

fonctions trinômes - mon résumé 1

1.5 - FONCTIONS TRINÔMES

On appelle **fonction trinôme** ou **fonction polynôme de degré 2** toute fonction qui a x associe $ax^2 + bx + c$

a, b et c sont des constantes, des réels fixes

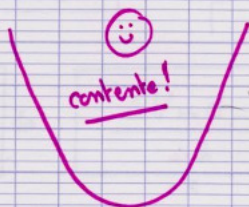
a est un réel non nul
b et c sont des réels

$$f: x \mapsto ax^2 + bx + c$$

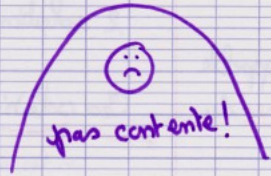
lire: "f est la fonction qui, à x, associe $ax^2 + bx + c$ "

exemples:
 $x \mapsto -2x^2 + 3x - 4$
 $x \mapsto x^2 + 3$
(ici: $a=1, b=0, c=3$)

La courbe représentative d'une fonction trinôme est une parabole



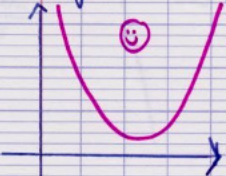
si $a > 0$ elle "sourit"



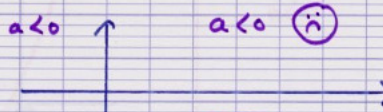
si $a < 0$, elle fait la tronche

Cette parabole peut soit:

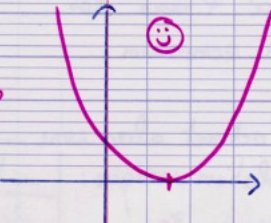
$a > 0$



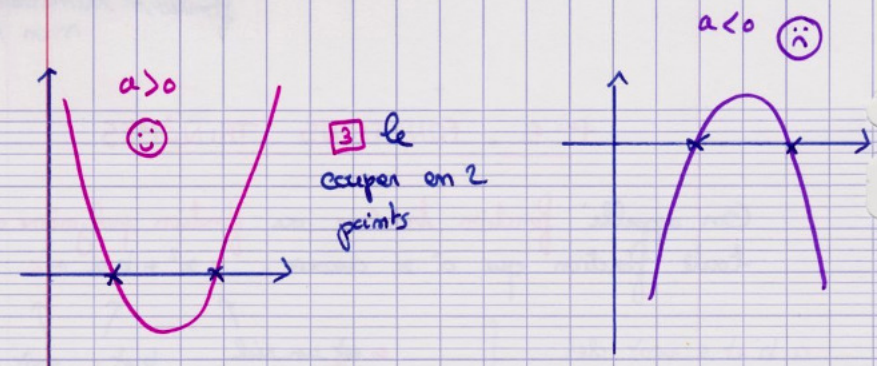
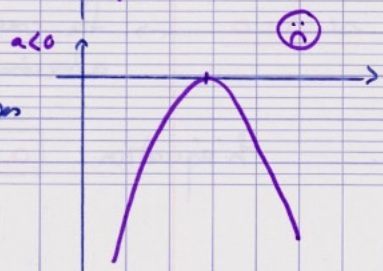
1 ne pas couper l'axe des abscisses



$a > 0$



2 Toucher l'axe des abscisses en 1 point



3 le couper en 2 points

Pour savoir dans lequel de ces 3 cas on se trouve, on calcule le **discriminant**: $\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta > 0$ la courbe coupe l'axe des abscisses en 2 points.

Cela veut dire que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a 2 solutions.

On les appelle les **racines** du trinôme

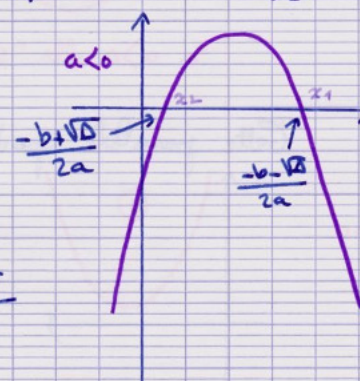
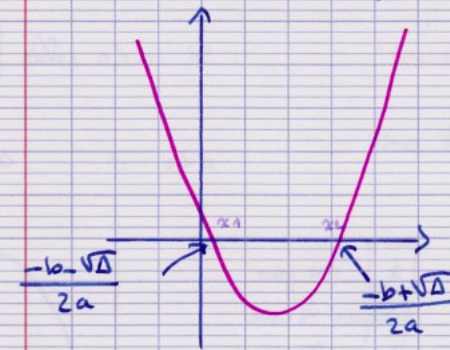
Ces solutions sont:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

on les appelle souvent

$a > 0$

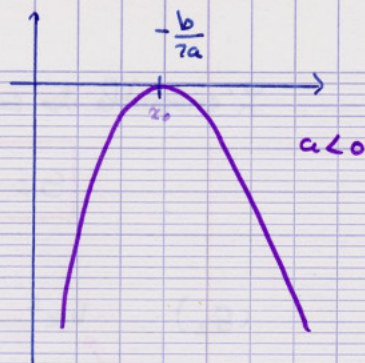
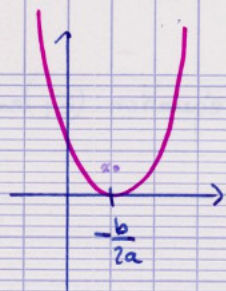


si $\Delta = 0$ la courbe est tangente à l'axe des abscisses. Ils ont 1 point commun.

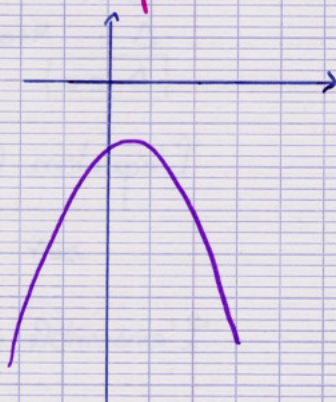
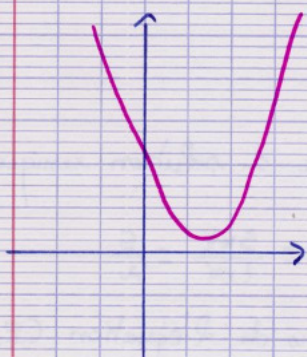
l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet alors une solution unique: $x_0 = \frac{-b}{2a}$
souvent appelée x_0

fonctions trinôme - Mon résumé 2

a) > 0



si $\Delta < 0$ la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.
l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a donc pas de solution.



Exemples. Résolvons les équations :

$$(E_1) \quad 3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 2$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$\Delta > 0$, donc l'équation admet 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 3}$$

$$\text{soit } x_1 = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times 3}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est

$$S = \left\{ -1; -\frac{2}{3} \right\}$$

$$(E_2) \quad 4x^2 - 20x + 25 = 0$$

$a=4$ $b=-20$ $c=25$

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 4 \times 25$$

$$\Delta = 400 - 400$$

$$\Delta = 0$$

L'équation (E_2) a donc 1 solution unique : $x_0 = \frac{-(-20)}{2 \times 4}$

$$\text{soit } x_0 = \frac{20}{8} = \frac{5 \times 4}{2 \times 4} = \frac{5}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est $S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

Remarque : le cas $\Delta = 0$, c'est quand $ax^2 + bx + c$ est une identité remarquable !

$$\text{ici : } 4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \times 2 \times 5x + 5^2 = (2x - 5)^2$$

$$\text{et on a bien } (2x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$(E_3) \quad 2x^2 - x + 7 = 0$$

$a=2$ $b=-1$ $c=7$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 7$$

$$\Delta = 1 - 56$$

$$\Delta = -55$$

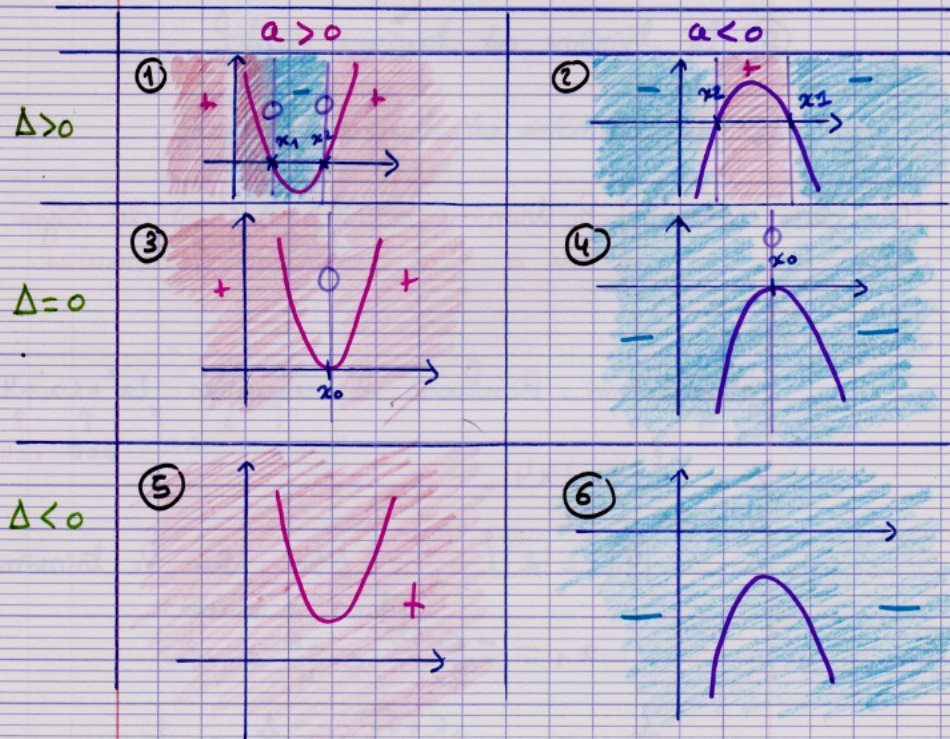
$\Delta < 0$ donc (E_3) n'a pas de solution.

SIGNE DU TRINÔME ?

-> Et maintenant, apprenons à résoudre les inéquations

$$ax^2 + bx + c \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} 0$$

On a 6 cas possibles:



- ① Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est :
- * positif si $x < x_1$ ou si $x > x_2$
 - * nul si $x = x_1$ ou $x = x_2$
 - * négatif si $x_1 < x < x_2$

- ② Le trinôme est :
- * négatif si $x < x_2$ ou si $x > x_1$
 - * nul si $x = x_1$ ou $x = x_2$
 - * positif si $x_2 < x < x_1$

- ③ Le trinôme est : *
- * nul si $x = x_0$
 - * positif dans les autres cas

- ④ Le trinôme est : *
- * nul si $x = x_0$
 - * négatif dans les autres cas

- ⑤ Le trinôme est toujours positif

- ⑥ Le trinôme est toujours négatif.

On peut retenir : Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a "à l'extérieur" des racines.

Application : Résolvons l'inéquation $2x^2 + 6x + 4 \geq 0$

$a=2 \quad b=6 \quad c=4$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 4$$

$$\Delta = 36 - 32$$

$$\Delta = 4 = 2^2$$

$\Delta > 0$ donc le trinôme admet 2 racines :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{4}}{2 \times 2} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-6 + \sqrt{4}}{2 \times 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

Le tableau de signes du trinôme est donc :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x^2 + 6x + 4$	+	0	-	0	+

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines

$$\text{Donc } S =]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$$

Comme l'inéquation est $2x^2 + 6x + 4 \geq 0$, les solutions sont les valeurs de x pour lesquelles le trinôme est positif ou nul.