

1^{ère} - Corrigé de la feuille d'exercices de calcul littéral

Exercice 1.

Développer, réduire et ordonner

développer dans une

parenthèse après un -

$$A(x) = (-3x+5)^2 - (7x-8)^2$$

$$A(x) = (-3x)^2 + 2 \times (-3x) \times 5 + 5^2 - (49x^2 - 112x + 64)$$

$$A(x) = 9x^2 - 30x + 25 - 49x^2 + 112x - 64$$

$$A(x) = -40x^2 + 82x - 39$$

puis changer les signes de la somme après avoir ôté le - et la ()

prendre à distribuer le -

$$B(x,y) = (x+y)x^2 - (x-y)y^2 + xy(y-x)$$

$$= x^3 + x^2y - xy^2 + y^3 + xy^2 - x^2y$$

$$B(x,y) = x^3 + y^3$$

$$C(x) = (1-x)(2-x)(3-x)$$

Ici, pas le choix : on ne peut pas développer d'un seul coup. Il faut commencer par un des produits, deux parenthèses entre elles, celles que l'on veut, puis distribuer ensuite la 3^{ème} parenthèse sur la somme obtenue.

$$C(x) = (2-x-2x+x^2)(3-x)$$

$$C(x) = (x^2 - 3x + 2)(3-x)$$

$$C(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x^2 - 9x - 2x + 6$$

On peut ordonner en même temps qu'on développe.

Cela évite souvent des erreurs et des oublis

$$C(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$$

Exercice 2.

Factoriser 1) après avoir reconnu un facteur commun

$$D(x) = 3(4-x)^2 + (x+2)(x-4)$$

Les nombres $(4-x)$ et $(x-4)$ sont opposés.

On sait que 2 nombres opposés ont le même carré.

On peut donc remplacer $(4-x)^2$ par $(x-4)^2$

$$D(x) = 3(x-4)^2 + (x+2)(x-4)$$

$$D(x) = (x-4)[3(x-4) + x+2]$$

$$D(x) = (x-4)[3x-12+x+2]$$

On se permet ici de développer car on n'augmente pas la puissance de x , afin de simplifier l'expression dans la crochets.

$$D(x) = (x-4)(4x-10)$$

$$D(x) = 2(x-4)(2x-5) \text{ car } 4x-10 = 2(2x-5)$$

$$E(x) = (x+3)(x-3) - (2x-6)x + (x-3)^2$$

$$E(x) = (x+3)(x-3) - 2x(x-3) + (x-3)^2$$

$$E(x) = (x-3)[(x+3) - 2x + (x-3)]$$

$$E(x) = (x-3)[x+3-2x+x-3]$$

$$E(x) = (x-3) \times 0$$

$$E(x) = 0$$

en fait, les parenthèses sont nulles si elles ne sont pas protégées d'un -

$$F(x) = (2x-1)x - (1-2x)^2 + (x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})$$

$$F(x) = (2x-1)x - (2x-1)^2 + \frac{1}{2}(2x-1)(x-\frac{3}{2})$$

car 2 nombres opposés ont le même carré

Δ bien garder ici la parenthèse

mettre $\frac{1}{2}$ en facteur permet de faire apparaître $2x-1$

$$F(x) = (2x-1)[x - (2x-1) + \frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})]$$

ici, évidemment, puisque $\frac{1}{2}$ est en facteur

$$F(x) = (2x-1)[x - 2x + 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}]$$

$$F(x) = (2x-1)[- \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}]$$

On pense ici à se débarrasser des dénominateurs dans les parenthèses en mettant une fraction (1/2) en facteur.

$$F(x) = \frac{1}{4}(2x-1)(-2x+1)$$

opposés

$$F(x) = -\frac{1}{4}(2x-1)^2$$

donc on met un - en facteur car $-(2x-1) = -2x+1$

2) Factoriser après avoir remarqué les produits remarquables

$$G(x) = (5x+3)^2 - 4(x+1)^2$$

$$G(x) = \underbrace{(5x+3)^2}_{a^2} - \underbrace{[2(x+1)]^2}_{b^2}$$

bien penser à inclure le 4 dans le carré

$$G(x) = [5x+3-2(x+1)][5x+3+2(x+1)]$$

$$G(x) = [5x+3-2x-2][5x+3+2x+2]$$

$$G(x) = (3x+1)(7x+5)$$

$$(a+b)^2$$

$$(a-b)^2$$

$$\text{et } (a+b)(a-b)$$

l'énoncé est mal posé !

Ce sont les sommes remarquables qu'il faut retenir :

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2$$

$$H(x) = x^2 - 4x + 4 + 3(x-2)^2$$

$$H(x) = (x-2)^2 + 3(x-2)^2$$

$$H(x) = (x-2)^2 [1+3]$$

$$H(x) = 4(x-2)^2$$

3) Factoriser en plusieurs étapes :

$$I(x) = 5x^4 - 45x^2$$

$$I(x) = 5(x^4 - 9x^2)$$

$$\text{ou } I(x) = 5x^2(x^2 - 9)$$

$$I(x) = 5[(x^2)^2 - (3x)^2] \quad (\text{mieux})$$

$$I(x) = 5x^2(x+3)(x-3)$$

$$I(x) = 5(x^2 - 3x)(x^2 + 3x)$$

$$I(x) = 5x^2(x-3)x(x+3)$$

$$I(x) = 5x^2(x-3)(x+3)$$

$$J(x) = 25x^2 - 4 + (5x+2)(4x-7)$$

$$J(x) = (5x)^2 - 2^2 + (5x+2)(4x-7)$$

$$J(x) = (5x-2)(5x+2) + (5x+2)(4x-7)$$

$$J(x) = (5x+2)[5x-2+4x-7]$$

pas besoin de () après un +

$$J(x) = (5x+2)(9x-9)$$

$$J(x) = 9(5x+2)(x-1)$$

$$\begin{aligned} K(x) &= 49 - 28x + 4x^2 + (7-2x)(5-3x) \\ &= 7^2 - 2 \times 7 \times 2x + (2x)^2 + (7-2x)(5-3x) \\ &= (7-2x)^2 + (7-2x)(5-3x) \\ &= (7-2x)[7-2x+5-3x] \end{aligned}$$

$$K(x) = (7-2x)(12-5x) \quad \text{ou} \quad (2x-7)(5x-12)$$

$$\text{car } (2x-7) = -(7-2x)$$

$$\text{et } (5x-12) = -(12-5x)$$

$$\text{et } (-) \times (-) = +$$

Exercice 3

1) Résoudre les équations en se ramenant à un produit nul.

$$(E_1) \quad x^2 - 4x + 4 = (1-x)(x-2)$$

$$(E_1) \Rightarrow (x-2)^2 = (1-x)(x-2)$$

$$(E_1) \Rightarrow (x-2)^2 - (1-x)(x-2) = 0$$

$$(E_1) \Rightarrow (x-2)(x-2) - (1-x)(x-2) = 0$$

$$(E_1) \Rightarrow (x-2)(x-2-1+x) = 0$$

$$(E_1) \Rightarrow (x-2)(2x-3) = 0$$

$$(E_2) \Rightarrow x-2=0 \quad \text{ou} \quad 2x-3=0$$

$$(E_2) \Rightarrow x=2 \quad \text{ou} \quad x=\frac{3}{2} \quad S = \{2, \frac{3}{2}\}$$

$$(E_2) \quad (x+1)(2-x)(x+3) + (x+1)(2-x)(5-2x) = (x+1)(x-2)$$

$$(E_2) \Rightarrow (x+1)(2-x)(x+3) + (x+1)(2-x)(5-2x) - (x+1)(x-2) = 0$$

$$(E_2) \Rightarrow (x+1)(2-x)(x+3) + (x+1)(2-x)(5-2x) + (2+1)(2-x) = 0$$

$$(E_2) \Rightarrow (x+1)(2-x)[x+3+5-2x+1] = 0$$

$$(E_2) \Rightarrow (x+1)(2-x)(-x+9) = 0$$

$$(E_2) \Rightarrow x+1=0 \quad \text{ou} \quad 2-x=0 \quad \text{ou} \quad -x+9=0$$

$$(E_2) \Rightarrow x=-1 \quad \text{ou} \quad x=2 \quad \text{ou} \quad x=9$$

$$S = \{-1, 2, 9\}$$

Exercices de calcul littéral, de résolutions d'équations et d'inéquations

2) Résoudre des équations où l'inconnue figure au dénominateur

$$(E_3) \quad \frac{2x+3}{5x-1} = 2$$

Valeur interdite : $5x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$
On résout dans $\mathbb{R} - \{\frac{1}{5}\}$

$$(E_3) \Rightarrow 2x+3 = 2(5x-1)$$

on a le droit de multiplier les 2 membres d'une équation par un même nombre différent de 0 Δ
 $5x-1$ est différent de 0

$$(E_3) \Rightarrow 2x+3 = 10x-2$$

car on résout dans $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{5}\}$

$$(E_3) \Rightarrow -8x = -5$$

$$(E_3) \Rightarrow x = \frac{5}{8}$$

$\frac{5}{8}$ n'est pas valeur interdite donc $S = \{\frac{5}{8}\}$

$$(E_4) \quad \frac{3}{x} = \frac{x}{5}$$

Valeur interdite : $x=0$. On résout dans $\mathbb{R}$

Règle du produit en croix : si $B \neq 0$ et $D \neq 0$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC$$

(cela revient à multiplier les 2 membres par B et D)

$$(E_4) \Rightarrow 3 \times 5 = x^2$$

car $x \neq 0$ et $5 \neq 0$

puisque on résout dans $\mathbb{R}^*$

$$(E_4) \Rightarrow x^2 = 15 \Rightarrow x = \sqrt{15} \text{ ou } x = -\sqrt{15}$$

ne sont pas valeurs interdites donc $S = \{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$

$$(E_5) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2$$

Valeurs interdites : $x=0$ et $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

On résout dans $\mathbb{R} - \{-1; 0\}$

Les dénominateurs sont supposés non nuls. Si on réduit les termes du 1^{er} membre ainsi que le second membre au même dénominateur $x(x+1)$, celui-ci étant non nul car produit de 2 membres non nuls, on pourra multiplier les 2 membres par ce membre pour se débarrasser des dénominateurs.

donc, dans $\mathbb{R} - \{0; -1\}$:

$$(E_5) \Leftrightarrow \frac{1 \times (x+1)}{x \times (x+1)} + \frac{1 \times x}{(x+1) \times x} = 2 \times \frac{x(x+1)}{x(x+1)}$$

Rappel : On ne change pas la valeur d'une écriture fractionnaire en multipliant son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul et ici, $(x+1)$ et x sont bien non nuls.

$$(E_5) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x(x+1)}{x(x+1)}$$

$x \times (x+1)$ qui est $\neq 0$

$$(E_5) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} + \frac{x}{x} = 2x+2$$

$x \times (x+1)$ qui est $\neq 0$

$$(E_5) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 1 = 2x+2$$

$$(E_5) \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$(E_5) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ne sont pas valeurs interdites donc $S = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

Or, comme il est d'usage de ne pas laisser de radicaux au dénominateur, on écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad S = \{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

$$(E_6) \quad \frac{8x(1-4x)}{4-5x} = 0 \quad \text{Valeur interdite : } 4-5x=0 \Rightarrow 4=5x \Rightarrow \frac{4}{5}=x$$

On résout dans $\mathbb{R} - \{\frac{4}{5}\}$

Règle : $\frac{A}{B} = 0 \Rightarrow A=0$ et $B \neq 0$

Donc, dans $\mathbb{R} - \{\frac{4}{5}\}$, $(E_6) \Leftrightarrow 8x(1-4x) = 0$ (et $4-5x \neq 0$)

$$(E_6) \Leftrightarrow 8x = 0 \text{ ou } 1-4x = 0 \text{ (et } 4-5x \neq 0)$$

$$(E_6) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 = 4x \text{ (et } x \neq \frac{4}{5})$$

$$(E_6) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{1}{4} = x \text{ (et } x \neq \frac{4}{5})$$

ne sont pas valeurs interdites

donc $S = \{0; \frac{1}{4}\}$

Résoudre les inéquations

(4)

Exercice 4

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{3} + 1 < \frac{x}{6} \quad (I_1)$$

$$(I_1) \Leftrightarrow \frac{x \times 3}{4 \times 3} - \frac{x \times 4}{3 \times 4} + \frac{12}{12} < \frac{x \times 2}{6 \times 2}$$

$$(I_1) \Leftrightarrow \frac{3x - 4x + 12}{12} < \frac{2x}{12}$$

$$(I_1) \Leftrightarrow -x + 12 < 2x$$

$$(I_1) \Leftrightarrow -3x < -12$$

$$(I_1) \Leftrightarrow x > 4$$

$$S =]4; +\infty[$$

Remarque : On peut additionner ou soustraire en même nombre (quelconque) aux deux membres d'une inéquation sans changer le sens de l'inégalité.

$$(I_2) (x-1)(x+1) > (x+1)^2$$

Méthode 1 : en développant, après avoir remarqué que les termes en x^2 allaient s'annuler.

$$(I_2) \Leftrightarrow x^2 - 1 > x^2 + 2x + 1$$

$$(I_2) \Leftrightarrow -2x > 2$$

$$(I_2) \Leftrightarrow x < -1$$

$$S =]-\infty; -1[$$

Méthode 2 : en factorisant.

$$(I_2) \Leftrightarrow (x-1)(x+1) - (x+1)^2 > 0$$

$$(I_2) \Leftrightarrow (x+1)[x-1-(x+1)] > 0$$

$$(I_2) \Leftrightarrow (x+1)(x-1-x-1) > 0$$

$$(I_2) \Leftrightarrow (x+1) \times (-2) > 0$$

$$(I_2) \Leftrightarrow x+1 < 0$$

Règle : on peut multiplier ou diviser les 2 membres d'une inéquation par un même nombre strictement positif sans changer le sens de l'inégalité.

Règle : on peut multiplier ou diviser les 2 membres d'une inéquation par un même nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inégalité.

$$(I_2) \Leftrightarrow x < -1$$

$$S =]-\infty; -1[$$

$$(I_3) -2(6-5x)(2x+7) < 0 \quad 6-5x=0 \Leftrightarrow 6=5x \Leftrightarrow x=\frac{6}{5}=1,2$$

$$2x+7=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}=-3,5$$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{6}{5}$	$+\infty$
-2		-	-	-
6-5x		+	+	-
2x+7		-	+	+
-2(6-5x)(2x+7)		+	-	+

$$S =]-\frac{7}{2}; \frac{6}{5}[$$

$$(I_4) \frac{(x+1)^2}{x} \geq x \quad \text{Valeur interdite : } x=0$$

On résout dans $\mathbb{R}^*$

⚠️ Ici, pas question de multiplier les deux membres par x , puisque x peut être aussi bien positif que négatif : comment savoir s'il faut ou non changer le signe de l'inégalité ? On pourrait faire 2 cas : le cas $x > 0$ et le cas $x < 0$. Mais la solution la plus pratique est de regrouper les termes dans un même membre.

$$(I_4) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x} - x \geq 0$$

$$(I_4) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x} - \frac{x^2}{x} \geq 0$$

$$(I_4) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 - x^2}{x} \geq 0$$

On remarque que, si on développe, les termes en x^2 vont s'annuler.

$$(I_4) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
2x+1	-	0	+	+
x	-	-	0	+
$\frac{2x+1}{x}$	+	0	+	+

$$S =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup]0; +\infty[$$

$$2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$(I_5) \quad x^2 - 16 \geq x(x+4)$$

En développant : $(I_5) \Leftrightarrow x^2 - 16 \geq x^2 + 4x$

$$(I_5) \xrightarrow{-x^2} -16 \geq 4x \quad \downarrow -x^2$$

$$(I_5) \xrightarrow{:4} -4 \geq x \quad \downarrow :4$$

$$S =]-\infty; -4]$$

En factorisant : $(I_5) \Leftrightarrow (x-4)(x+4) - x(x+4) \geq 0$

⚠️ Attention, ne pas diviser les 2 membres par $x+4$, car ce nombre peut s'annuler ou changer de signe.

$$(I_5) \Leftrightarrow (x+4)(x-4-x) \geq 0$$

$$(I_5) \Leftrightarrow -4(x+4) \geq 0$$

$$(I_5) \xrightarrow{:(-4)} x+4 \leq 0 \quad \downarrow :(-4)$$

$$(I_5) \xrightarrow{-4} x \leq -4 \quad \downarrow -4 \quad S =]-\infty; -4]$$

$$(I_6) \quad \frac{4}{(x-1)^2} \geq 1$$

Le carré d'un nombre est nul si ce nombre est nul.

$$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

On résout dans $\mathbb{R} - \{1\}$

$$(I_6) \Leftrightarrow \frac{4}{(x-1)^2} - 1 \geq 0$$

$$(I_6) \Leftrightarrow \frac{4 - (x-1)^2}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$(I_6) \Leftrightarrow \frac{(2-(x-1))(2+(x-1))}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$(I_6) \Leftrightarrow \frac{(2-x+1)(x+1)}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$(I_6) \Leftrightarrow \frac{(1-x+3)(x+1)}{(x-1)^2} \geq 0$$

ici, on a besoin de factoriser le numérateur. Car si on le développe on a une somme avec un x^2 dont on ne saurait pas déterminer le signe.

Remarque : $(x-1)^2$ est toujours positif, sauf dans le cas (exclu ici) où $x=1$, où il vaut 0.

	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$-x+3$	+	-	+	+	-
$x+1$	-	0	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	0	+	+
$\frac{(-x+3)(x+1)}{(x-1)^2}$	-	0	+	+	-

$$S = [-1; 1[\cup]3; +\infty[$$

$$(I_7) \quad \frac{x}{8} > \frac{8}{x} \quad \text{Valeur interdite : } x=0$$

On résout dans $\mathbb{R}^*$

⚠️ On ne peut pas appliquer le produit en croix dans le cas d'une inéquation!

$$(I_7) \Leftrightarrow \frac{x}{8} - \frac{8}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 8^2}{8x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-8)(x+8)}{8x} > 0$$

x	$-\infty$	-8	0	$+8$	$+\infty$
$x-8$	-	-	-	0	+
$x+8$	-	0	+	+	+
$8x$	-	-	0	+	+
$\frac{(x-8)(x+8)}{8x}$	-	0	+	-	+

$$S =]-8; 0[\cup]8; +\infty[$$

Remarque : $8x = 8x + 0$ ($mx+p$)
 $8x$ est du signe de x