à gauche.

nMin = 0
u(n) = u(n-1) * 1,02 (2nde) (un) (7) (x,t,θ,n)
u(nMin) = 20400

(2nde) (deftable Fenêtre) DébTbl = 0
Pas = 1
→ On trouve
(2nde) (table graphe) $U_{35} \approx 40798$ et $U_{36} \approx 41614$

→ même conclusion, bien que les arrondis soient différents.

→ On résout $20400 \times 1,02^n \geqslant 40800 \iff 1,02^n \geqslant 2$.

$1,02^{35} \approx 1,999$ et $1,02^{36} \approx 2,04$ → Au bout de 35 ans, le salaire aura presque doublé, au bout de 36 ans, il aura plus que doublé.

1ère ES 20 Problèmes de modélisations de situations avec des suites 3/20
arithmétiques et géométriques.

Exercice 5

1) L'arbre qui mesurait 1 m a doublé de hauteur en 2 ans. Sa hauteur est donc passée de 1 m à 2 m. Elle a donc augmenté de 1 m en 2 ans.
Comme il augmente chaque année de la même longueur, cela signifie que, par an, sa longueur augmente de:
$\frac{1\text{ m}}{2} = 0{,}5\text{ m}$.

2) Au bout de 4 ans, l'arbre mesurera:
$1\text{ m} + 4 \times 0{,}5\text{ m} = 1\text{ m} + 2\text{ m} = 3\text{ m}$
(hauteur initiale ; années ; augmentation en m/an)
$1\text{ m} \times 3 = 3\text{ m}$
Donc, au bout de 4 ans, la hauteur de l'arbre aura été multiplié par 4.

3) $u_0 = 1$ (m) hauteur initiale de l'arbre.
u_n = la hauteur (en m) de l'arbre n années après sa plantation.
Comme, chaque année, l'arbre grandit de 0,5 m, on a $\forall n,\ u_{n+1} = u_n + 0{,}5$
(u_n) est donc une suite arithmétique:
- de 1er terme: $u_0 = 1$
- de raison 0,5. donc $\forall n,\ u_n = u_0 + nr$

$$\boxed{u_n = 1 + 0{,}5n}$$

4) On cherche n tel que $u_n \geqslant 25$

soit $1 + 0{,}5n \geqslant 25$ soit $0{,}5n \geqslant 24$

soit $n \geqslant \frac{24}{0{,}5}$ soit $\boxed{n \geqslant 48}$ L'arbre dépassera 25 m au bout de 48 ans.

Exercice 6.

1) $u_0 = 75$ € ← somme économisée en janvier 2011
(en €) $u_1 = 75 + 7{,}5 = 82{,}5$ ← économisés en février 2011
(en €) $u_2 = 82{,}5 + 7{,}5 = 90$ ← économisés en mars 2011.
(en €) $u_3 = 90 + 7{,}5 = 97{,}5$ ← économisés en avril 2011.

2) (u_n) est une suite arithmétique:
- de premier terme $u_0 = 75$
- de raison 7,5 car $\forall n,\ u_{n+1} = u_n + 7{,}5$

$\forall n,\ u_n = u_0 + 7{,}5 \times n = 75 + 7{,}5n$

3) u_1 = somme économisée en février → mois n°2 de 2011
u_2 = somme économisée en mars → mois n°3 de 2011
n ; ou n−1 ; n+1 ; n

En décembre, le mois n°12 de 2011, la somme économisée par Vincent sera donc u_{11}.

$u_{11} = 75 + 7{,}5 \times 11 = 157{,}5$ → ah oui mais ça c'est pour décembre 2011!

Pour décembre 2013, il faut ajouter 24 (mois) à l'indice:

$u_{11+24} = u_{35} = 75 + 7{,}5 \times 35 = 337{,}50$

→ En décembre 2013, Vincent devrait économiser 337,50 €.

Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques.

Exercice 7.

$d_0 = 1,2$ → distance en km parcourue le dernier jour de février.

$d_1 = 1,2 + 0,4$ = distance parcourue le 1er mars

$d_2 = 1,2 + 2\times0,4$ = " " " 2 mars

⋮

$d_{30} = 1,2 + 30\times0,4$ = " " " 30 mars

$d_{31} = 1,2 + 31\times0,4$ = " " " 31 mars

$d_{32} = 1,2 + 32\times0,4$ = " " " 1er avril

1) $\forall\, n,\ d_{n+1} = d_n + 0,4$ car, chaque jour, Alan court $\underbrace{0,4\text{ km}}_{=400\text{ m}}$ de plus que le jour d'avant.

(d_n) est donc une suite arithmétique :

* De 1er terme $d_0 = 1,2$
* De raison $0,4$

2) a) Le 30 mars, Alan parcourra : $d_{30} = 1,2 + 30\times0,4 = 13,2\text{ km}$

Le 1er avril, Alan parcourra : $d_{32} = 1,2 + 32\times0,4 = 14\text{ km}$

b) On cherche n tel que $d_n \geqslant 42,195$

soit $d_0 + n\times0,4 \geqslant 42,195$

soit $1,2 + 0,4\,n \geqslant 42,195$

soit $0,4\,n \geqslant 40,995$

soit $n \geqslant \dfrac{40,995}{0,4}$

soit $n \geqslant 102,4875$

→ c'est le 103ème jour à partir du 1er mars qu'il dépassera 42,195 km. 31 mars → indice 31 ; 30 avril → indice 31+30 = 61 ; 31 mai : indice : 61+31 = 92 ; 30 juin : indice : 92+30 = 122 ; 103 = 92 + 11 → c'est le 11 juin qu'Alan dépassera 42,195 km.

Exercice 8 :

En 2000 : La population de U est $u_0 = 8000$ (ha)
La population de V est $v_0 = 3750$ (ha)

1) $u_1 = 8000 - 500 = 7500$
$v_1 = 3750 + 600 = 4350$

En 2001, la population de U sera de 7500 habitants et celle de V de 4350 habitants.

2) Chaque année, la population de U diminue de 500 habitants et celle de V augmente de 600 habitants. On a donc :

$\forall\, n$, $u_{n+1} = u_n - 500$ et $v_{n+1} = v_n + 600$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison -500 et (v_n) une suite arithmétique de raison 600.

On a donc, $\forall\, n$: $u_n = u_0 - 500\times n$

soit $u_n = 8000 - 500\,n$

et $v_n = \underbrace{3750}_{v_0} + 600\,n$

3) $u_n \leqslant v_n \iff 8000 - 500\,n \leqslant 3750 + 600\,n$

$\iff -1100\,n \leqslant -4250$ (*)

$\iff n \geqslant \dfrac{4250}{1100}$ (*)

(*) j'ai ôté 600 n et 8000 aux deux membres

(*) j'ai divisé les 2 membres par -1100 donc changé le sens de l'inégalité car -1100 est un nombre négatif.

$\dfrac{4250}{1100} \approx 3,86$ → C'est à partir de $n = 4$ soit de 2004 que la population de la ville V sera supérieure à celle de la ville U.

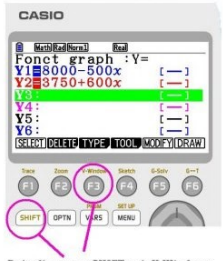
2e Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques

1ère ES

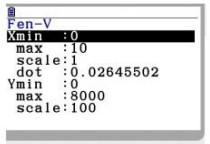
5/20

Pour vérifier graphiquement sur une calculatrice Casio :

Dans le menu graph :



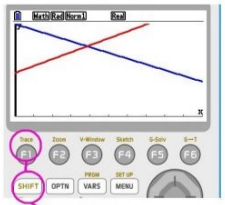
Puis cliquer sur SHIFT puis V-Windows



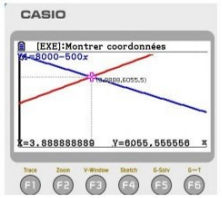
Entrez Xmin=0, Xmax=10, scale=1
Puis Ymin=0, Ymax=8000, scale=100
Puis tapez sur EXIT



Puis faites F6 (DRAW)

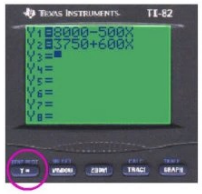


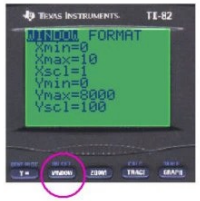
Faire SHIFT + F1

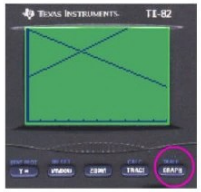


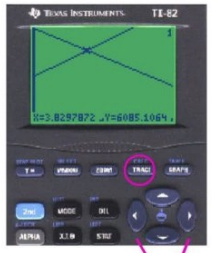
Déplacer ensuite la petite croix usqu'à l'intersection des 2 droites. On vérifie qu'on a alors X proche de 3,8.

Pour vérifier graphiquement sur la TI 82 :



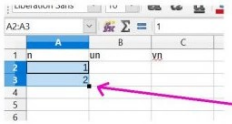




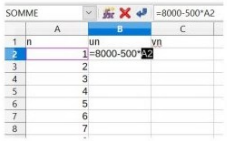


On se positionne grâce à la fonction TRACE + les flèches à l'intersection des 2 droites et on lit que X vaut environ 3,8

Pour vérifier à l'aide du Tableur :

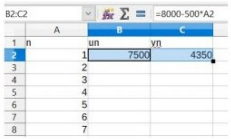


Je sélection ensemble A2 et A3 puis tire vers le bas la poignée d'incrémentation pour obtenir une suite de nombres entiers.

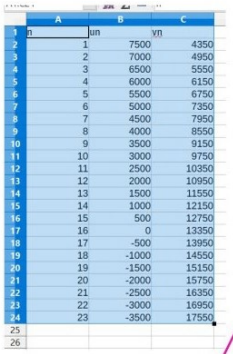


J'entre dans B2 la formule :
"=8000-500*A2"

Puis dans C2 la formule :
"=3750+600*A2"



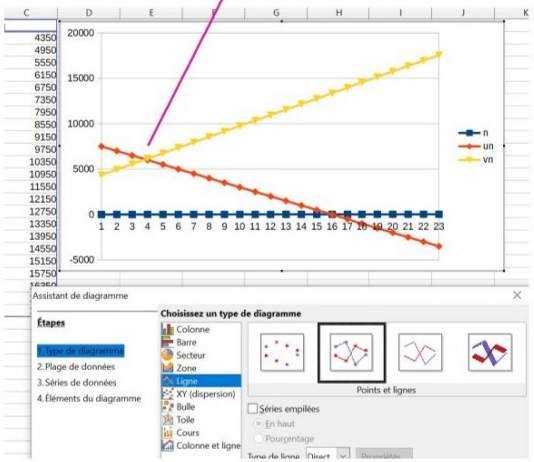
Je sélectionne ensemble B2 et C2, clique sur la poignée d'incrémentation (carré noir) puis tire vers le bas.

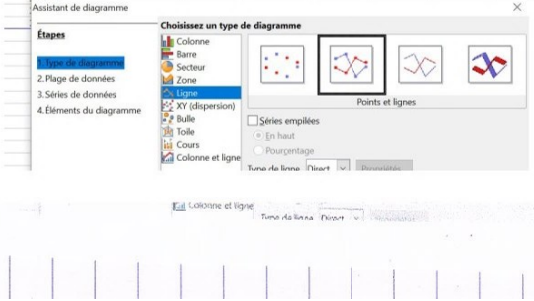


Je sélectionne le tableau entier.



On vérifie graphiquement que les droites se coupent entre n=3 et n=4.





Exercice 9.

$U_0 = 750$ = nombre d'élèves du collège en 2002

U_n = le nombre d'élèves du collège en $2002+n$

1) Chaque année, le nombre d'élèves dans le collège augmente (théoriquement) de 2,6%. Donc pour tout n, on a $\boxed{U_{n+1} = U_n \times 1,026}$

(U_n) est donc une suite géométrique de raison 1,026.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 1,026^n$ soit $U_n = 750 \times 1,026^n$

2) On cherche n tel que $750 \times 1,026^n \geqslant 1000$

soit tel que $1,026^n \geqslant \frac{1000}{750}$ $\frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} \simeq 1,33$

A la calculatrice

→ Dans le menu TABL on peut entrer

$Y = 750 \times 1,026^X$

SET START = 1 END = 40 STEP = 1

TABL → On constate que le passage des cap des 1000 se fait entre $n=11$ et $n=12$.

On fait faire un tableau de valeurs de la fonction $x \mapsto 750 \times 1,026^x$ pour des valeurs entières de x

Le plus petit entier n tel que $750 \times 1,026^n \geqslant 1000$ est donc 12.

$2002 + 12 = 2014$ → C'est pour la rentrée 2014 que le collège devra être construit.

On peut aussi utiliser le menu RECUR de la calculatrice :

20 Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques

1ère ES

$a_{n+1} : a_n \times 1.026$

SET Start : 0 End : 40
$a_0 = 750$

TABL puis

Au tableur : Faire la même colonne A que dans l'exercice 8, en peut commencer à n=0.

Colonne B : indiquer l'année : Dans B2 : "=2002+A2" puis recopier vers le bas.

Colonne C : indiquer un : Dans C2 : 750
dans C3 : =C2*1,026
puis recopier vers le bas.

On obtient :

	A	B	C
1	n	année	un
2	0	2002	750
3	1	2003	769,5
4	2	2004	789,514
5	3	2005	810,03
6	4	2006	831,10
7	5	2007	852,70
8	6	2008	874,87
9	7	2009	897,62
10	8	2010	920,26
11	9	2011	944,90
12	10	2012	969,47
13	11	2013	994,68
14	12	2014	1020,58
15	13	2015	1047,07
16	14	2016	1074,30
17			

J'ai demandé comme format de cellule : nombre à 2 décimales à partir d'ici.

Ce sont des arrondis !

C'est bien à la rentrée 2014 qu'on franchit le seuil des 1000 élèves.

Exercice 10.

1) Pour baisser un nombre de 10%, on le multiplie par 0,9 (car 0,9 = 90% = 100% − 10%)

200 × 0,9 = 180 → le manteau sera vendu 180 € lors de la 1ère semaine de liquidation.

180 × 0,9 = 162 → le manteau sera vendu 162 € lors de la deuxième semaine de liquidation.

2) $S_0 = 200$ S_n = le prix du manteau en € lors de la nième semaine de liquidation.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n \times 0,9$ donc (S_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

3) a) $\forall n$, $S_n = S_0 \times 0,9^n = 200 \times 0,9^n$
donc $S_8 = 200 \times 0,9^8 \approx 86,09$

S'il est encore en vente, le manteau coûtera 86,09 € la 8ème semaine.

b) On cherche n tel que $S_n \leq 100$

$S_n \leq 100 \iff 200 \times 0,9^n \leq 100 \left(\iff 0,9^n \leq \frac{1}{2} \right)$

avec le menu TABL et la fonction $x \mapsto 200 \times 0,9^x$, on trouve que le plus petit entier n tel que $200 \times 0,9^n \leq 100$ est 7 (on peut aussi utiliser le menu RECUR)

C'est lors de la 7ème semaine de liquidation que le manteau devrait passer à un prix inférieur à 100 €.

Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques 7/20

1ère ES

Exercice 11. $a_0 = b_0 = 2000$

1) a_n = le nombre de cellules A après n jours.
b_n = le nombre de cellules B après n jours.

Comme le nombre de cellules A augmente de 10% par jour, on a $\forall n$, $a_{n+1} = a_n \times 1,1$

$1,1 = 100\% + 10\% = 110\% = \frac{110}{100}$

(a_n) est donc une suite géométrique de raison 1,1.

Comme le nombre de cellules B augmente de 5% par jour, on a : $\forall n$, $b_{n+1} = b_n \times 1,05$

(b_n) est donc une suite géométrique de raison 1,05.

2) $\forall n$: $a_n = a_0 \times 1,1^n = 1000 \times 1,1^n$
$b_n = b_0 \times 1,05^n = 1000 \times 1,05^n$

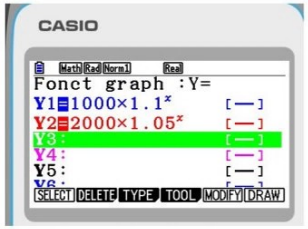
Donc $a_{10} = 1000 \times 1,1^{10} \approx 2594$
$b_{10} = 1000 \times 1,05^{10} \approx 1627$

Au bout de 10 jours, on aura environ 2594 cellules de type A et 1627 cellules de type B.

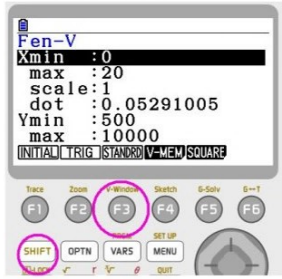
3) On cherche la plus petite valeur de l'entier n tel que $a_n \geqslant 2b_n$ soit $1000 \times 1,1^n \geqslant 2 \times 1000 \times 1,05^n$ (E)

A la calculatrice, on peut programmer les tableaux des 2 fonctions : $f : x \mapsto 1000 \times 1,1^x$ et $g : x \mapsto 1000 \times 1,05^x$

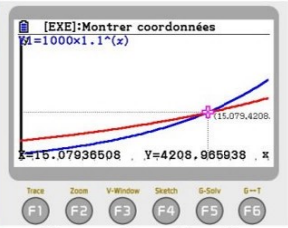
→ On trouve que c'est à partir du 15ème jour que le nombre de cellules A dépasse le double du nombre de cellules B.



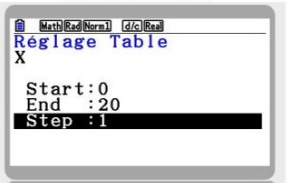
Dans V-Windows :

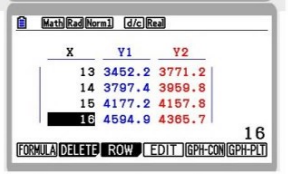


Dans le menu graph :



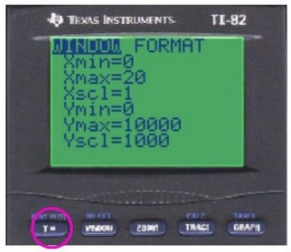
On ne sait pas bien si on est en-deçà ou au-delà de n=15, alors on va dans le menu TABLE :

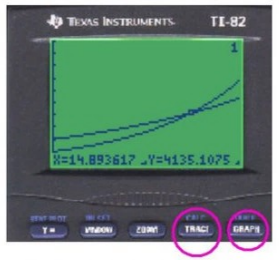


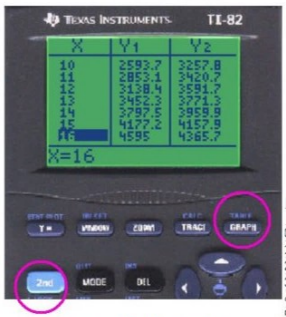


Dès n=15, le nombre de cellules A a dépassé le double du nombre de cellules B.



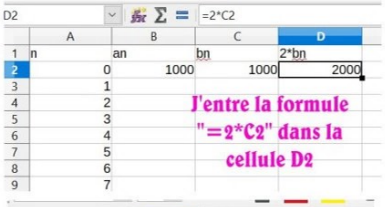




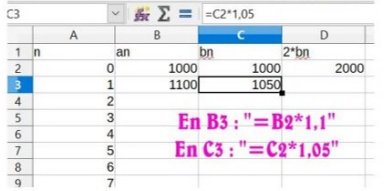


Dès n=15, le nombre de cellules A a dépassé le double du nombre de cellules B.

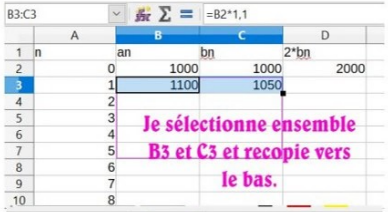
C'est bien à partir de n=15 que le nombre de cellules A dépasse le double du nombre de cellules B.



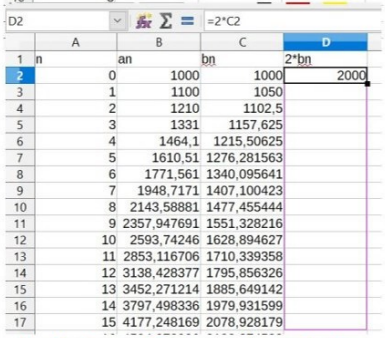
J'entre la formule "=2*C2" dans la cellule D2



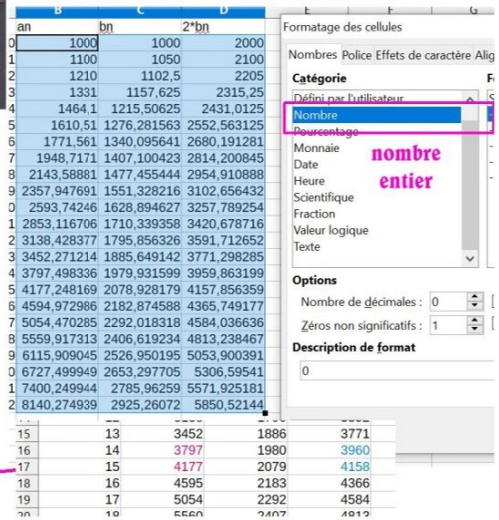
En B3 : "=B2*1,1"
En C3 : "=C2*1,05"



Je sélectionne ensemble B3 et C3 et recopie vers le bas.



Je sélectionne D2 et recopie vers le bas.



Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques 8/20

1ère ES

Exercice 12.

$u_0 = 1\,000\,000$ $\quad u_n$ = nombre de bactéries
$u_1 = 5\,000\,000$ $\quad$ après n heures

1) On suppose que la suite (u_n) est arithmétique.

Calcul de la raison dans le cas d'une suite arithmétique →

$u_1 - u_0 = 5\,000\,000 - 1\,000\,000 = 4\,000\,000$.

Si (u_n) est arithmétique, sa raison est de 4 000 000.
On aura alors: $\forall n,\ u_n = 1\,000\,000 + 4\,000\,000\,n$.

Donc $u_{10} = 1\,000\,000 + 4\,000\,000 \times 10$

$u_{10} = 41\,000\,000$

Si la suite (u_n) est arithmétique
→ Sa raison sera 4 000 000
→ Au bout de 10 heures, il y aura 41 000 000 bactéries.

2) Si (u_n) est géométrique, sa raison sera:

Calcul de la raison dans le cas d'une suite géométrique →

$$\boxed{\frac{u_1}{u_0}} = \frac{5\,000\,000}{1\,000\,000} = 5$$

On aura $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1\,000\,000 \times 5^n$
donc $u_{10} = 1\,000\,000 \times 5^{10}$
$u_{10} \approx 9\,765\,625\,000\,000$

La calculatrice indique $9.765625\text{E}12$
qui signifie 9.765625×10^{12}

Si la suite (u_n) est géométrique : → Sa raison sera 5
→ Au bout de 10 heures, il y aura environ 9 765 625 000 000 bactéries.

Exercice 13:

1) a) Au premier janvier 2012, il y aura sur le livret de Jean :
- Les 900 € déposés le 31 déc. 2010
- Les intérêts de l'année 2011 qui s'élèvent à 3% de 900 € = $0{,}03 \times 900\text{€} = 27\text{€}$
- Les 900 € versés le 31 décembre 2011

$900 + 27 + 900 = 1827$. Au 1er janvier 2012, il y aura 1827 € sur le livret de Jean.

b) Au 1er janvier 2013 on aura en plus:
- 3% de 1827 € = $3\% \times 1827\text{€} = 54{,}81\text{€}$
- 900 € déposés le 31/12/2012.

$1827 + 54{,}81 + 900 = 2781{,}81$

Au 1er janvier 2013, il y aura 2781,81 € sur le livret de Jean.

2) u_n = somme disponible sur le livret (en €) au 1er janvier de l'année $2010 + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$u_0 = 0$. Chaque année :
- Jean ajoute 900 € sur son livret le 31 décembre
- Il lui est versé 3% de la somme qui était sur le livret pendant l'année.

On a donc, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 0{,}03\,u_n + 900$
(u_n : somme déjà présente ; $0{,}03\,u_n$: intérêts ; 900 : ajout par Jean)

soit $u_{n+1} = (1 + 0{,}03)u_n + 900$

soit $\boxed{u_{n+1} = 1{,}03\,u_n + 900}$ (1)

Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques. 9/20

Suite de l'exercice 12.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 30\,000$ (2)

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 30\,000$.

b) Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \underbrace{1{,}03\,u_n + 900}_{u_{n+1} \text{ d'après (1)}} + 30\,000$

$$v_{n+1} = 1{,}03\,u_n + 30\,900$$

c) $v_n = u_n + 30\,000 \iff \boxed{v_n - 30\,000 = u_n}$ (3)

On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1{,}03\,u_n + 30\,900$

d'où $v_{n+1} = 1{,}03\,(v_n - 30\,000) + 30\,900$

$= 1{,}03\,v_n - 30\,900 + 30\,900$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 1{,}03\,v_n}$

Ceci prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03.

4) a) Son premier terme est : $v_0 = u_0 + 30\,000$

$= 0 + 30\,000$

$v_0 = 30\,000$

On a $u_0 = 0$ car, au 1er janvier 2010, Jean n'a pas encore déposé d'argent sur son compte.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 1{,}03^n = 30\,000 \times 1{,}03^n$ (v_n en fonction de n)

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = v_n - 30\,000}$ (3),

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 30\,000 \times 1{,}03^n - 30\,000 = 30\,000\,(1{,}03^n - 1)}$

(u_n en fonction de n.)

5) $2041 = 2010 + 31$ $\quad u_{31} = 30\,000\,(1{,}03^{31} - 1)$

$u_{31} \approx 45\,002{,}41$

Il y aura donc 45 002,41 € (environ) sur le compte de Jean le 1er janvier 2041 s'il a arrêté de fumer à Noël 2010.

Exercice 14. Partie A

$u_0 = 450$ (en €), la prime initiale.

u_n = la prime au bout de n années (tant que celle-ci n'est pas inférieure à 225€)

1) Dès lors n décrit $n \geq 0$, on a $u_{n+1} = u_n - 20$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison -20.

$\forall n,\ u_n = u_0 + n \times \text{raison} = \boxed{450 - 20n}$

2) On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \leq 225$.

soit $450 - 20n \leq 225$

soit -450 ↓ $\quad -20n \leq -225$ ↓ -450

$\times(-20)$ ↓ $\quad n \geqslant 11{,}25$ ↓ $\times(-20)$

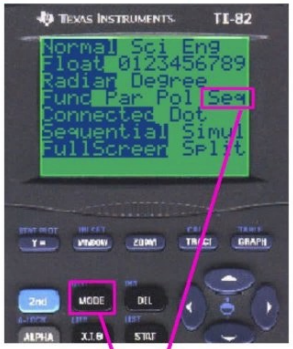
Rappel : On change le sens de l'inégalité quand on multiplie ou divise les 2 membres de l'équation par un nombre négatif.

→ C'est la 12ème année après 12 ans que Pierre aura atteint le bonus maximal.

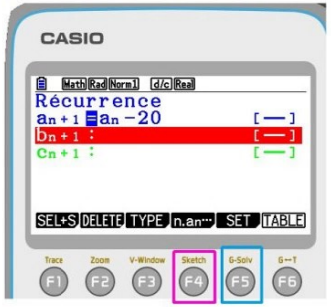
Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques. 10/20

20 1ères ES

Suite de l'exercice 14.



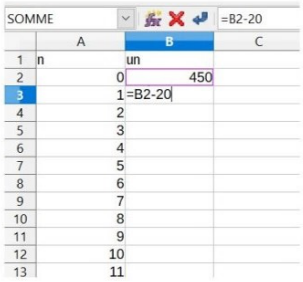
Passons en mode "suites"



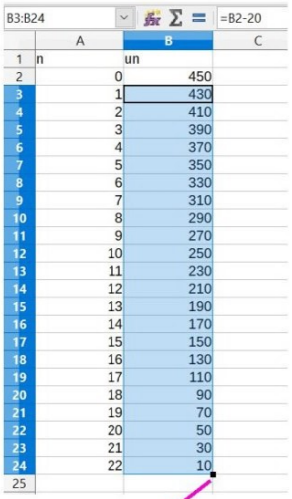
Dans le menu "récurrence", taper F4 pour accéder à an

Puis aller dans F5 pour entrer le 1er terme.

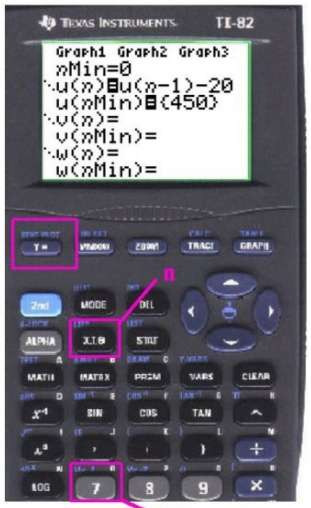
Sur tableur :



On entre "=B2-20" en B3

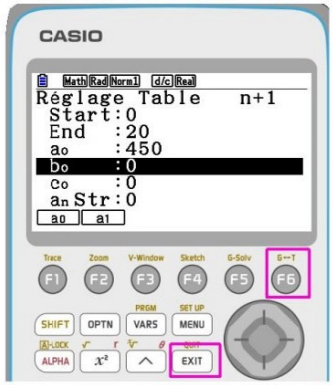


On recopie vers le bas à l'aide de la poignée d'incrémentation



n

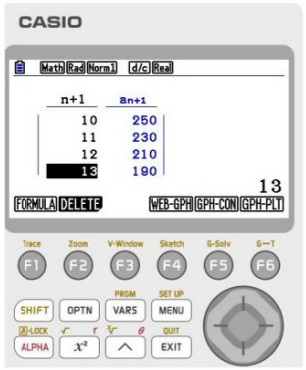
un



Sortir (EXIT)
Puis appuyer sur F6
pour afficher le tableau,
et descendre avec les flèches.



On passe en-dessous de 225 pour n=12



On passe en-dessous de 225 pour n=12

On passe en-dessous de 225 pour n=12

Partie B. 1) Chaque année, la prime baisse de 5% donc est multipliée par 0,95

(car $100\% - 5\% = 95\% = \frac{95}{100} = 0,95$)

On a donc pour tout n (jusqu'à atteinte du bonus maximal) :

$$v_{n+1} = 0,95\, v_n$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,95.

Son premier terme est $v_0 = 450$.

On a $\forall n$: $v_n = v_0 \times 0,95^n$

soit $v_n = 450 \times 0,95^n$

v_n en fonction de n

2) On procède comme au 3) de la partie A, mais on remplace : TI : $u(n) = u(n-1) - 20$

par $u(n) = u(n-1) * 0,95$

Casio : $a_{n+1} = a_n - 20$ par $a_{n+1} = a_n * 0,95$

Tableur : En B3 : "$=B2 * 0,95$" suivent de recopier vers le bas. ← ne pas oublier de recopier ensuite vers le bas.

→ Cette fois, on trouve que c'est après 14 ans que la prime maximale est atteinte.

$v_{14} \approx 219,45$.

2° 1ère ES

Exercice 15. 1) $d_1 = 4,9$ → distance en m parcourue pendant la 1ère seconde.

$d_2 = 4,9 + 9,8 = 14,7$ → distance en m parcourue pendant la 2ème seconde.

$d_3 = 14,7 + 9,8 = 24,5$ → distance en m parcourue pendant la 3ème seconde.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (car on démarre à $n=1$), $d_{n+1} = d_n + 9,8$

Ceci nous prouve que (d_n) est une suite arithmétique de raison 9,8.

3) si $n=1$: $d_1 = 4,9$
si $n=2$: $d_2 = 4,9 + 9,8$
si $n=3$: $d_3 = 4,9 + 2 \times 9,8$

... Pour tout n, $d_n = 4,9 + (n-1) \times 9,8$

Pour tout $n \geq 1$ $d_n = 4,9 + 9,8n - 9,8$

$$\boxed{d_n = 9,8n - 4,9}$$

3) $d_6 = 9,8 \times 6 - 4,9 = 53,9$

Pendant la 6ème seconde, l'objet parcourt 53,9 m.

4) $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = S_6$ est la distance totale parcourue pendant les 6 premières secondes.

On peut calculer directement :

$$\begin{array}{rl} & d_1 = 4,9 \\ + & d_2 = 14,7 \\ + & d_3 = 24,5 \\ + & d_4 = 34,3 \\ + & d_5 = 44,1 \\ + & d_6 = 53,9 \\ \hline & S_n = 176,4 \end{array}$$

Mais habituellement, pour une suite arithmétique, on utilise une formule pour calculer la somme des termes :

$$S_n = \frac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

$$S_n = \frac{(d_1 + d_6) \times 6}{2} = \frac{(4,9 + 53,9) \times 6}{2} = 58,8 \times 3 = 176,4$$

car

$$\begin{array}{rl} S_n = & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 \\ S_n = & d_6 + d_5 + d_4 + d_3 + d_2 + d_1 \\ \hline 2S_n = & \downarrow + \downarrow + \downarrow + \downarrow + \downarrow + \downarrow \end{array}$$

Chacune de ces sommes est égale à $d_1 + d_6$

Par exemple : $d_3 + d_4 = (d_1 + 2 \times 9,8) + (d_6 - 2 \times 9,8)$ (d_3 ; d_4)
$= d_1 + d_6$

$2S_n = 6 \times (d_1 + d_6)$

d'où $S_n = \frac{(d_1 + d_6) \times 6}{2}$

La distance totale parcourue par l'objet pendant les 6 premières secondes est de 176,4 m.

Exercice 16 - Marché des télécommunications.

Partie A. $\begin{cases} u_0 = 900 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 200 \end{cases}$ (1)

1) $u_1 = 0{,}6\,u_0 + 200 = 0{,}6 \times 900 + 200 = 540 + 200$

$u_1 = 740$

$u_2 = 0{,}6\,u_1 + 200 = 0{,}6 \times 740 + 200 = 444 + 200$

$u_2 = 644$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 500$ (2)

a) Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 500$ (2)

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 500$ (v_{n+1} en fonction de u_{n+1})

(puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$ aussi)

Et comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 200$ (1),

on a, en remplaçant u_{n+1} par cette expression dans la formule précédente :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = (0{,}6\,u_n + 200) - 500$

$v_{n+1} = 0{,}6\,u_n - 300$

v_{n+1} en fonction de u_n

b) Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 500$ (2), on a

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n + 500 = u_n$ → je vais pouvoir remplacer u_n par $v_n + 500$ dans la relation précédente.

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 0{,}6\,(v_n + 500) - 300$ ($v_n + 500 = u_n$)

Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 0{,}6\,v_n + 0{,}6 \times 500 - 300$

$v_{n+1} = 0{,}6\,v_n + 300 - 300$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 0{,}6\,v_n$

v_{n+1} en fonction de v_n

c) Cette relation nous prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,6.

Son premier terme est : $v_0 = u_0 - 500$ d'après la relation (2)

Donc $v_0 = 900 - 500 = 400$

$v_0 = 400$ est le premier terme de la suite (v_n).

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times 0{,}6^n$

soit $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 400 \times 0{,}6^n$

v_n en fonction de n.

Et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 500$ d'après la relation (2),

on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \underbrace{400 \times 0{,}6^n}_{v_n} + 500$ C.Q.F.D

e) On utilise la méthode de la différence pour étudier le sens de variations de (v_n) :

2° Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques

1ère ES — 13/20

Suite de l'exercice 16. Partie A - question 2. e.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (v_{n+1} + 500) - (v_n + 500)$

(u_{n+1} : $v_{n+1} + 500$; u_n : $v_n + 500$)

d'après la relation (1)

soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$

car $(v_{n+1} + 500) - (v_n + 500) = v_{n+1} + 500 - v_n - 500$

$= v_{n+1} - v_n$

Le sens de variations de (u_n) sera donc le même que celui de (v_n).

Or (v_n) est une suite géométrique :

* de premier terme $v_0 = 400$ (positif)
* de raison $q = 0,6$ (car $0 < 0,6 < 1$)

(v_n) est donc strictement décroissante, et (u_n) aussi.

Partie B.

1) a) En 2010, sur les 1000 clients, 900 étaient à la société A. Sur ces 900 clients, 20% sont partis pour la société B, soit 20% de $900 = 0,2 \times 900 = 180$

Et, d'autre part, 20% des clients de la société B, qui étaient 100, sont passés à la société A, ce qui représente : 20% de $100 = 20$.

En 2011, la société A s'est retrouvée avec :

900 (clients au départ) − 180 (clients partis chez B) + 20 (clients arrivés de chez B.)

$900 - 180 + 20 = 740$ C.Q.F.D

En 2011 → A a 740 clients et B $1000 - 740 = 260$ clients

En 2012, A comptera : $740 - 20\%$ de $740 + 20\%$ de 260

soit $740 - 0,2 \times 740 + 0,2 \times 260$

soit $740 - 148 + 52$

soit 644 clients

b) a_n = le nombre de clients de la société A l'année $2010 + n$.

Si je note b_n le nombre de clients de la société B l'année $2010 + n$, je peux écrire que :

$\forall n$, $b_n = 1000 - a_n$

Chaque année, le nombre de clients de A peut donc se compter ainsi par rapport aux nombres de clients de A et de B des années précédentes :

$a_{n+1} = a_n - 0,2 \times a_n + 0,2 \times b_n$

- a_n : nombre de clients de A l'année d'avant
- $-0,2 \times a_n$: car 20% des clients de A quittent A pour B
- $+0,2 \times b_n$: car 20% des clients de B viennent chez A.

Suite de l'exercice 16. Partie B. 1) b)

Donc $\forall n$, $a_{n+1} = \underbrace{a_n(1-0{,}2)}_{\text{j'ai factorisé les 2 premiers termes par } a_n} + 0{,}2 \times \underbrace{(4000 - a_n)}_{b_n}$

soit $\forall n$, $a_{n+1} = a_n \times 0{,}8 + 0{,}2(4000 - a_n)$

C.Q.F.D

soit $\forall n$, $a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 200 - 0{,}2a_n$

$a_{n+1} = (0{,}8 - 0{,}2)a_n + 200$

soit $\forall n$, $a_{n+1} = 0{,}6\,a_n + 200$ C.Q.F.D

c) D'après la question 2) d) de la partie A :

$\forall n$, $a_n = 400 \times 0{,}6^n + 500$

a_n en fonction de n.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0{,}6^n > 0$ (Car c'est un produit de nombres positifs)

donc $400 \times 0{,}6^n > 0$ (pour la même raison)

donc $\underbrace{400 \times 0{,}6^n + 500}_{a_n} > 500$ (en ajoutant 500 aux 2 membres)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 500$ C.Q.F.D

b) $a_{10} = 400 \times 0{,}6^{10} + 500 \approx 502{,}4 > 502$

$a_{11} = 400 \times 0{,}6^{11} + 500 \approx 501{,}5 < 502$

Comme la suite (a_n) est strictement décroissante (car c'est la même que la suite (u_n) de la partie A), tous les termes a_n avec $n > 11$ seront inférieurs à a_{11}.

$a_{10} > 502$ et $a_{11} < 502$ donc $\forall n > 10$, $a_n < 502$

C.Q.F.D

c) Si l'évolution du marché des télécommunications dans ce pays suit ce modèle, au fil du temps, la tendance sera à ce qu'il y ait autant de clients dans la société A que dans la société B.

En effet, (v_n) a un premier terme positif et une raison comprise entre 0 et 1.

(v_n) est décroissante et ses termes s'approcheront de plus en plus de zéro

Comme $\forall n$, $u_n = v_n + 500$, les termes de (u_n) vont, en diminuant, s'approcher de plus en plus de 500. Le nombre de clients dans les sociétés A et B va tendre vers 500 (sur la population de 1000 étudiée).

1ère ES - 20 Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques. 15/20

Exercice 17 - Malthusianisme.

1) Soit P_0 la population de l'Angleterre en 1800 et P_n sa population en $1800+n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimée en millions d'habitants.

Pour tout n, on a : $P_{n+1} = P_n \times 1{,}02$ car la population augmente de 2%

(P_n) est une suite géométrique
* De premier terme $P_0 = 8$
* De raison $1{,}02$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P_n = 8 \times 1{,}02^n}$

donc $P_{100} = 8 \times 1{,}02^{100}$
$\approx 57{,}957$

Selon l'hypothèse de Malthus, la population de l'Angleterre en 1900 aurait dû être d'environ 57,957 millions d'habitants.

2) Soit A_0 le nombre de millions d'habitants que peut nourrir l'agriculture anglaise en 1800 et A_n le nombre d'habitants qu'elle pourrait nourrir en $1800+n$ selon l'hypothèse de Malthus, en millions d'habitants.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + 0{,}5$ ← + 500 000 habitants soit 0,5 million.

(A_n) est une suite arithmétique :
* De premier terme $A_0 = 10$.
* De raison $0{,}5$.

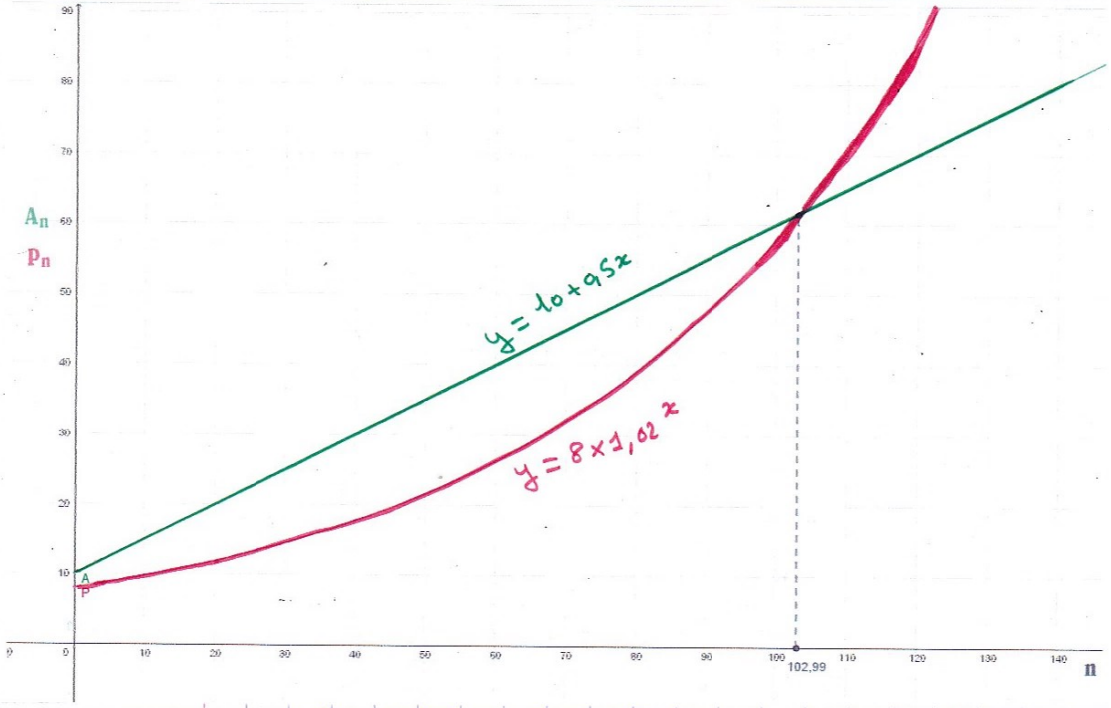
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = A_0 + n \times 0{,}5$

$\boxed{A_n = 10 + 0{,}5\,n}$

$A_{100} = 10 + 0{,}5 \times 100 = 10 + 50 = 60$

Le nombre de personnes que pourrait nourrir l'agriculture anglaise en 1900 selon l'hypothèse de Malthus est de 60 millions.

2) On cherche le plus petit entier n tel que $A_n \leqslant P_n$ soit $10 + 0{,}5n \leqslant 8 \times 1{,}02^n$



On trouve : $P_{102} \approx 60{,}8$ $P_{103} \approx 61{,}5$ un peu plus
$A_{102} = 61$ $A_{103} = 61{,}5$

C'est en 103 que d'après l'hypothèse de Malthus, l'agriculture de l'Angleterre commencera à ne plus suffire à nourrir sa population.

1ère ES - 2o Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques. 16/20

Exercice 18.

1) a) $\forall n$, $A_{n+1} = A_n + 800$

$G_{n+1} = G_n \times 1{,}035$

$100\% + 3{,}5\% = 103{,}5\% = 1{,}035$

b) (A_n) est une suite arithmétique de premier terme $A_0 = 20\,000$ et de raison 800.

(G_n) est une suite géométrique de premier terme $G_0 = 20\,000$ et de raison 1,035.

2) On a $\forall n \in \mathbb{N}$: $A_n = A_0 + n \times 800$

soit $\boxed{A_n = 20\,000 + 800\,n}$

et $G_n = G_0 \times 1{,}035^n$

soit $\boxed{G_n = 20\,000 \times 1{,}035^n}$

	A	B	C	D	E
1	n	An	Somme des An	Gn	Somme des Gn
2	0	20000	20000	20000	20000
3	1	20800	40800	20700	40700
4	2	21600	62400	21424,5	62124,5
5	3	22400	84800	22174,36	84298,86
6	4	23200	108000	22950,46	107249,32
7	5	24000	132000	23753,73	131003,04
8	6	24800	156800	24585,11	155588,15
9	7	25600	182400	25445,59	181033,74
10	8	26400	208800	26336,18	207369,92
11	9	27200	236000	27257,95	234627,86
12	10	28000	264000	28211,98	262839,84
13	11	28800	292800	29199,39	292039,23
14	12	29600	322400	30221,37	322260,61
15	13	30400	352800	31279,12	353539,73
16	14	31200	384000	32373,89	385913,62
17	15	32000	416000	33506,98	419420,59
18	16	32800	448800	34679,72	454100,31
19	17	33600	482400	35893,51	489993,83
20	18	34400	516800	37149,78	527143,61
21	19	35200	552000	38450,03	565593,64
22	20	36000	588000	39795,78	605389,41
23	21	36800	624800	41188,63	646578,04
24	22	37600	662400	42630,23	689208,27
25	23	38400	700800	44122,29	733330,56
26	24	39200	740000	45666,57	778997,13
27	25	40000	780000	47264,90	826262,03

Pour construire le tableau : J'ai entré "0" en A_2
"1" en A_3
puis recopié vers le bas après avoir sélectionné A_2 et A_3 ensemble.

En B2, j'ai entré "=20000 + 800*A2"
et ai recopié vers le bas

On pouvait aussi : entrer "20000" en B2
puis "=A2+800" en B_3
puis recopié vers le bas.

En C2, j'ai entré : "=B2"
en C3, j'ai entré : "=B3+C2" et j'ai recopié vers le bas.

En D2, j'ai entré : "=20000*1.035^A2"
puis j'ai recopié vers le bas.

On pouvait aussi entrer "20000" en D2
puis "=D2*1,035 en D3
puis recopier D3 vers le bas.

En E2, j'ai entré "=D2"
en E3 : "=D3+E2"
et j'ai recopié vers le bas.

Enfin, j'ai mis les colonnes D et E à partir de la ligne 5 au format de cellule :
nombre à 2 décimales.

1ère ES - 20 problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques. 17/20

Suite de l'exercice 18, question 2

$A_0 = 20\,000$	1ère année	$G_0 = 20\,000$
$+ A_1 = 20\,800$	2ème année	$+ G_1 = 20\,700$
$+ A_2 = 21\,600$	3ème année	$+ G_2 = 21\,424{,}5$
$+ A_3 = 22\,400$	⋮	$+ G_3 \approx 22\,174{,}36$
$+ A_4 = 23\,200$		$+ G_4 \approx 22\,950{,}46$
$+ A_5 = 24\,000$		$+ G_5 \approx 23\,753{,}73$
$+ A_6 = 24\,800$		$+ G_6 \approx 24\,585{,}11$
$+ A_7 = 25\,600$		$+ G_7 \approx 25\,445{,}56$
$+ A_8 = 26\,400$	9ème année.	$+ G_8 \approx 26\,336{,}18$
$+ A_9 = 27\,200$		$+ G_9 \approx 27\,257{,}95$
$+ A_{10} = 28\,000$		$+ G_{10} \approx 28\,211{,}98$
$+ A_{11} = 28\,800$		$+ G_{11} \approx 29\,199{,}39$
$+ A_{12} = 29\,600$		$+ G_{12} \approx 30\,221{,}39$
$+ A_{13} = 30\,400$	⋮	$+ G_{13} \approx 31\,279{,}72$
$+ A_{14} = 31\,200$		$+ G_{14} \approx 32\,373{,}89$
$+ A_{15} = 32\,000$	16ème année	$+ G_{15} \approx 33\,506{,}98$
$\sum_{i=0}^{15} A_i = 416\,000$		$\sum_{i=1}^{15} G_i \approx 419\,420{,}59$

En calculant avec les formules :

$$\sum_{i=0}^{15} A_i = \frac{(A_0 + A_{15}) \times 16}{2}$$

$$= (20\,000 + 32\,000) \times 8$$

$$= 52\,000 \times 8$$

$$\sum_{i=0}^{15} A_i = 416\,000$$

$$\sum_{i=1}^{15} G_i = G_0 \times \frac{1 - 1{,}035^{16}}{1 - 1{,}035}$$

$$= 20\,000 \times \frac{1 - 1{,}035^{16}}{-0{,}035}$$

$$\sum_{i=1}^{15} G_i \approx 419\,420{,}59$$

3) Son choisi entre ces 2 propositions, l'employé devra considérer plusieurs paramètres :

* S'il pense rester 8 ans ou moins dans l'entreprise, la première proposition est la plus avantageuse
* S'il pense rester plus de 8 ans, sur le long terme, c'est la deuxième proposition la plus avantageuse mais s'il a besoin de plus d'argent à court terme, mieux vaut rester sur la première.

Exercice 19 : Consommation d'eau et population.

Partie I : Evolution de la population.

1) $\frac{52\,500 - 50\,000}{50\,000} = \frac{2\,500}{50\,000} = 0{,}05 = 5\%$

Rappel : pour calculer son pourcentage d'évolution, la formule est :

$$\frac{\text{Valeur finale} - \text{Valeur initiale}}{\text{Valeur initiale}}$$

→ Ainsi, la population a bien augmenté de 5% entre 2008 et 2009.

2) $P_2 = P_1 \times \underbrace{1{,}05}_{\text{augmentation de 5\%}} = 52\,500 \times 1{,}05 = 55\,125$

$100\% + 5\% = 105\% = \frac{105}{100} = 1{,}05$

P_2 sera égale à 55 125 (habitants) selon l'hypothèse.

1ère ES - 20 problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques. 18/20

Suite de l'exercice 19. Partie I - 3) a) Si, chaque année, la population augmente de 5%, on aura, pour tout n:

$$P_{n+1} = P_n \times 1{,}05$$

(P_n) sera donc une suite géométrique de raison 1,05.

b) $\forall n,\quad P_n = P_0 \times 1{,}05^n$

soit $P_n = 50\,000 \times 1{,}05^n$

P_n en fonction de n

c) $P_{10} = 50\,000 \times 1{,}05^{10} \approx 81\,445$

Partie II - Evolution de la consommation d'eau.

1) $300 - 295 = 5$ $\qquad$ $305 - 300 = 5$

Pendant ces 3 ans, la consommation d'eau par habitant et par jour augmente de 5L chaque année.

→ on a une croissance dite "linéaire" lorsque la différence entre 2 termes consécutifs est constante.

Si c'était le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ qui était constant, la croissance serait qualifiée d'exponentielle.

2)

	A	B	C	D
1	Année	Population	Consommation moyenne par habitant en L/j	Quantité d'eau en L/j pour la population totale
2	2008	50000	300	15000000
3	2009	52500	305	16012500
4	2010	55125	310	17088750
5	2011	57881,25	315	18232593,75
6	2012	60 775,31	320	19448100
7	2013	63 814,08	325	20 739 575,39
8	2014	67 004,78	330	22 111 578,07
9	2015	70 355,02	335	23 568 932,08
10	2016	73 872,77	340	25 116 742,54
11	2017	77 566,41	345	26 760 411,73
12	2018	81 444,73	350	28 505 655,97
13	2019	85 516,97	355	30 358 523,61
14	2020	89 792,82	360	32 325 413,87
15	2021	94 282,46	365	34 413 096,85
16	2022	98 996,58	370	36 628 734,59
17	2023	103 946,41	375	38 979 903,36
18	2024	109 143,73	380	41 474 617,18
19	2025	114 600,92	385	44 121 352,62
20	2026	120 330,96	390	46 929 075,06
21	2027	126 347,51	395	49 907 266,36
22	2028	132 664,89	400	53 065 954,10
23	2029	139 298,13	405	56 415 742,46
24				

a) en B3, j'ai saisi la formule : "=B2*1,05"

Remarque : ici, on n'a pas les valeurs de n dans le tableau. On ne peut donc pas, a priori, entrer la formule de P_n en fonction de n (à moins de considérer que n = (valeurs de la colonne A - 2008)). Il est donc plus simple d'entrer une formule de récurrence (la cellule du dessus x 1,05)

b) en C3 : "=C2+5" $\qquad$ c) en D2 : "=B2*C2"

nombre d'habitants x nombre de L/j / habitant.

3) $P_7 = 50\,000 \times 1{,}05^7$ $\qquad$ 2015 = 2008 + 7

1ère ES. 2e problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques et géométriques. 19/20

Suite de l'exercice 19, partie 2, 3) Notons C_n la consommation d'eau par habitant pour l'année en litres en $2008+n$.

On a : $\begin{cases} C_0 = 300 \\ C_{n+1} = C_n + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(C_n) est donc une suite arithmétique de raison 5, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = C_0 + 5 \times n = 300 + 5n$.

Donc $C_7 = 300 + 5 \times 7 = 335$ → On retrouve la valeur lue dans le tableau.

La quantité d'eau totale en L/j pour satisfaire aux besoins de la population en 2015 sera donc :

$$P_7 \times C_7 = 50000 \times 1{,}05^7 \times 335 \approx 23\,568\,932 \text{ (L)}.$$

Exercice 20 - Abonnements.

1) a) En 2010, il y avait 25 000 abonnés.
80% de ces abonnés le restèrent en 2011, ce qui donnera : 80% de 25000 $= 0{,}8 \times 25000$ anciens abonnés, auxquels s'ajouteront 20 000 nouveaux abonnés.

$$0{,}8 \times 25\,000 + 20\,000 = 20\,000 + 20\,000 = 40\,000$$

Le nombre d'abonnés estimé pour 2011 est bien de 40 000.

b)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année n	0	1	2	3	4	5
2	Abonnés	25 000	40 000	52 000	61 600	69 280	75 424

Si on note U_n le nombre d'abonnés l'année n, on a, pour tout n : $U_{n+1} = 0{,}8\,U_n + 20\,000$

→ le menu "récurrence" de la calculatrice aide bien.

CASIO $a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 20\,000$ SET $a_0 = 25\,000$ Start : 0 End : 40 (par exemple)

TEXAS INSTRUMENT. mode → suites et la 4ème ligne
$f(x)$ nMin = 0 $u(n) = u(n-1) * 0.8 + 25\,000$ $u(nMin) = 25\,000$
Tracé Table graphe

c) On entrerait en C2 : "$= B1 * 0.8 + 20\,000$"

2) a) $U_1 - U_0 = 40\,000 - 25\,000 = 15\,000$
$U_2 - U_1 = 52\,000 - 40\,000 = 12\,000$
$15\,000 \neq 12\,000$ → $U_{n+1} - U_n$ n'est pas constant.
La suite (U_n) n'est donc pas arithmétique.

b) $\frac{U_1}{U_0} = \frac{40\,000}{25\,000} = \frac{40}{25} = \frac{5 \times 8}{5 \times 5} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1{,}6$

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{52\,000}{40\,000} = \frac{52}{40} = \frac{13 \times 4}{10 \times 4} = \frac{13}{10} = 1{,}3$

$1{,}6 \neq 1{,}3$ Le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ n'est pas constant.
La suite n'est donc pas géométrique.

arithmétiques et géométriques.

Suite de l'exercice 20 2) b) (u_n) est ici en présence d'une suite dite arithmético-géométrique : pour tout n, on a :

$u_{n+1} = a u_n + b$ où les nombres a et b sont 2 constantes.

c) $\boxed{\forall n,\ U_{n+1} = 0{,}8\,U_n + 20\,000}$

3) a) $V_0 = 100\,000 - U_0 = 100\,000 - 25\,000$

$V_0 = 75\,000$

c) 4) a)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année n	0	1	2	3	4	5
2	Abonnés	25 000	40 000	52 000	61 600	69 280	75 424
3	V_n	75 000	60 000	48 000	38 400	30 720	24 576
4	V_n/V_{n-1}		0,8	0,8	0,8	0,8	0,8

b) En B3 : "= 100 000 − B2"

4) b) On a pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{V_n}{V_{n-1}} = 0{,}8$ → constante

(V_n) semble être une suite géométrique de raison 0,8

c) Si (V_n) est une suite géométrique :
* De premier terme $V_0 = 75000$
* De raison 0,8

alors on aura $\boxed{\forall n :\ V_n = 75000 \times 0{,}8^n}$

Etoi, j'ai envie de démontrer la conjecture ! d) $\forall n,\ V_n = 100\,000 - U_n$

J'ajoute une question →

Donc $\forall n$, $U_{n+1} = 100\,000 - U_{n+1}$
$= 100\,000 - (0{,}8\,U_n + 20\,000)$
$= 100\,000 - 0{,}8\,U_n - 20\,000$
$= 80\,000 - 0{,}8\,U_n$
$= 0{,}8(100\,000 - U_n)$
$= 0{,}8\,V_n$

→ Ceci (V_n) est bien une suite géométrique de raison 0,8.

5) a) $\forall n,\ U_n = 100\,000 - V_n$ (car $V_n = 100\,000 - U_n$, $-V_n + U_n$; ou $U_n = 100\,000 - V_n$, $+V_n - U_n$)

soit $\boxed{\forall n,\ U_n = 100\,000 - 75\,000 \times 0{,}8^n}$

Remarque : les 100 000 abonnés ne seront jamais atteints, car $\forall n$, $75\,000 \times 0{,}8^n > 0$ donc $U_n < 100\,000$

... sauf si on arrondit et que $75\,000 \times 0{,}8^n < 0{,}5$
... vrai à partir de $n = 54$

b) $2020 = 2010 + 10$ $\quad U_{10} = 100\,000 - 75000 \times 0{,}8^{10}$

$U_{10} \approx 91\,947$

L'estimation pour 2020 est de 91 947 abonnés.