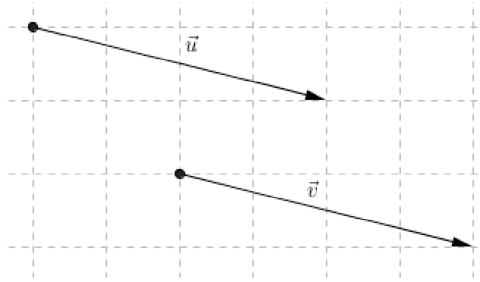
1e S – Chapitre 3 – Généralités sur les vecteurs (synthèse de cours)

I- Vecteurs égaux.

Définition : Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont :

- Même direction (= lorsque leurs supports sont parallèles)
- Même sens (= lorsque les flèches sont dans le même sens)
- Même norme (= même longueur)

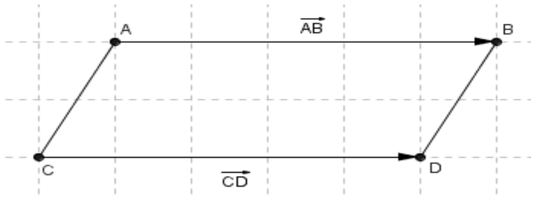


$\vec{u}=\vec{v}$

Remarque : la norme d'un vecteur $\vec{u}$ se note $\|\vec{u}\|$.
Dans le cas d'un vecteur défini par deux points, on remarque que $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$.

Propriété caractéristique : *(Caractérisation d'une égalité vectorielle par un parallélogramme)*

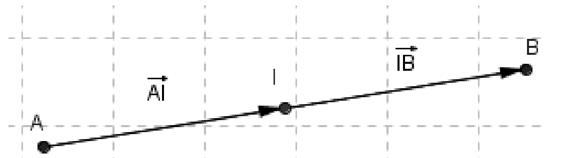
Soient A, B, C, D, 4 points du plan.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ⇔ ABDC est un parallélogramme. *(éventuellement aplati)*



(Prendre garde à l'ordre des points)

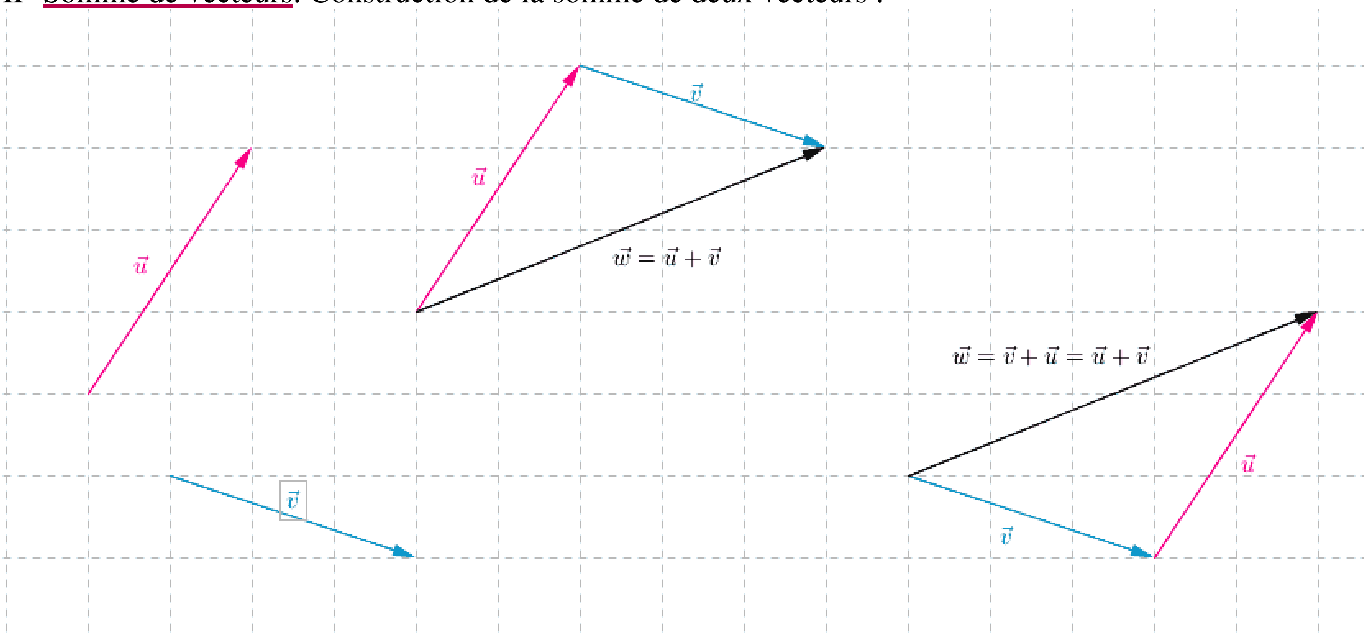
Propriété : *(Caractérisation du milieu d'un segment par l'égalité de deux vecteurs)*

Soient A, I, B trois points du plan.
I est le milieu de [AB] ⇔ $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$



(L'extrémité de l'un des deux vecteurs égaux est l'origine de l'autre)

II- Somme de vecteurs. Construction de la somme de deux vecteurs :



Pour construire la somme de deux vecteurs, on place l'origine du second à l'extrémité du premier, le vecteur somme est alors celui qui a pour origine l'origine du premier et pour extrémité l'extrémité du second (peu importe lequel on choisit comme premier et lequel on choisit comme second),

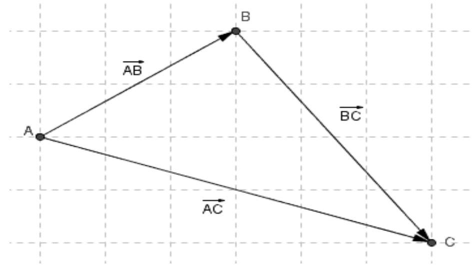
Propriétés de la somme de deux vecteurs :
$\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (commutativité)
$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativité)

Commutativité de la somme vectorielle : on peut additionner deux vecteurs dans l'ordre qu'on veut, le vecteur somme est le même.

Associativité : pour additionner 3 vecteurs, on peut faire les regroupements que l'on veut, par exemple additionner les deux premiers, puis ajouter le troisième, ou additionner le second et le troisième, puis les additionner au premier. Mais cette propriété peut s'étendre à un plus grand nombre de vecteurs dans une même somme.

Relation de Chasles : Pour tous points A, B, C du plan, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

« On peut se rendre de A à C en faisant étape par B. »

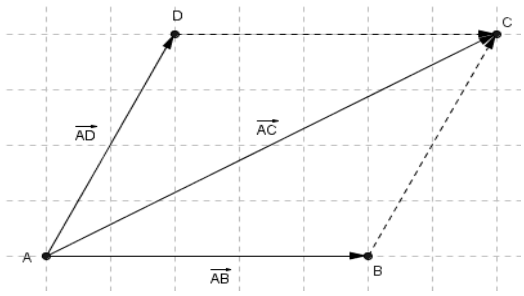


Vecteur nul : Pour tout point M du plan, on appelle vecteur nul et on note $\vec{0}$ le vecteur $\overrightarrow{MM}$, de norme nulle, qui n'a ni direction ni sens.

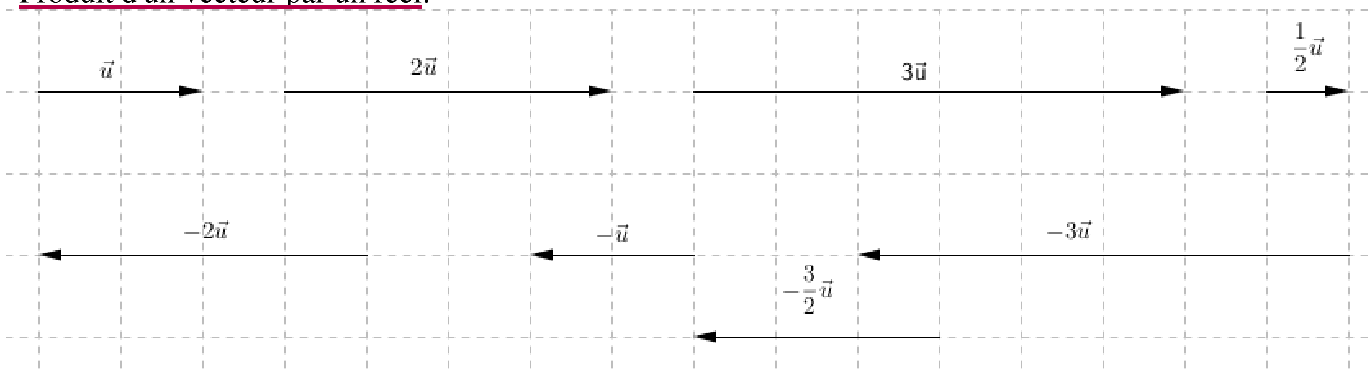
Ainsi on a, par exemple, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Propriété : (Caractérisation du parallélogramme par la somme de deux vecteurs)

ABCD est un parallélogramme ⇔ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$



III- Produit d'un vecteur par un réel.



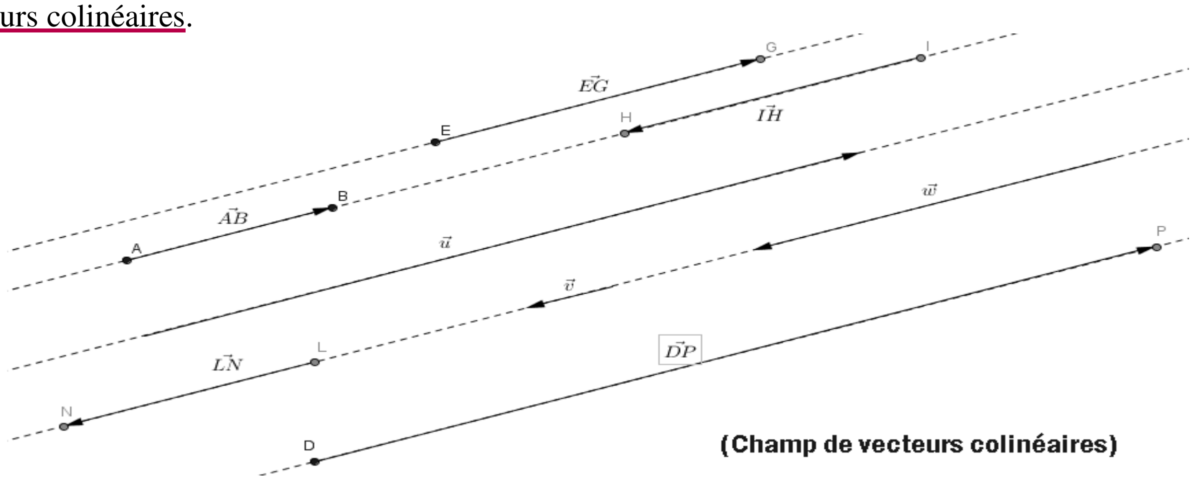
Définition : Soit k un réel et $\vec{u}$ un vecteur non nuls. Le vecteur k $\vec{u}$ est le vecteur :

- Qui a même direction que $\vec{u}$
- Qui a même sens que $\vec{u}$ si k>0 ou qui est de sens contraire si k<0
- Dont la norme est égale à $|k|\|\vec{u}\|$ (Rappel : $|k|$ est la valeur absolue de k, cf. Chapitre 2)

Remarques : $\vec{u}+\vec{u}=2\vec{u}$. $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}=3\vec{u}$.
$\vec{u}$ et son opposé $-\vec{u}$ ont même direction et même norme, mais sont de sens contraires.

Convention : si k=0 ou si $\vec{u}=\vec{0}$, alors k $\vec{u}=\vec{0}$

IV- Vecteurs colinéaires.



(Champ de vecteurs colinéaires)

Définition : des vecteurs non nuls sont colinéaires quand ils ont la même direction. (= leurs supports sont parallèles).

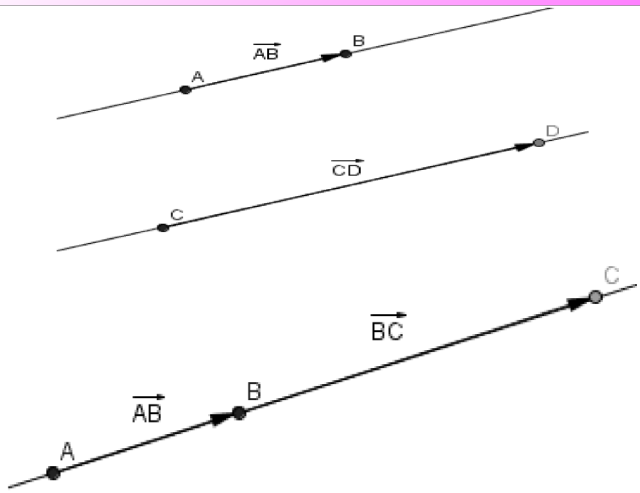
Convention : $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Propriété caractéristique (colinéarité de deux vecteurs non nuls) : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Propriété caractéristique (colinéarité de deux vecteurs en général) : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Propriété : *(Caractérisation du parallélisme par la colinéarité)*
Soient A, B, C et D, 4 points tels que A≠B et C≠D
(AB)//(CD) ⇔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété : *(Caractérisation d'un alignement par la colinéarité)*
Trois points A, B, C sont alignés ⇔
les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires.*



Remarques : il faut un point commun aux deux vecteurs !

L'ordre d'alignement est alors en rapport avec les sens relatifs des deux vecteurs.

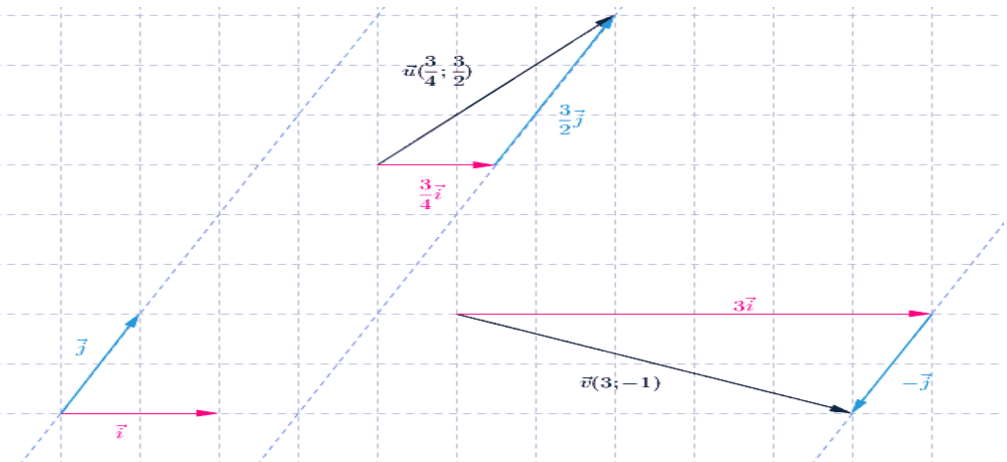
V- Base du plan.

Théorème-définition : Deux vecteurs non colinéaires, $\vec{i}$ et $\vec{j}$, donnés dans un ordre précis : ($\vec{i}$, $\vec{j}$), forment une base du plan, c'est à dire que tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, où x et y sont deux réels appelés les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

La première coordonnée (= le coefficient appliqué au premier vecteur de la base) s'appelle l'abscisse.

La seconde s'appelle l'ordonnée. On notre $\vec{u}$ (x,y) ou $\vec{u}$ (x;y) ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Une base est orthogonale lorsque $\vec{i} \perp \vec{j}$ (c-à-d : les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont perpendiculaires)
Une base est orthonormale ou orthonormée lorsque $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$



Exemple dans une base quelconque (c'est-à-dire non orthogonale et non orthonormale) : Pour déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$), on les décompose suivant la direction de $\vec{i}$ (ici : horizontale) et suivant celle de $\vec{j}$.

Propriété : *(Coordonnées d'une somme de vecteurs et du produit d'un vecteur par un réel)*
Si, dans une base donnée, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors : $\vec{u}+\vec{v}\ \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ pour tout k ∈ ℝ.

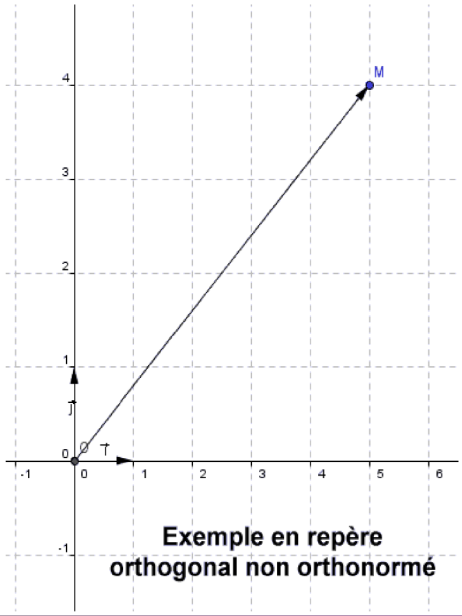
Propriété : *(Détermination de la colinéarité de deux vecteurs à l'aide de leurs coordonnées)*
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Pour tester cette proportionnalité, il est d'usage de calculer le déterminant formé par les coordonnées des deux vecteurs : Supposons $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On calcule $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront colinéaires si et seulement si ce déterminant vaut 0.
(première diagonale – deuxième diagonale)

VI- Repère du plan.

Théorème-définition :
Si, à une base du plan ($\vec{i}, \vec{j}$), on attribue un point fixe O de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par convention, on obtient un repère du plan, (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) dont O est l'origine. Alors, pour tout point M du plan, il existe un couple de réels $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. x et y sont les coordonnées du point M dans le repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$)



Exemple en repère orthogonal non orthonormé

On rappelle deux propriétés vraies dans tout repère :
Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix}$ Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Remarque : Pour calculer les coordonnées du milieu d'un segment, on fait la moyenne des coordonnées de ses extrémités.

Pour calculer les coordonnées d'un vecteur, on fait :
« coordonnées de l'arrivée – coordonnées du départ » ce qui donne le bilan du déplacement.

Quant à la formule suivante, elle n'est valable qu'en repère orthonormé (comme toutes les propriétés où interviennent longueurs et mesures d'angles) :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Elle est issue du théorème de Pythagore.