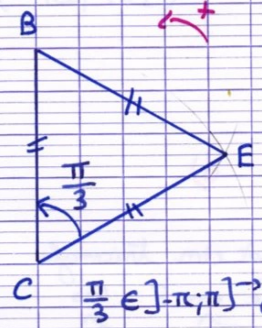
1ère S. Corrigé de l'interro blanche de trigonométrie du mercredi 16 janvier 2019

Exercice 1. 1) a) BCE est un triangle équilatéral direct.



Les angles d'un triangle équilatéral font 60°.

$\boxed{(\vec{CE};\vec{CB}) = \frac{\pi}{3}}$ [2π] puisque c'est un angle positif.

$\frac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$ → c'est bien la mesure principale

b) ABCD a ses côtés opposés de même longueur et c'est un quadrilatère convexe → c'est donc un parallélogramme.

Ce parallélogramme a un angle droit → c'est donc un rectangle. Donc ses 4 angles sont droits.

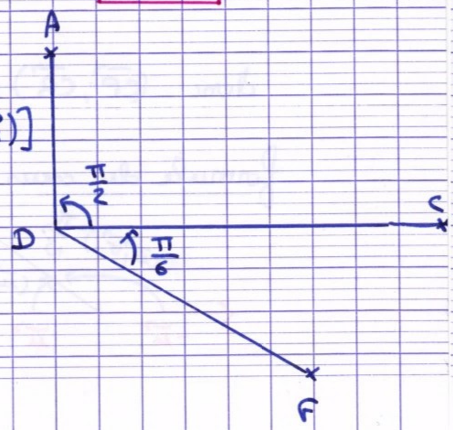
$\boxed{(\vec{BC};\vec{BA})}$ est un angle droit indirect.

Sa mesure principale est donc $\boxed{-\frac{\pi}{2}}$ $\in]-\pi;\pi]$ → OK

c) $(\vec{DA};\vec{DF}) = -(\vec{DF};\vec{DA})$

$= -[(\vec{DF};\vec{DC}) + (\vec{DC};\vec{DA})]$

d'après la relation de Chasles



$(\vec{DA};\vec{DF}) = -\left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right]$

$= -\left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi \times 3}{2 \times 3}\right]$

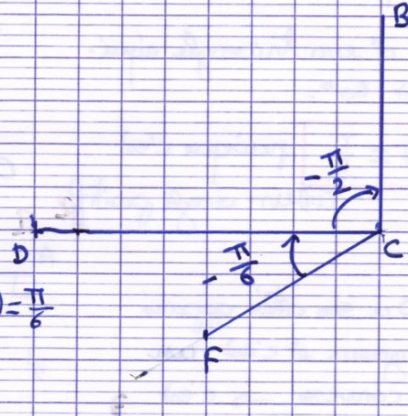
$= -\left[\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}\right]$

$(\vec{DA};\vec{DF}) = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{\cancel{2} \times 2 \times \pi}{\cancel{2} \times 3}$

$\boxed{(\vec{DA};\vec{DF}) = -\frac{2\pi}{3} \; [2\pi]}$

$-\frac{2\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$ → C'est bien la mesure principale.

d)



⚠ à ce stade de l'exercice, on ne sait pas si E est sur la droite (FC) ou non.

FCD est un triangle isocèle en F : les angles $\widehat{FDC}$ et $\widehat{FCD}$ sont donc égaux.

$\widehat{FDC} = 30°$ car $(\vec{DF};\vec{DC}) = \frac{\pi}{6}$ par hypothèse.

Donc $\widehat{FCD} = 30°$ aussi.

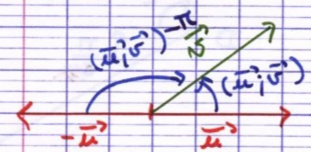
$(\vec{CF};\vec{CD}) = -\frac{\pi}{6}$ car on est dans le sens indirect.

$(\vec{CF};\vec{CB}) = (\vec{CF};\vec{CD}) + (\vec{CD};\vec{CB})$ d'après la relation de Chasles.

$(\vec{CF};\vec{CB}) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$ puisque ABCD est un rectangle et donc $(\vec{CD};\vec{CB})$ un angle droit, lu ici dans le sens indirect.

donc $(\vec{CF};\vec{CB}) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi \times 3}{2 \times 3} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$ [2π]

formule du cours : $(-\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) - \pi$



$(\vec{FC};\vec{CB}) = (\vec{CF};\vec{CB}) - \pi$

$= \left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \pi$

$= -\frac{3\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$

→ Ce n'est pas la mesure principale !

$-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = -\frac{5\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = +\frac{\pi}{3}$

La mesure principale de $(\overrightarrow{FC};\overrightarrow{CB})$ est $\frac{\pi}{3}$.

On pourrait faire autrement ! J'aurais par exemple introduit le point H, pied de la hauteur issue de F du triangle FCH. On aurait $(FH) // (BC)$ et $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{CB}$ de même sens. On aurait donc $(\overrightarrow{FC};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{FC};\overrightarrow{FH})$ plus facile à calculer, sans formule du cours, mais en utilisant la somme des angles d'un triangle dans le triangle FCH rectangle en H.

2) On a vu en 1) d) que $(\overrightarrow{CF};\overrightarrow{CB}) = -\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$

et en 1) a) que $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

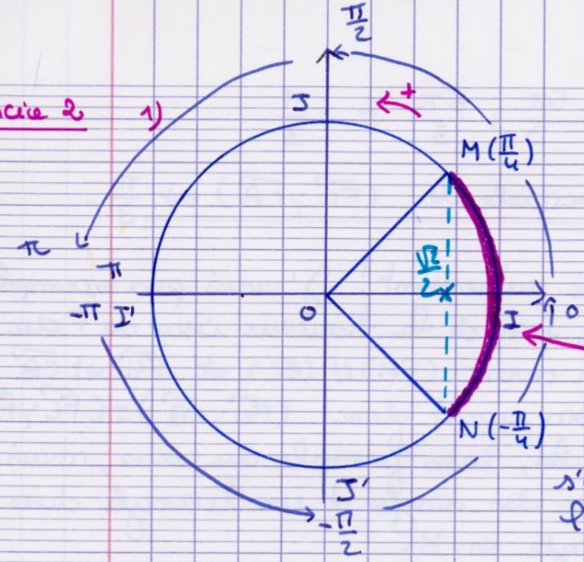
D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CF};\overrightarrow{CE}) &= (\overrightarrow{CF};\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CE}) & [2\pi]\\ &= -\frac{2\pi}{3} - (\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CB}) & [2\pi]\\ &= -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \quad \text{car } (\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v}) & [2\pi]\\ &= -\frac{3\pi}{3} \quad \text{formule du cours} & [2\pi]\\ (\overrightarrow{CF};\overrightarrow{CE}) &= -\pi\end{aligned}$$

$(\overrightarrow{CF};\overrightarrow{CE})$ est donc un angle plat. Les points E, C, F sont donc alignés.

Exercice 2

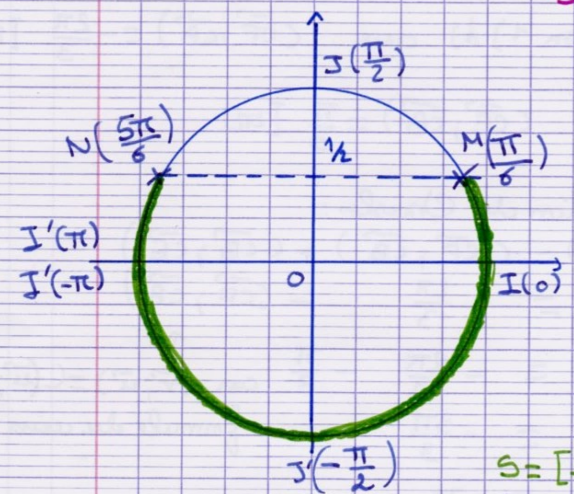
1)



Les solutions de l'inéquation $\boxed{\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}}$ seront les nombres dont les images sont sur l'arc rose.

Dans $]-\pi;\pi]$, il s'agit des nombres de l'intervalle $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$

$S = [-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$



Les solutions de l'inéquation $\boxed{\sin x < \frac{1}{2}}$ sont les nombres dont les images sont sur l'arc de cercle colorié en vert.

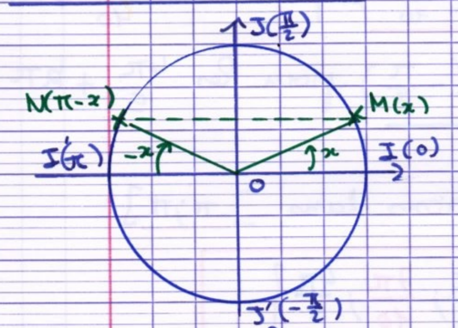
$\underbrace{S = [-\pi;\frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5\pi}{6};\pi]}$

en se restreignant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ pour la résolution.

Exercice 3 - On a vu en cours que 2 nombres x et y ont le même sinus lorsque $\begin{cases} x = y + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - y + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Suite de l'exercice 3 : On aura donc $\sin(2x) = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$

si et seulement si $\begin{cases} 2x = -\frac{3\pi}{5} + 2k\pi & (E_1) \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \left(-\frac{3\pi}{5}\right) + 2k\pi & (E_2) \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



$(E_1) \iff x = -\frac{3\pi}{10} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$(E_2) \iff 2x = \pi + \frac{3\pi}{5} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\iff 2x = \frac{5\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

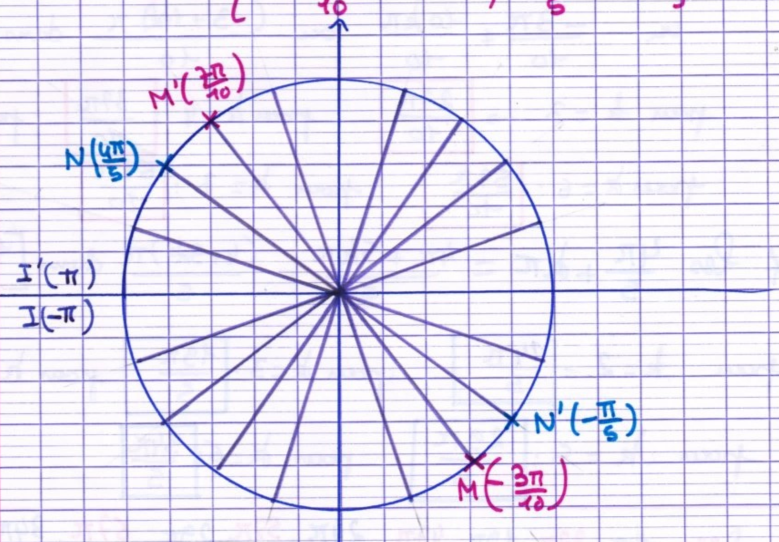
$\iff 2x = \frac{8\pi}{5} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{4\pi}{5} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Illustration de la règle du cours : les nombres ayant le même sinus que x ont leurs images en M ou en N

⚠ Quand on divise les 2 membres par 2, $2k\pi$ devient $k\pi$.

Dans $\mathbb{R}$: $S = \left\{ -\frac{3\pi}{10} + k\pi \ ; \ \frac{4\pi}{5} + k\pi \right\} \ k \in \mathbb{Z}$



Les solutions sont les nombres qui ont pour images les 4 points du cercle trigonométrique :

$M\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$ et $M'\left(\frac{7\pi}{10}\right)$ pour les $-\frac{3\pi}{10} + k\pi$

$N\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $N'\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ pour les $\frac{4\pi}{5} + k\pi$

L'équation a donc 4 solutions dans $]-\pi;\pi]$:

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{3\pi}{10} ; -\frac{\pi}{5} ; \frac{7\pi}{10} ; \frac{4\pi}{5} \right\}}$$

Recherche des solutions dans $[2\pi ; 7\pi[$

→ l'intervalle fait 2 tours ½. On s'attend donc à trouver 10 solutions

* les $-\frac{3\pi}{10} + k\pi$

ou $-\frac{3\pi}{10} + \frac{10k\pi}{10}$ ou $\frac{(-3+10k)\pi}{10}$ dans $\left[\frac{20\pi}{10} ; \frac{70\pi}{10}\right[$

pour $k = 3$ → $\boxed{\frac{27\pi}{10}}$ pour $k = 4$: $\boxed{\frac{37\pi}{10}}$ pour $k = 5$: $\boxed{\frac{47\pi}{10}}$

pour $k = 6$: $\boxed{\frac{57\pi}{10}}$ pour $k = 7$: $\boxed{\frac{67\pi}{10}}$

* les $\frac{4\pi}{5} + k\pi = \frac{4\pi + 5k\pi}{5} = \frac{(4+5k)\pi}{5}$ dans $\left[\frac{10\pi}{5} ; \frac{35\pi}{5}\right[$

pour $k = 2$: $\boxed{\frac{14\pi}{5}}$ pour $k = 3$: $\boxed{\frac{19\pi}{5}}$ pour $k = 4$: $\boxed{\frac{24\pi}{5}}$

pour $k = 5$: $\boxed{\frac{29\pi}{5}}$ pour $k = 6$: $\boxed{\frac{34\pi}{5}}$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{27\pi}{10} ; \frac{14\pi}{5} ; \frac{37\pi}{10} ; \frac{19\pi}{5} ; \frac{47\pi}{10} ; \frac{24\pi}{5} ; \frac{57\pi}{10} ; \frac{29\pi}{5} ; \frac{67\pi}{10} ; \frac{34\pi}{5} \right\}}$$

Les 10 solutions de l'intervalle $[2\pi ; 7\pi[$

Corrigé de l'interro blanche de trigonométrie du 16 janvier 2019

Exercice 4 - 1) a) $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \times 4}{3 \times 4} - \frac{\pi \times 3}{4 \times 3} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$

b) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ C.Q.F.D

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Donc $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

donc $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$ C.Q.F.D

2) a) $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

avec $a = \frac{\pi}{12}$: $\cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1$

soit $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

soit $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

soit $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

soit $\frac{\sqrt{3}+2}{4} = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\frac{\pi}{12} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ donc son cosinus est positif. On a donc :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$ ou $\boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$ C.Q.F.D

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

On vient de voir que $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

On a donc : $\frac{2+\sqrt{3}}{4} + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$

soit $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{4}{4} - \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{4-(2+\sqrt{3})}{4}$

$= \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

C'est un nombre positif car $2 = \sqrt{4}$ et $\sqrt{4} > \sqrt{3}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Comme $\frac{\pi}{12} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$

Donc $\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$ C.Q.F.D

Suite de l'exercice 4 - 3) a) Pour $\cos\frac{\pi}{12}$, on a trouvé :

$\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ à la question 1)

$\boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$ à la question 2)

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{4^2} = \frac{(\sqrt{2})^2 + 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2}{16}$$
$$= \frac{2+2\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{2}\times 3 + 6}{16}$$
$$= \frac{2+2\times 2\times\sqrt{3}+6}{16}$$
$$= \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{\cancel{4}(2+\sqrt{3})}{\cancel{4}\times 4} = \boxed{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}{2^2} = \boxed{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

→ Oui, les 2 formules trouvées pour $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ont le même carré.

Pour $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, on a trouvé $\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ à la question 1)

et $\boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$ à la question 2)

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4^2} = \frac{(\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{16} = \frac{6-2\sqrt{3\times 2}\sqrt{2}+2}{16}$$
$$= \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{\cancel{4}(2-\sqrt{3})}{\cancel{4}\times 4} = \boxed{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{2^2} = \boxed{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

On trouve bien le même carré.

b) Deux nombres ont le même carré :
- Soit lorsqu'ils sont égaux
- Soit lorsqu'ils sont opposés.

Ici : $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ est positif car son numérateur est la somme de 2 nombres positifs et son numérateur est positif.

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ est positif aussi : car $2>0$ $\sqrt{3}>0$ donc $2+\sqrt{3}>0$ donc $\sqrt{2+\sqrt{3}}>0$ et 2 est positif aussi.

Ces nombres sont tous deux positifs et ont le même carré. Ils ne peuvent pas être opposés. Ils sont donc égaux.

Les 2 valeurs trouvées pour $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sont aussi égales pour les mêmes raisons :

* Elles ont le même carré

* $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}>0$ car $\sqrt{6}>\sqrt{2}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. $\sqrt{6}-\sqrt{4}>0$, 4 aussi, donc, d'après la règle des signes, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}>0$

* $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}>0$ car $2=\sqrt{4}$ et $\sqrt{4}>\sqrt{3}$ donc $2-\sqrt{3}>0$ donc $\sqrt{2-\sqrt{3}}>0$
Et comme $2>0$, $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}>0$

Les 2 expressions sont bien égales.