

1ère S - Chapitre 5 - Dérivation

Synthèse de Cours

I- Nombre dérivé, tangente à une courbe en un point.

1) Taux d'accroissement

Définition 1 : Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient deux nombres a et b appartenant à I .

Le **taux d'accroissement** de f entre a et b est le nombre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il s'agit du coefficient directeur de la droite (AB), où A et B sont les points de la courbe représentative de f d'abscisses a et b .

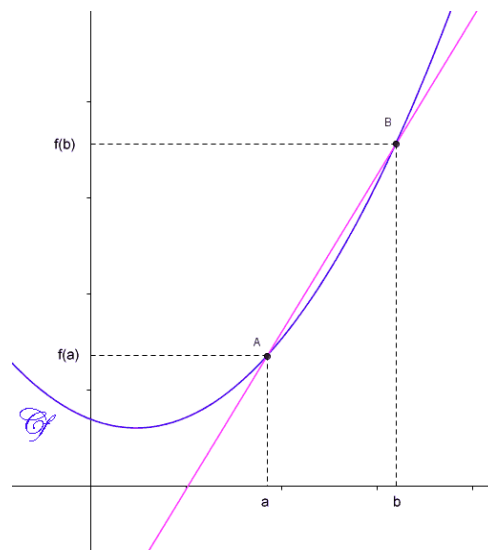
Exemple : si $f(x) = x^2$, si $a = 2$ et $b = 3$

On a $f(a) = f(2) = 2^2 = 4$ et $f(b) = f(3) = 3^2 = 9$

Donc $A(2;4)$ et $B(3;9)$.

Le taux d'accroissement de f entre A et B est $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

c'est-à-dire $\frac{9 - 4}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5$. C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AB)



2) Nombre dérivé, tangente à la courbe en un point.

Définition 1' : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un nombre fixé dans I . Soit h un nombre tel que $a + h \in I$. Le **taux d'accroissement de f entre a et $a + h$** est donc le nombre

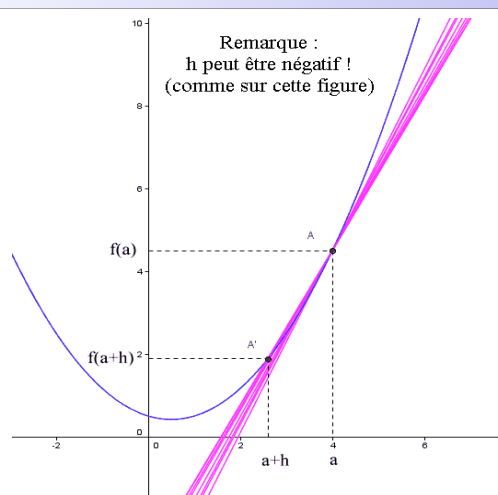
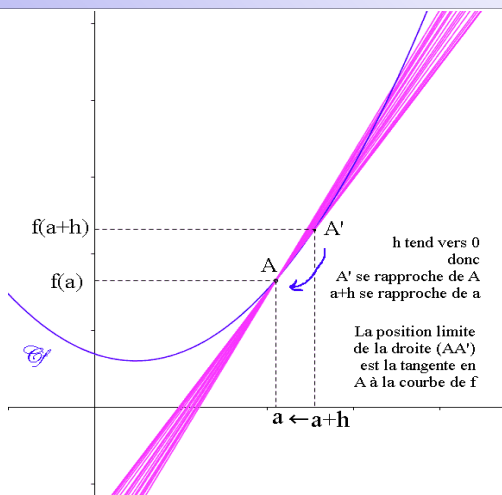
$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition 2 : Si, lorsque h devient aussi proche que l'on veut de 0, $t(h)$ devient aussi proche que l'on veut d'un nombre réel fixe, on dit que **la fonction f est dérivable en a** .

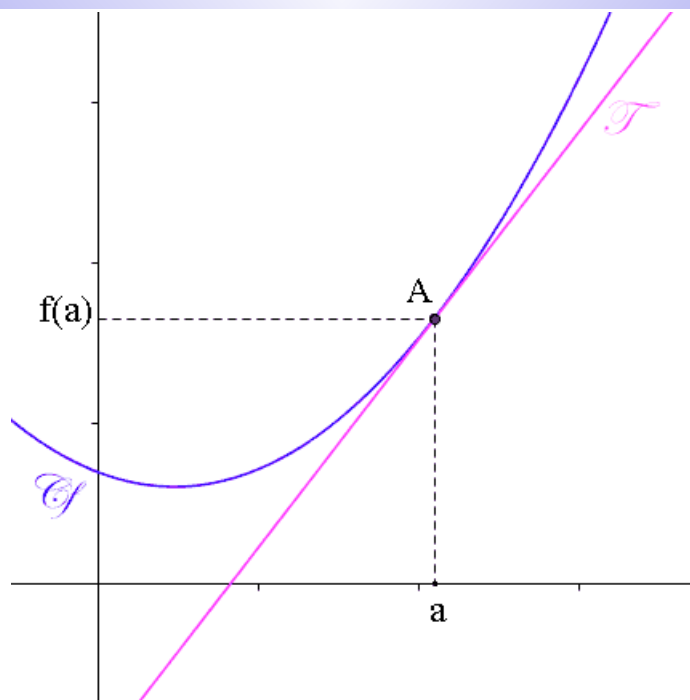
On appelle ce **nombre le nombre dérivé de f en a** , et on le note $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(le nombre dérivé est la limite du taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ lorsque h tend vers 0)



Définition 3 : Si on nomme A et A' les points de la courbe de coordonnées respectives a et $a+h$, lorsque h se rapproche de 0 , la droite (AA') se rapproche de la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$, que l'on appelle **la tangente à la courbe représentative de f en A** .



Propriété 1 : La tangente $\mathcal{T}$ en A à la courbe représentative de f a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemple : si M_0 a pour coordonnées $(3;2)$ et si $f'(3) = 0,7$, une équation de $\mathcal{T}$ est $y = 0,7(x - 3) + 2$ soit $y = 0,7x + 0,1$

Remarque : on retombe sur une équation réduite de droite de la forme $y = mx + p$.

Retenir : le nombre dérivé de f en a , c'est à dire $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente en $A(a, f(a))$ à la courbe représentative de f .

II- Fonctions dérivées.

1. Dérivée d'une fonction sur un intervalle.

Définition 4 : On dit qu'une **fonction** est **dérivable sur un intervalle I** si et seulement si elle est dérivable en tout nombre x appartenant à I .

La fonction qui, à tout réel x de I associe le nombre $f'(x)$, nombre dérivé de f en x , est appelée **fonction dérivée de f** . On la note f' . $f' : x \mapsto f'(x)$

Remarque : la notion de dérivabilité d'une fonction n'est définie que sur un intervalle¹. Par exemple, on ne peut pas dire qu'une fonction est dérivable sur un ensemble qui n'est pas un intervalle.

2. Dérivées des fonctions usuelles (à savoir par ♥)

¹ Exemples d'intervalles de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$, $[2; 5[$, $] -12; +\infty[$, $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ (ce sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ « en un seul morceau », sans « trou »)

Exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des intervalles : $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, ou tout ce qui peut s'écrire sous la forme de réunion de deux intervalles disjoints, en particulier tous les ensembles de la forme $\mathbb{R} - \{a\}$ où a est un réel quelconque.

$f(x)$		$f'(x)$	
Constante k	Sur $\mathbb{R}$	0	Sur $\mathbb{R}$
x	Sur $\mathbb{R}$	1	Sur $\mathbb{R}$
x^2	Sur $\mathbb{R}$	2x	Sur $\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	Sur $\mathbb{R}$	nx^{n-1}	Sur $\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	Sur $\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	Sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	Sur $] 0; +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	Sur $] 0; +\infty[$  la fonction racine carrée est définie en 0 n'est pas dérivable en 0

3) Opérations sur les dérivées. (à savoir par ♥)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I. Alors :

La dérivée sur I de :	Est :
$u + v$	$u' + v'$
λu (où λ est un réel constant)	$\lambda u'$
$u \times v$	$u'v + v'u$
$\frac{1}{v}$ ( , v ne doit pas s'annuler sur I)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ ( , v ne doit pas s'annuler sur I)	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

III- Dérivation et étude de fonctions.

1) Signe de la dérivée et sens de variations.

Théorème 1 (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Affinage de ce théorème : Si $f'(x)$ ne s'annule qu'en des valeurs isolées de I, dans les deux premiers cas, f reste strictement croissante ou strictement décroissante.

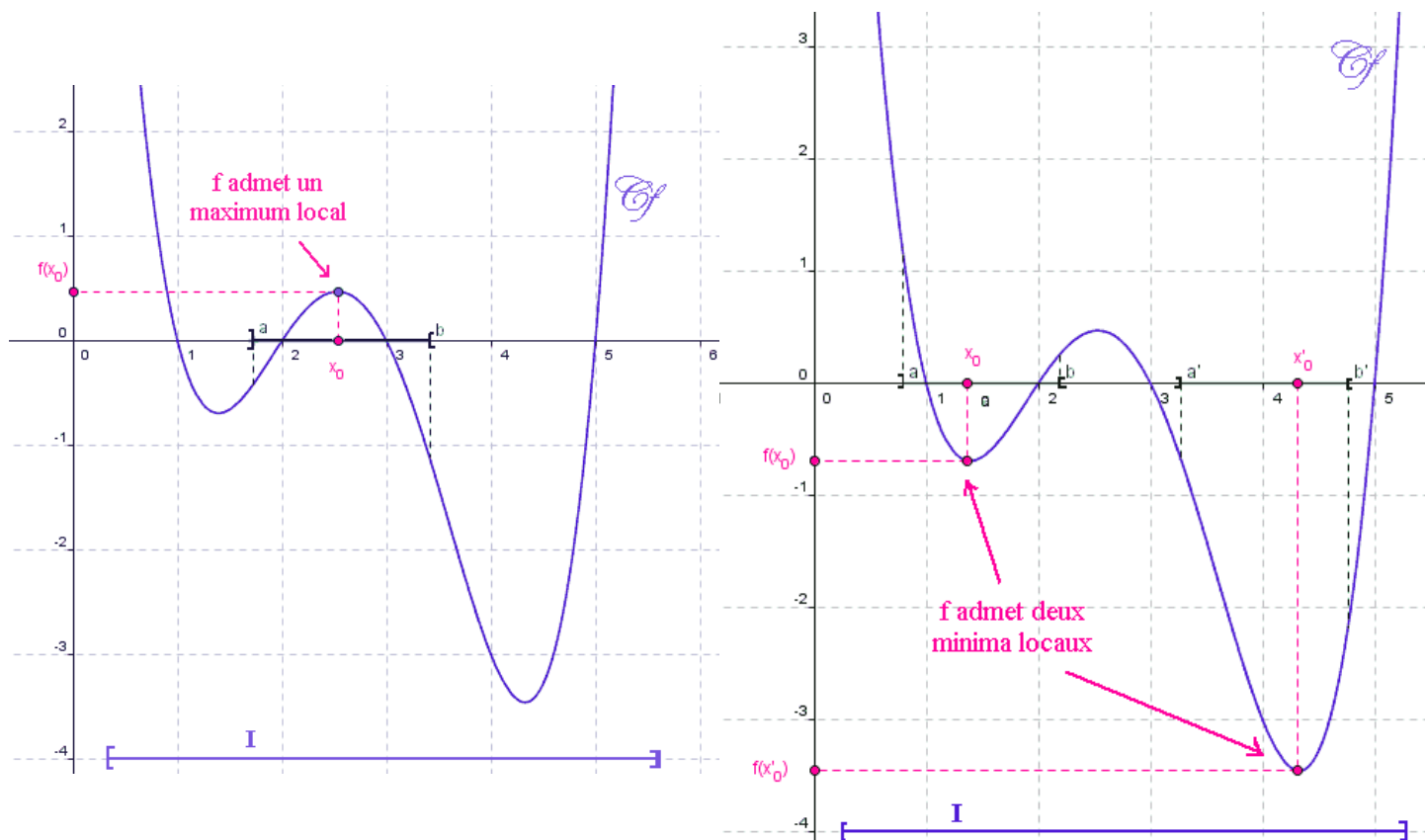
2) Extremum local.

Définition 5 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $]a; b[$ inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout $x \in I$ différent de x_0 , $f(x) \leq f(x_0)$

Un **extremum local** est un maximum local ou un minimum local.

Dans cette leçon, les extrema locaux qui vont nous intéresser surtout sont ceux où la fonction f est dérivable et où l'extremum local est strict (c'est-à-dire que x_0 est la seule valeur de l'intervalle $]a; b[$ pour laquelle on ait $f(x) = f(x_0)$)



Théorème 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
- Si en x_0 , la dérivée s'annule et change de signe, alors f admet un extremum local en x_0 .

3) Exemple d'étude de fonction.

Dans une étude de fonction, la démarche habituelle est de déterminer son ensemble de définition, les intervalles sur lesquels elle est dérivable, de calculer sa dérivée, d'étudier le signe de cette dérivée dans un tableau de signes, que l'on prolonge par le tableau de variations de la fonction dans lequel on précise les extrema.

En terminale, il faudra aussi préciser les limites de la fonction aux bornes des intervalles sur lesquels on l'étudie.

Ensuite, on peut faire un tableau de valeurs puis tracer la courbe en précisant les extrema, les tangentes horizontales, les asymptotes (voir en terminale).

Exemple : étudions la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x+1}$.

- **Ensemble de définition :** Il y a une valeur interdite : $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.
 f est donc définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$
- **Intervalles de dérivation :** La formule de la fonction f comprend un dénominateur polynomial et pas de racine carrée (état actuel de nos connaissances). Elle est donc dérivable sur tous les intervalles où $x+1$ ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$
- **Calcul de la dérivée :** On pose x appartenant à un des deux intervalles ci-dessus.
$$f(x) = 2x + 1 + 2 \times \frac{1}{x+1}$$

On pose $v(x)=x+1$. On a donc $v'(x)=1$.

Comme $f(x)=2x+1+2\times\frac{1}{v(x)}$, on a $f'(x)=2+2\times\left(-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\right)=2-2\times\frac{1}{(x+1)^2}=2-\frac{2}{(x+1)^2}$.

- Étude du signe de la dérivée : il est souvent nécessaire de factoriser la formule de la dérivée ou de procéder à une réduction au même dénominateur.

$$f'(x)=\frac{2(x+1)^2-2}{(x+1)^2}=\frac{2(x^2+2x+1)-2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+4x+2-2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$			
$2x$		$-$	$-$	$-$	0	$+$		
$x+2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$(x+1)^2$		$+$	$+$	0	$+$	$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$
f								

<

- Calcul des extrema à indiquer dans le tableau :

$$\text{Maximum local : } f(-2)=2\times(-2)+1+\frac{2}{-2+1}=-4+1+\frac{2}{-1}=-3-2=-5$$

$$\text{Minimum local : } f(0)=2\times 0+1+\frac{2}{0+1}=1+2=3$$

- Tableau de valeurs (approchées) : (à répartir judicieusement pour obtenir une allure fidèle de la courbe)

x	-8	-6	-4	-3	-2	-1,5	-0,5	0	1	2	3	5
$f(x)$	-15,3	-11,4	-7,7	-6	-5	-6	4	3	4	5,7	7,5	11,3

- Tracé de la courbe à partir des points du tableau et placement des tangentes horizontales.

