$1^{\text{ère}}$ ES – Problèmes de modélisations de situations avec des suites arithmétiques ou géométriques.

Exercice 1 : On place un capital $U_0=1500$ € à 4,5 % par an avec intérêts simples.

On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1) Donner la nature de la suite (U_n) et exprimer U_n en fonction de n.

2) Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.

3) Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?

Exercice 2 : La direction d'un parc zoologique s'inquiète de la diminution des lémuriens à tête noire vivant dans le parc. En effet : un recensement au 1^{er} janvier des trois dernières années a permis de constater la diminution annuelle de 6 individus. Au 1^{er} janvier 2012, le parc compte 104 lémuriens à tête noire. On suppose que l'évolution linéaire des 3 dernières années se poursuit.

On note $u_0=104$ et, pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre de lémuriens à tête noire au 1^{er} janvier de l'année $2012+n$.

1) Calculer l'estimation que l'on obtient pour le 1^{er} janvier 2013.

2) Déterminer la nature de la suite (u_n) et en déduire l'expression de son terme général.

3) À combien peut-on estimer le nombre de lémuriens à tête noire au 1^{er} janvier 2020 avec ce modèle ?

4) Si rien n'est fait pour sauver les lémuriens à tête noire dans ce parc, en quelle année peut-on estimer qu'il restera moins de 30 individus ?

Exercice 3 : On place un capital $U_0=3500$ € à 3 % par an avec intérêts composés.

On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1) Donner la nature de la suite (U_n) et exprimer U_n en fonction de n.

2) Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.

Exercice 4 : Le salaire annuel d'embauche d'un employé est de 20 400 €. son contrat prévoit une augmentation annuelle de 2 %. On note $U_0=20\,400$ et, pour $n>1$, U_1 le salaire annuel au bout de n années.

1) Calculer U_1.

2) Justifier que (U_n) est une suite géométrique, puis donner son terme général.

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le salaire aura doublé.

Exercice 5 : Un arbre mesure 1 m lors de sa plantation et sa hauteur augmente chaque année de la même longueur.

1) L'arbre a doublé de hauteur en 2 ans. De combien a-t-il poussé chaque année ?

2) Par quel nombre sera multipliée sa hauteur initiale au bout de 4 ans ?

3) On note u_0 sa hauteur initiale, en mètres, et u_n sa hauteur n années après la plantation. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimez u_n en fonction de n.

4) Au bout de combien d'années la hauteur de l'arbre dépassera-t-elle 25 mètres ?

Exercice 6 : Au mois de janvier 2011, Vincent a économisé 75 €. Au mois de février, il a économisé 7,50 € de plus qu'en janvier, en mars 7,50 € de plus qu'en février etc.

Il économise chaque mois 7,50 € de plus qu'au mois précédent. On note u_0 la somme, en euros, économisée par Vincent en janvier 2011, u_1 celle économisée en février, u_2 celle économisée en mars, etc.

1) Calculez u_1, u_2 et u_3.

2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimez u_n en fonction de n.

3) Comment est notée l'économie réalisée par Vincent en décembre 2013 ? Calculez cette économie.

Exercice 7 : Alan décide de s'entraîner chaque jour pour participer à un marathon (42,195 km). Au début, il fait systématiquement 3 tours de piste (1,200 km) par jour sur le stade de sa ville. Alan décide qu'à partir du 1er mars, il augmentera chaque jour la distance parcourue de 400 m. On pose $d_0=1{,}2$. On note d_1 la distance en km parcourue par Alan le 1er mars, d_2 la distance en km parcourue par Alan le 2 mars etc.

1) Montrer que la suite (d_n) est arithmétique de raison 0,4.

2) En supposant qu'Alan soit d'une résistance peu commune pour suivre ce plan d'entraînement : a) Quelle distance parcourra-t-il le 30 mars ? Le 1er avril ?

b) À quelle date Alan dépassera-t-il la distance de 42,195 km ?

Exercice 8 : En 2000, une ville U avait 8 000 habitants et la ville V avait 3 750 habitants. Depuis cette date, la population de la ville U baisse de 500 habitants par an et celle de la ville V augmente de 600 habitants par an.

On pose $u_0=8\,000$ et on note u_n le nombre d'habitants de la ville U en $(2000+n)$.

On pose $v_0=3\,750$ et on note v_n le nombre d'habitants de la ville V en $(2000+n)$

1) Calculer le nombre d'habitants des villes U et V en 2001.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont arithmétiques et donner leur terme de rang n.

3) Résoudre l'inéquation $u_n \leqslant v_n$ et en déduire à partir de quelle année le nombre d'habitants de la ville U sera devenu inférieur au nombre d'habitants de la ville V.

4) À l'aide de la calculatrice ou du tableur, vérifier graphiquement la conclusion de la question 3).

Exercice 9 : Le conseil général d'un département estime que, depuis l'année 2002, les effectifs d'un collège augmentent de 2,6 % par an. On note U_n le nombre d'élèves en $2002+n$. On sait que $U_0=750$.

1) Montrer que la suite (U_n) est géométrique et exprimer U_n en fonction de n.

2) On estime que, lorsque l'effectif aura dépassé 1 000 élèves, il faudra disposer d'un nouvel établissement. À l'aide de la calculatrice ou du tableur, déterminer pour quelle rentrée scolaire il devra être construit, en supposant que la progression des effectifs reste la même au fil des années.

Exercice 10 : Sur la vitrine d'un magasin, on peut lire : « Liquidation définitive : chaque semaine, nous baissons les prix de la semaine précédent de 10 %. »

1) Un manteau était vendu 200 € avant la liquidation. Combien est-il vendu lors de la première semaine de liquidation ? Lors de la deuxième semaine ?

2) On pose $s_0=200$, on note s_n le prix du manteau lors de la n$^{\text{ième}}$ semaine de liquidation. Donner la nature de la suite (s_n).

3) a) La liquidation dure 8 semaines. Si le manteau est toujours en vente, quel est son prix lors de la 8ème semaine ?

b) Une personne décide d'acheter le manteau dès que son prix sera inférieur à 100 €. Déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur la semaine au cours de laquelle elle effectuera son achat.

Exercice 11 : On observe 2 types de cellules : les cellules A et les cellules B. Un jour donné, on isole 1000 cellules A et 1000 cellules B. Le nombre de cellules A augmente de 10 % par jour et le nombre de cellules B augmente de 5 % par jour.

On pose $a_0=b_0=1\,000$ et, pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre de cellules A au bout de n jours et b_n le nombre de cellules B au bout de n jours.

1) Montrez que les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques et précisez leurs raisons.

2) Calculez le nombre de cellules de chaque type au bout de 10 jours.

3) À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer au bout de combien de jours le nombre de cellules A deviendra supérieur au double du nombre de cellules B.

Exercice 12 : On a préparé dans un laboratoire une culture de 1 000 000 de bactéries. Au bout d'une heure, on constate que ce nombre est passé à 5 000 000.

On pose $u_0 = 1\,000\,000$ et on note u_n le nombre de bactéries de la culture au bout de n heures (n entier naturel).

1) On suppose que la croissance de la population de bactéries est linéaire, c'est-à-dire que la suite (u_n) est arithmétique. Quelle est alors la raison de cette suite ? Combien y aura-t-il de bactéries au bout de 10 heures ?

2) On suppose que la croissance de la population de bactéries est exponentielle, c'est-à-dire que la suite (u_n) est géométrique. Quelle est alors la raison de cette suite ? Combien y aura-t-il de bactéries au bout de 10 heures ?

Exercice 13 : Jean et Pierre sont jumeaux. Jean, qui est fumeur, dépense 900 € par an pour l'achat de cigarettes. Le jour de Noël, en 2010, Pierre, qui ne fume pas, s'inquiète pour la santé de son frère, lui conseille d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il arrêtait de fumer. Il lui propose de placer 900 € tous les ans sur un livret rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 3 %, les intérêts acquis étant versés sur le livret le 31 décembre à minuit.

Jean suit ce conseil. Le 31 décembre 2010, il dépose donc 900 € tous les ans sur un livret rémunéré à intérêts composés, les intérêts acquis étant capitalisés le 31 décembre 2011 à minuit, et il s'engage à déposer 900 € sur ce livret tous les ans, le 31 décembre.

1) Quel est le capital disponible sur ce livret :

a) Le 1er janvier 2012 ? b) Le 1er janvier 2013 ?

2) On note : u_0 la somme disponible sur le livret le 1er janvier 2010, u_1 la somme disponible sur le livret le 1er janvier 2011, u_2 la somme disponible sur le livret le 1er janvier 2012 et, plus généralement, u_n la somme disponible sur le livret le 1er janvier de l'année $2010+n$. Montrez qu'on a alors la relation $\boxed{u_{n+1} = 1{,}03\,u_n + 900}$ (1)

3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\boxed{v_n = u_n + 30\,000}$ (2)

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}.

b) Déduisez-en l'expression de v_{n+1} en fonction de u_n en utilisant la relation (1)

c) Exprimez enfin v_{n+1} en fonction de v_n à l'aide de la relation (2)

4) a) Montrez que (v_n) est une suite géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.

b) Déduisez-en une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

5) Pierre affirme qu'en moyenne, un fumeur s'arrête après avoir fumé pendant 30 ans. De quelle somme Jean disposera-t-il le 1er janvier 2041 s'il a arrêté de fumer le 25 décembre 2010 ?

Exercice 14 : Assurance Auto.

Pierre achète sa première voiture et se préoccupe de l'assurer. Il a entendu dire que s'il n'est responsable d'aucun sinistre, sa prime d'assurance diminuera chaque année. Il sait aussi que le pourcentage maximal de réduction est limité à 50 % (on dit que le bonus maximal est de 50%). En conséquence, la prime réduite ne peut être inférieure à la moitié de la prime « plein tarif »

Partie A

Dans un premier temps, Pierre « imagine » qu'à partir d'une prime initiale de 450 €, sa prime pourrait diminuer chaque année de 20 €. Il se sait conducteur prudent et suppose donc qu'il ne sera responsable d'aucun sinistre. Ainsi, $u_0=450$ et $u_1=430$.

1) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison et exprimer u_n en fonction de n .

2) Calculer le nombre d'années qui lui seront nécessaires pour atteindre le bonus maximal, c'est-à-dire pour que sa prime d'assurance soit égale à la moitié de sa prime initiale.

3) À l'aide de la calculatrice ou du tableur, vérifier le résultat de la question 2).

Partie B

Pierre trouve qu'il doit attendre bien longtemps, et pense qu'il se trompe dans son mode de calcul. Il s'adresse alors à son assureur qui lui explique qu'en réalité, s'il n'est responsable d'aucun sinistre, sa prime d'assurance diminuera de 5 % chaque année (on dira que le bonus annuel est de 5%). On note v_n le montant, en euros, de sa prime d'assurance après n années sans sinistre. Ainsi, $v_0=450$.

1) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser sa raison et exprimer v_n en fonction de n .

2) À l'aide de la calculatrice ou du tableur, déterminer le nombre d'années nécessaires à Pierre pour atteindre le bonus maximal.

Exercice 15 : Un objet qui chute à Paris parcourt approximativement 4,9 mètres durant la première seconde. Pendant la deuxième seconde, il parcourt 9,8 m de plus que pendant la première seconde. Pendant la 3ème seconde, il parcourt 9,8 m de plus que pendant la deuxième seconde, etc. À chaque seconde la distance parcourue est supérieure de 9,8 m à celle parcourue pendant la seconde précédente. On note d_1 la distance parcourue pendant la première seconde, d_2 la distance parcourue pendant la $2^{\text{ème}}$ seconde ... d_n la distance parcourue pendant la $n^{\text{ième}}$ seconde.

1) Calculez d_1, d_2 et d_3.

2) Quelle est la nature de la suite (d_n) ?

3) Quelle distance parcourt l'objet pendant la $6^{\text{ème}}$ seconde ?

4) Quelle est la distance totale parcourue pendant ces 6 secondes ?

Exercice 16 : Marché des télécommunications.

Partie A :

Étude d'une suite. On considère une suite (u_n) définie par $u_0=900$ et, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1}=0{,}6\,u_n+200}$ (1).

1) Calculez u_1 et u_2.

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\boxed{v_n=u_n-500}$ (2)

a) Exprimez v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis, en utilisant la relation (1), v_{n+1} en fonction de u_n.

b) Déduisez-en à l'aide de la relation (2) l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.

c) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Donnez son premier terme et sa raison.

d) Exprimez v_n en fonction de n. Déduisez-en que, pour tout entier naturel n, $u_n=400\times 0{,}6^n+500$.

e) Montrez que la suite (u_n) est décroissante.

Partie B :

Dans un pays, deux sociétés A et B se partagent le marché des télécommunications. Les clients souscrivent, le 1er janvier, soit auprès de A, soit auprès de B, un contrat d'un an au terme duquel ils sont libres à nouveau de choisir A ou B.

En 2010, la société A détenait 90 % du marché et la société B, qui venait de se lancer, 10 %.

On prévoit que, chaque année, 20 % de la clientèle de la société A change pour la société B, et, de même, que 20 % de la clientèle de la société B change pour la société A.

On considère une population représentative de 1 000 clients de l'année 2010. Ainsi, 900 clients étaient clients de la société A et 100 étaient clients de la société B. On veut étudier l'évolution de cette population les années suivantes.

1) a) Vérifiez que la société A compte 740 clients en 2011. Calculez le nombre de clients de A en 2012.

b) On note a_n le nombre de clients de la société A en l'année $2010+n$, où n désigne un entier naturel.

Établissez que $a_{n+1}=0{,}8\,a_n+0{,}2(1000-a_n)$. Déduisez-en que $a_{n+1}=0{,}6\,a_n+200$.

c) Exprimez a_n en fonction de n.

2) a) Montrez que : quel que soit l'entier naturel n, $a_n>500$.

b) Montrez que : quel que soit l'entier naturel $n>10$, $a_n<502$.

c) Que peut-on en déduire pour l'évolution du marché des télécommunications dans ce pays ?

Exercice 17 : Malthusianisme. *(On aura besoin de s'aider du tableur ou de la calculatrice)*

En 1800, l'Angleterre comptait 8 millions d'habitants. Malthus (1766-1834) émit alors l'hypothèse suivante :

- La population de l'Angleterre suit une progression géométrique en augmentant de 2 % par an.
- L'agriculture anglaise permet de nourrir 10 millions d'habitants et son amélioration permet de nourrir 500 000 habitants supplémentaires par an suivant une progression arithmétique.

1) Calculez, selon l'hypothèse de Malthus :

a) La population de l'Angleterre en 1900.

b) Le nombre de personnes que pouvait nourrir l'agriculture anglaise en 1900.

2) Déterminez à partir de quelle année, toujours selon l'hypothèse de Malthus, l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population anglaise.

Exercice 18 : Un employé a reçu deux propositions de salaires :

Proposition 1 : un salaire annuel de 20 000 € la 1ère année, puis, chaque année, une augmentation de 800 €.

Proposition 2 : un salaire annuel de 20 000 € la première année, puis chaque année une augmentation de 3,5 %.

On note A_0 le salaire initial de la proposition 1 puis A_1, A_2, … A_n les salaires annuels au bout d'un an, de 2 ans … de n ans de présence. Pour la proposition 2, on note de même G_0, G_1, G_2 … G_n les salaires successifs.

1) a) Comment calcule-t-on A_{n+1} à partir de A_n et G_{n+1} à partir de G_n ?

b) Quelle est la nature de la suite (A_n) ? Et celle de la suite (G_n) ?

2) Calculez les valeurs A_n et G_n pour n variant de 0 à 15, puis la somme $S_A = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{15}$ et la somme $S_2 = G_0 + G_1 + G_2 + \ldots + G_{15}$ sur la même période.

Le plus simple est de le calculer à l'aide d'un tableur (il y a un menu TABLEUR sur la calculatrice). Mais on peut aussi utiliser les formules suivantes que vous verrez en terminale :

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \frac{(1\text{er } terme + dernier\ terme) \times nombre\ de\ termes}{2}$$

Somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q : $S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

3) Expliquez comment cet employé doit choisir entre ces deux propositions.

Exercice 19 : Consommation d'eau et population.

Une agglomération réalise une étude sur la croissance de sa population et celle de sa consommation d'eau.

Partie 1 : Évolution de la population.

Le tableau ci-dessous indique la population de l'agglomération :

Année	2008	2009
Nombre d'habitants	50 000	52 500

1) Montrez par le calcul qu'entre l'année 2008 et l'année 2009, la population a augmenté de 5 %.

2) On note P_0 la population en 2008 et P_1 la population en 2009. En faisant l'hypothèse d'une augmentation annuelle égale à 5 %, calculez la population P_2 en 2010.

3) D'une façon générale, on note P_n la population prévue en $(2008+n)$. On maintient l'hypothèse d'une augmentation annuelle de 5 % et on s'intéresse à la suite (P_n).

a) Précisez la nature et la raison de cette suite.

b) Exprimez P_n en fonction de n.

c) Calculez P_{10}, la population en 2018 (arrondir à l'unité).

Partie 2 : Évolution de la consommation d'eau.

Le tableau ci-dessous indique la consommation moyenne d'eau par habitant, en litres par jour :

Année	2007	2008	2009
Consommation moyenne	295	300	305

1) Montrer que, pendant cette période, la consommation d'eau a une croissance linéaire[1].

2) On se propose de calculer, à l'aide d'un tableur, les quantités d'eau à prévoir, en litres, pour les années à venir.

	A	B	C	D
1	Année	Population	Consommation moyenne par habitants en L/j	Quantité d'eau, en L/j, pour la population totale
2	2008	50000	300	15000000
3	2009	52500	305	
4	2010			
5	2011			
6				
7				

a) Avec l'hypothèse d'une augmentation annuelle de la population de 5 %, quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 afin de compléter la colonne B par recopie automatique vers le bas ?

b) Avec l'hypothèse que, chaque année, la consommation moyenne d'eau par habitant va augmenter de 5 litres par jour, quelle formule peut-on saisir dans la cellule C3 afin de compléter la colonne C par recopie automatique vers le bas ? c) Quelle formule entre-t-on en D2 pour compléter la colonne D par recopie automatique vers le bas ?

3) Calculez la quantité d'eau nécessaire, en litres par jour, en 2015, pour satisfaire aux besoins de la population (arrondir au litre).

1 Cela signifie qu'elle peut être modélisée par une suite arithmétique.

Exercice 20 : Abonnements.

Un journal, vendu exclusivement sur abonnement, comptait 25 000 abonnés au début de l'année 2010. Le service des abonnements estime que, d'une année sur l'autre, d'une part, 80 % des lecteurs renouvellent leur abonnement, et que, d'autre part, il y aura 20 000 nouveaux abonnés.

On note 0 l'année de référence 2010. Les années suivantes sont notées : 1, 2…

1) a) Vérifiez que le nombre estimé d'abonnés en 2011 est de 40 000.

b) Recopiez le tableau ci-dessous et complétez la ligne 2 donnant le nombre d'abonnés.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année n	0	1	2	3	4	5
2	Abonnés	25000	40000				

c) Si l'on utilisait un tableur pour compléter le tableau précédent, quelle formule devrait-on écrire dans la cellule C2 et recopier vers la droite jusqu'en G2 ?

2) On note U_n le nombre estimé d'abonnés durant l'année n.

a) Cette suite (U_n) est-elle arithmétique ? Justifiez votre réponse.

b) Cette suite (U_n) est-elle géométrique ? Justifiez votre réponse.

c) Exprimez U_{n+1} en fonction de U_n.

3) Le directeur souhaite 100 000 abonnés pour rentabiliser son entreprise. Il calcule alors, pour chaque année à venir, la différence V_n entre son objectif 100 000 et le nombre estimé U_n d'abonnés. On a donc $\forall\ n$, $\mathrm{V}_n = 100\,000 - \mathrm{U}_n$.

a) Calculez V_0.

b) Dans la cellule B3, quelle formule doit-on écrire, puis recopier vers la droite dans le tableau ci-dessous, pour compléter la ligne 3 ?

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année n	0	1	2	3	4	5
2	Abonnés	25000	40000				
3	Vn	75000					
4	V_n/V_{n-1}						

c) Complétez la ligne 3 du tableau ci-dessus.

4) Dans cette question, on étudie la nature de la suite (V_n).

a) Complétez la ligne 4 du tableau précédent.

b) Que peut-on conjecturer pour la suite (V_n) ?

c) En admettant que cette conjecture est vérifiée, montrez que $\mathrm{V}_n = 75\,000 \times 0{,}8^n$.

d) Démontrez la conjecture, à savoir que, pour tout entier n, $\mathrm{V}_{n+1} = 0{,}8\,\mathrm{V}_n$

5) a) Déduisez-en U_n en fonction de n.

b) Combien d'abonnés peut-on estimer en 2020 ?