$1^{\text{ère}}$ S – Corrigé du devoir Maison à rendre pour le 12 octobre 2012

Exercice 1 : 1) a) On répète 20 fois la même expérience, dans les mêmes conditions, qui est une expérience de Bernoulli puisqu'il y a à chaque fois (car il y a remise) 40 % de chances d'obtenir une pièce « face étrangère » . On est dans le cadre d'un schéma de Bernoulli de paramètres 20 et 0,4.

X, variable aléatoire dénombrant le nombre de « succès » sur les 20 expériences, suit donc une loi binomiale de paramètres 20 et 0,4.

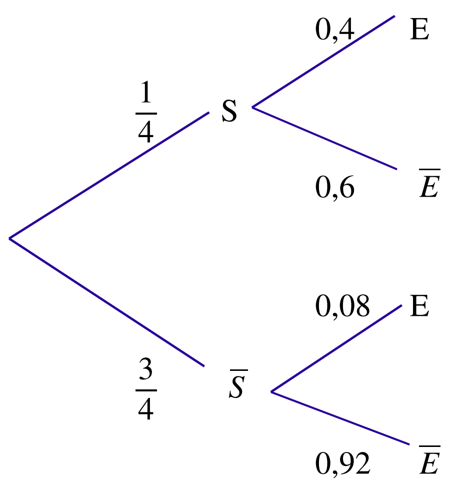
b) $P(X=5)=\binom{20}{5}\times 0{,}4^5\times 0{,}6^{15}$ $\quad P(X=5)=15504\times 0{,}4^5\times 0{,}6^{15}$ $\quad \boxed{P(X=5)\approx 0{,}075}$

c) On veut calculer $P(X\geqslant 2)$. L'événement contraire de $X\geqslant 2$ est $X\leqslant 1$.
Or $P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)$, donc $P(X\geqslant 2)=1-(P(X=0)+P(X=1))$

$P(X=0)=0{,}6^{20}$ (Probabilité d'obtenir 20 « échecs »)
$P(X=1)=20\times 0{,}4^1\times 0{,}6^{19}$ (Car 20 chemins mènent à 1 seul « succès »)

Donc $P(X\geqslant 2)=1-(0{,}6^{20}+20\times 0{,}4\times 0{,}6^{19})$ $\quad P(X\geqslant 2)\approx 0{,}99947$ $\quad \boxed{P(X\geqslant 2)\approx 0{,}999}$

2)



$\boxed{P(S\cap E)=\frac{1}{4}\times 0{,}4=0{,}1}$

$P(S\cap\overline{E})=\frac{1}{4}\times 0{,}6=0{,}15$

$\boxed{P(\overline{S}\cap E)=\frac{3}{4}\times 0{,}08=0{,}06}$

$P(\overline{S}\cap\overline{E})=\frac{3}{4}\times 0{,}92=0{,}69$

Justification des coefficients $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$: « La caisse journaux contient 3 fois plus de pièces de 1 € que la caisse souvenirs ». Donc si x est le nombre de pièces de 1 € dans la caisse « souvenirs », $3x$ est le nombre de pièces de 1 € dans la caisse « journaux ». Ainsi, en tout, il y a $4x$ pièces de 1 €, ce qui donne un proportion de $\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$ dans la caisse « souvenirs » et $\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$ dans la caisse « journaux ».

Les autres coefficients sur les branches de l'arbre sont les pourcentages de pièces étrangères de chaque catégorie donnés par l'énoncé.

La formule de probabilités totales relative à la partition S/ $\overline{S}$ nous donne la probabilité de E :
$P(E)=P(E\cap S)+P(E\cap\overline{S})$ $\quad P(E)=0{,}1+0{,}06$ $\quad \boxed{P(E)=0{,}16}$

3) Soit Y la variable aléatoire qui dénombre les pièces de 1 € « face étrangères » obtenues en n tirages.
$P(Y=0)=(1-0{,}16)^n=0{,}84^n$
$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)$ $\quad \boxed{P(Y\geqslant 1)=1-0{,}84^n}$

On cherche n tel que $P(Y\geqslant 1)\geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow 1-0{,}84^n\geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow -0{,}84^n\geqslant -0{,}1 \Leftrightarrow \boxed{0{,}84^n\leqslant 0{,}1}$

D'après un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice, on trouve $n \geqslant 14$.

Un calcul plus poussé est possible si on connaît les exponentielles et les logarithmes :

$0{,}84^n \leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow e^{n \times \ln(0{,}84)} \leqslant 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad n \times \ln(0{,}84) \leqslant \ln(0{,}1) \qquad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}84)}$ car ln(0,84)<0

$\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}84)} \approx 13{,}2$ donc on trouve bien $n \geqslant 14$.

Pour que la probabilité de tirer au moins une pièce « face étrangère » soit supérieure ou égale à 0,9, il faut procéder à au moins $\boxed{14}$ tirages.

Exercice 2 : 1) Dans l'algorithme, I est un compteur qui compte de 1 à 9, car on va répéter 9 fois une même expérience.

A est une mémoire qui reçoit à chaque itération de l'expérience un nombre aléatoire entier compris entre 1 et 7 (on suppose que les 7 résultats possibles sont équiprobables)

C est une variable qui stocke le nombre de fois où, sur 9 tirages, on a obtenu un nombre strictement supérieur à 5. (C est initialisé à 0, augmente de 1 à chaque fois que A est strictement supérieur à 5, et reste à la même valeur si ce n'est pas le cas)

L'algorithme modélise donc 9 tirages d'un nombre aléatoire compris entre 1 et 7.

À chaque tirage, on a une probabilité de $\dfrac{2}{7}$ d'obtenir ce qu'on appellera un « succès », un nombre strictement supérieur à 5, et une probabilité de $\dfrac{5}{7}$ d'obtenir un « échec », soit un nombre inférieur ou égal à 5.

Chaque tirage est une expérience de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{7}$.

On la répète 9 fois, donc on construit un schéma de Bernoulli de paramètres 9 et $\dfrac{2}{7}$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on obtient un nombre strictement supérieur à 5 sur le 9 expériences. X est le nombre final obtenu dans la mémoire C.

X suit une loi binomiale de paramètres 9 et $\dfrac{2}{7}$.

2) Pour que X suive une loi binomiale de paramètres 10 et 0,2, on change :

a) Le nombre d'itérations, qui doit être de 10, donc ***« Pour I allant de 1 à 10 »*** au lieu de « Pour I allant de 1 à 9 »

b) On change la plage dans laquelle on tire un entier au hasard ainsi que la condition de « succès » pour que la probabilité d'obtenir un « succès » à chaque tirage soit de 0,2.

Comme $0{,}2 = \dfrac{1}{5}$, on peut changer :

« A prend la valeur d'un nombre entier entre 1 et 5 » et ***« Si A>4, alors C+1→C »***, mais il y a beaucoup d'autres possibilités. (Par exemple, A peut être un entier entre 11 et 20 et Si A<13, alors C+1→ C)