1ère S. Corrigés des exercices sur les études de fonctions.

ⓐ $f : x \mapsto \frac{-2}{3+x}$

Recherche de l'ensemble de définition de f :

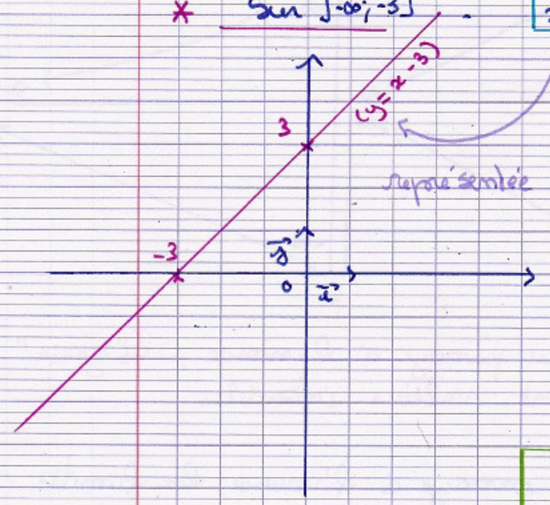
Dans la formule de $f(x)$, il y a un dénominateur avec x. Pour que $f(x)$ existe, le dénominateur doit être non nul.

Valeur interdite : $3+x=0 \iff x=-3$

f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\} =]-\infty;-3[\,\cup\,]-3;+\infty[$

Étude des variations de f : Sur chacun des intervalles qui composent son ensemble de définition, à savoir $]-\infty;-3[$ et $]-3;+\infty[$.

* Sur $]-\infty;-3]$. $\boxed{x \mapsto 3+x}$ ou $x+3$ est une fonction affine de la forme $x \mapsto ax+b$ avec $a=1$ et $x=3$.



représentée ici

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $]-\infty;-3[$ où elle ne s'annule pas car $x+3=0 \iff x=-3$

$\boxed{x \mapsto \frac{1}{x+3}}$ sera donc strictement décroissante sur $]-\infty;-3[$

on compose par la fonction inverse

d'après la règle 4) sur la fiche de l'énoncé

$f : x \mapsto \frac{-2}{3+x}$ est le produit de $x \mapsto \frac{1}{3+x}$ par le réel $\boxed{-2}$ qui est strictement négatif.

Ses variations sont donc contraires à celles de $x \mapsto \frac{1}{3+x}$.

f sera donc strictement croissante sur $]-\infty;-3[$.

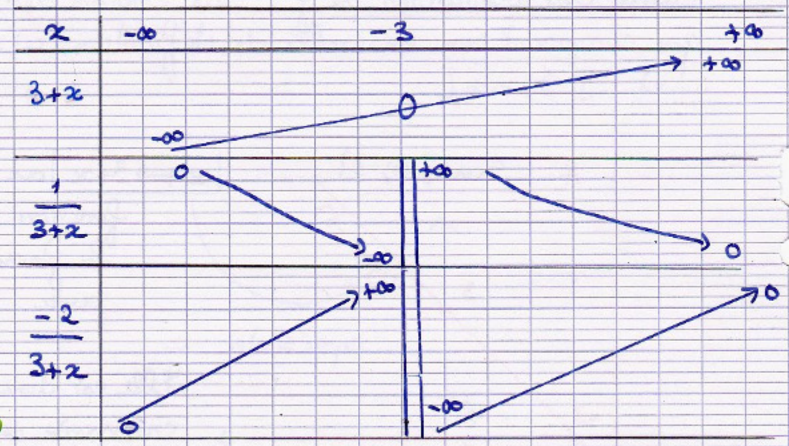
* Sur $]3;+\infty[$ → même chose. f est strictement croissante.

Faire tracer la courbe par la calculatrice pour vérifier ce qu'on vient de montrer.

On pouvait procéder à ces différentes étapes par les tableaux de variations :

passage à l'inverse

multiplication par -2



quand on multiplie par un nombre négatif, les $+\infty$ deviennent $-\infty$ et vice-versa.

Lors du passage à l'inverse, les "zéros" deviennent valeurs interdites

Hors programme : lors du passage à l'inverse, les limites infinies deviennent nulles et vice-versa.

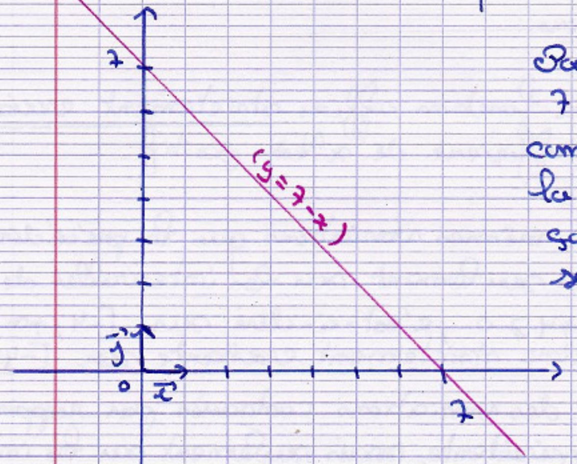
b) $g : x \longmapsto \sqrt{7-x}$

<u>Recherche de l'ensemble de définition</u> : Rappel : Lorsqu'il y a une racine carrée dans la formule, la fonction ne sera définie que si l'expression sous la racine carrée est négative ou nulle.

$g(x)$ sera définie si et seulement si $7-x \geq 0$ soit $7 \geq x$
soit $x \leq 7$

L'ensemble de définition de g est $]-\infty ; 7]$.

<u>Étude des variations</u> : $x \longmapsto 7-x$ ou $-x+7$ est une fonction affine de la forme : $x \mapsto ax+b$ avec $a<0$. Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et le sera aussi sur $]-\infty ; 7]$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.



Pour tout $x \in]-\infty ; 7]$, $7-x \geq 0$. Quand on compose $x \mapsto 7x$ par la fonction racine carrée, ça ne change pas son sens de variations.

g est donc aussi strictement décroissante sur $]-\infty ; 7]$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$7-x$	$+\infty$	$+$ ↘	0	$-$ ↘	$-\infty$
$\sqrt{7-x}$	$+\infty$	↘	0		

Composition par la fonction racine carrée

Les variations sont conservées, mais seulement sur la partie de $\mathbb{R}$ où ce qu'il y a sous la racine est positif ou nul.

c) $h : x \longmapsto \dfrac{-3}{\sqrt{x+4}} + 5$

<u>Recherche de l'ensemble de définition</u> :

$h(x)$ sera défini si et seulement si $x+4 \geq 0$ (1) et $\sqrt{x+4} \neq 0$ (2)

(2) $x+4 \geq 0 \iff x \geq -4 \rightarrow x$ doit être dans $[-4 ; +\infty[$

(1) $\sqrt{x+4} = 0 \iff x+4=0 \iff x=-4 \rightarrow x$ doit être différent de 4.

L'ensemble de définition de la fonction h est donc $]-4 ; +\infty[$

<u>Étude des variations</u> :

$x \mapsto x+4$ est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car le coefficient de x [1] est positif.

$x \mapsto \sqrt{x+4}$ a les mêmes variations que la précédente, ⚠ mais seulement sur les intervalles de $\mathbb{R}$ où $x+4 \geq 0$, c'est-à-dire sur $[-4 ; +\infty[$
Elle est donc strictement croissante sur $[-4 ; +\infty[$

$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ a des variations contraires par rapport à la précédente, mais seulement sur les intervalles où $\sqrt{x+4} \neq 0$, c'est-à-dire sur $]-4 ; +\infty[$.
Elle est donc strictement décroissante sur $]-4 ; +\infty[$.

$x \longmapsto \dfrac{-3}{\sqrt{x+4}}$ est la multiplication par -3 de la précédente. La multiplication par un nombre négatif inverse le sens de variations.

Suite du ⓒ $x \mapsto \frac{-3}{\sqrt{x+4}}$ est donc strictement croissante sur $]-4;+\infty[$.

$h : x \mapsto \frac{-3}{\sqrt{x+4}} + 5$ est la même que la précédente, à laquelle on a ajouté une constante : 5.
Ses variations sont donc les mêmes que celles de $x \mapsto \frac{-3}{\sqrt{x+4}}$, elle est donc strictement croissante sur $]-4;+\infty[$.

On vérifie cela en faisant tracer la courbe par la calculatrice.

L'inconvénient de le présenter sous forme de tableaux, c'est que c'est hors programme à cause des limites

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$x+4$	$-\infty$ ↗ −	0	+ ↗ $+\infty$
$\sqrt{x+4}$		0 ($\sqrt{0}$)	↗ $+\infty$ ($\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}$)
$\frac{1}{\sqrt{x+4}}$		‖ $+\infty$	↘ 0
$\frac{-3}{\sqrt{x+4}}$		$-\infty$	↗ 0 (car $-3 \times 0 = 0$)
$\frac{-3}{\sqrt{x+4}} + 5$		$-\infty$	↗ 5

ne pas oublier d'ajouter 5

Remarque : -4 n'est pas valeur interdite pour $\sqrt{x+4}$ mais elle le devient quand $\sqrt{x+4}$ "passe au dénominateur". C'est pourquoi la ‖ apparaît à $\frac{1}{\sqrt{x+4}}$, pas avant.

d) $k : x \longmapsto \frac{7}{\sqrt{x^2-4}} - 8$

Ensemble de définition : k sera définie si et seulement si
- $x^2+4 \geqslant 0$ (1)
- et $\sqrt{x^2+4} \neq 0$ (2)

Rappel : $(a+b)(a-b) = a^2 - b$

(1) $x^2+4 \geqslant 0 \iff x^2 - 2^2 \geqslant 0$

$\iff (x+2)(x-2) \geqslant 0$

$x+2=0 \iff x=-2$ et $x-2=0 \geqslant 0$. On fait le tableau de signes du produit $(x+2)(x-2)$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		−	0	+		+	
$x-2$		−		−	0	+	
$(x+2)(x-2)$		+	0	−	0	+	

$(x+2)(x-2)$ sera positif ou nul si et seulement si $x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$

(2) $\sqrt{x^2-4} = 0 \iff x^2-4=0 \iff (x+2)(x-2)=0$
$\iff x+2=0$ ou $x-2=0$
$\iff \underline{x=-2}$ ou $\underline{x=2}$

valeurs interdites

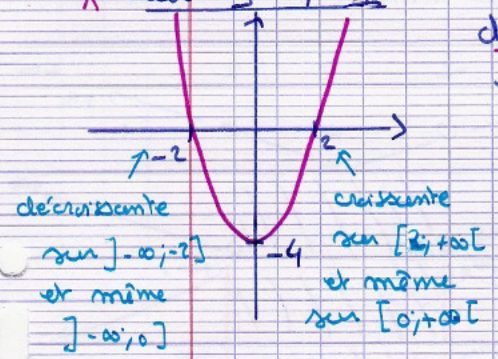
L'ensemble de définition de k sera donc

$]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

j'ai ouvert les crochets car exclu les valeurs interdites.

Étude du sens de variations de $k : x \mapsto \frac{7}{\sqrt{x^2-4}} - 8$

* Sur $]-\infty ; -2[$.



$x \mapsto x^2-4$ est strictement décroissante. Car c'est une fonction trinôme dont le coefficient de x^2 est strictement positif.

$x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ est strictement décroissante aussi car :
* On compose par la fonction $\sqrt{\ }$
* $x^2-4 \geq 0$ $\forall x \in]-\infty;-2[$
cf tableau de signes page précédente.

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ est strictement croissante car :
* On compose par la fonction inverse
* $\sqrt{x^2-4}$ ne s'annule pas sur $]-\infty;-2[$
(car -2 a été exclu : valeur interdite)

$k : x \mapsto \frac{7}{\sqrt{x^2+4}} - 8$ est strictement croissante aussi car ça ne change pas le sens de variation d'une fonction de la multiplier par un nombre positif (7) ni de lui ajouter une constante (−8).

* Sur $]-2;+\infty[$ $x \mapsto x^2-4$ est strictement croissante

donc $x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ aussi

donc $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ est strictement décroissante

et $k : x \mapsto \frac{7}{\sqrt{x^2-4}} - 8$ aussi. à vérifier en faisant tracer la courbe par la calculatrice.

On peut essayer de résumer tout cela à l'aide de tableaux de variations (mais ce n'est pas demandé et hors-programme à cause des limites.)

x	$-\infty$		-2	0	2		$+\infty$
x^2-4	$+\infty$	↘ +	0	↘ -4 − ↗	0	+ ↗	$+\infty$
$\sqrt{x^2-4}$	$+\infty$	↘	0	//////	0	↗	$+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$	0	↗	$+\infty$ ‖	//////	‖ $+\infty$	↘	0
$\frac{7}{\sqrt{x^2-4}} - 8$	-8	↗	$+\infty$ ‖	//////	‖ $+\infty$	↘	-8

composition par $\sqrt{\ }$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

passage à l'inverse

multiplication par −7 et ajout de −8.

car $7 \times 0 - 8 = -8$

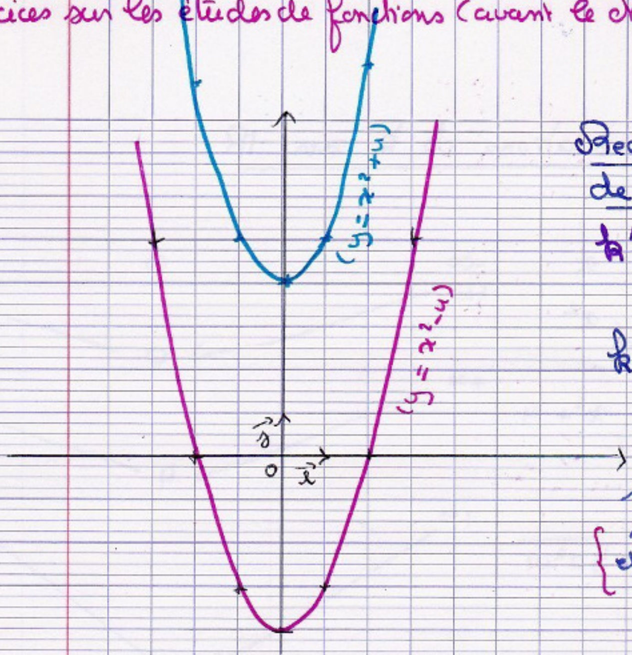
$k' : x \mapsto \frac{7}{\sqrt{x^2+4}} - 8$

La différence entre k et k' vient de la différence entre les trinômes x^2-4 et x^2+4.

La courbe représentative de $x \mapsto x^2-4$ coupe l'axe des abscisses (en −2 et 2) tandis que celle de $x \mapsto x^2+4$ ne la coupe pas et reste toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

C'est pourquoi $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+4 > 0$ et $k(x)$ existe !

Mais, après l'avoir illustré par le graphique, prouvons-le par le calcul :



Recherche de l'ensemble de définition de

$k' : x \longmapsto \frac{4}{\sqrt{x^2+4}} - 8$

$k'(x) = \frac{7}{\sqrt{x^2+4}} - 8$ existe si et seulement si

$\begin{cases} x^2+4 \geq 0 & (1) \\ \text{et } \sqrt{x^2+4} \neq 0 & (2) \end{cases}$

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ car le carré d'un réel est toujours positif ou nul en vertu de la règle des signes.

donc $x^2+4 \geq 4$ Rappel : J'ai le droit d'ajouter un même nombre aux membres d'une inégalité sans en changer le sens.

Un nombre plus grand que 4 est forcément positif ! Donc on a bien $x^2+4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) $\sqrt{x^2+4} = 0 \Longleftrightarrow x^2+4=0$ car 0 est le seul nombre dont la racine carrée vaille 0.

$\Longrightarrow x^2 = -4$ Or le carré d'un réel ne peut être négatif !

Cette équation n'a donc pas de solution. Par conséquent, il n'y a pas de valeur interdite pour k' malgré le x au dénominateur.

Conclusion : l'ensemble de définition de k' est $\mathbb{R}$.

Étudions les variations de k' sur $\mathbb{R}$

On connaît les variations de la fonction carré d'après le cours.

ajouter 4 translate la courbe de vecteur $4\vec{j}$ (vers le haut)

Composer par la fonction racine carrée ne change pas le sens de variations du moment que x^2+4 reste bien positif

Passer à l'inverse inverse les variations du moment que $\sqrt{x^2+4}$ ne s'annule pas

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
x^2+4	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
$\sqrt{x^2+4}$	$+\infty$	$\searrow$	$2 \leftarrow \sqrt{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$\frac{7}{\sqrt{x^2+4}} - 8$	-8	$\nearrow$	$-4{,}5$	$\searrow$	-8

Multiplier par un nombre positif et ajouter une constante ne change pas le sens de variation, mais ça change les limites et les valeurs.

$7 \times \frac{1}{2} - 8 = 3{,}5 - 8 = -4{,}5$

ⓔ ℓ est définie par $\ell(x) = -6\sqrt{3-x^2}$

Recherche de l'ensemble de définition :

$\ell(x)$ existe si et seulement si $3 - x^2 \geq 0$

$3 - x^2 \geqslant 0 \iff (\sqrt{3})^2 - x^2 \geqslant 0 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$\iff (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x) \geqslant 0$

$\sqrt{3} + x = 1x + \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - x = -1x + \sqrt{3}$

$x \mapsto \sqrt{3} + x$ et $x \mapsto \sqrt{3} - x$ sont 2 fonctions affines, la première strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car le coefficient de x est positif, la deuxième strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Calcul des zéros :

$\sqrt{3} + x = 0 \iff x = -\sqrt{3}$

$\sqrt{3} - x = 0 \iff \sqrt{3} = x \iff x = \sqrt{3}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\sqrt{3}+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{3}-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On aura donc $(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x) \geqslant 0 \iff x \in [-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$.

L'ensemble de définition de la fonction l est donc $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$.

Etude des variations de la fonction l :

La fonction $x \mapsto 3 - x^2$ ou $-x^2 + 0x + 3$ est une fonction trinôme avec le coefficient de x^2 positif. Elle est donc décroissante puis croissante sur $\mathbb{R}$.

On connaît aussi son signe (voir tableau ci-dessus) et on peut calculer l'abscisse du sommet de la parabole

Il s'agit de zéro. On peut le savoir de 3 manières :

Manière 1 : C'est la moyenne des 2 racines du trinôme : $\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = 0$

Manière 2 : En sachant la formule : Quand on a le trinôme ax^2+bx+c, l'abscisse du sommet de la parabole représentative de la fonction : $x \mapsto ax^2+bx+c$ est $\boxed{-\dfrac{b}{2a}}$

C'est la formule du x_0 lorsque $\Delta = 0$!

Manière 3 : $x \mapsto x^2$ a un tableau de variations connu :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On multiplie la fonction par -1, cela inverse les variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^2$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On ajoute 3 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$3-x^2$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

On va d'ailleurs utiliser ce tableau pour la suite, mais en y ajoutant le signe de $3 - x^2$

Suite du e

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x^2$		$-$	0	$+$	3	$+$	0	$-$	
$\sqrt{3-x^2}$			0	↗	$\sqrt{3}$	↘	0		
$f(x) = -6\sqrt{3-x^2}$			0	↘	$-6\sqrt{3}$	↗	0		

On compose par la fonction racine carrée. Les variations restent les mêmes, mais la fonction n'est plus définie sur les intervalles où $3-x^2$ est négatif.

A la 2ème étape, on multiplie par -6. Les variations sont alors inversées. Et on n'oublie pas de multiplier par -6 les valeurs des images dans le tableau !

La fonction f, définie sur $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$, est donc :
- strictement décroissante sur l'intervalle $[-\sqrt{3};0]$

et - strictement croissante sur l'intervalle $[0;\sqrt{3}]$.

→ à vérifier en faisant tracer la courbe par la calculatrice.

---

f) m est définie par $m(x) = \sqrt{\dfrac{-7}{x^2-2x-3}} - 100$

Recherche de l'ensemble de définition de m :

$m(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{-7}{x^2-2x-3} \geqslant 0 \\ \text{et} \\ x^2-2x-3 \neq 0 \end{cases}$

Etudions le signe du trinôme x^2-2x-3 :

$\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-3) = 4+12 = 16 \qquad \sqrt{\Delta} = 4$

Le trinôme admet 2 racines : $x_1 = \dfrac{-(-2)-4}{2\times1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

$x_2 = \dfrac{-(-2)+4}{2\times1} = \dfrac{6}{2} = 3$ } valeurs interdites pour m

Le coefficient de x^2 est $1 > 0$. On connaît donc le signe et les variations du trinôme sur IR :

Tableau de signes et de variations de x^2-2x-3

x	$-\infty$		-1		1 ($\frac{-b}{2a}$)		3		$+\infty$
x^2-2x-3	$+\infty$	$+$ ↘	0	$-$ ↘	-4	↗ $-$	0	↗ $+$	$+\infty$

$1^2 - 2\times1 - 3 = -4$

On vérifie en faisant tracer la courbe par la calculatrice.

Comme -7 est négatif, le signe du quotient $\dfrac{-7}{x^2-2x-3}$ sera contraire à celui de x^2-2x-3.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
-7		$-$		$-$		$-$	
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-7}{x^2-2x-3}$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

$\dfrac{-7}{x^2-2x-3}$ sera positif si et seulement si $x \in]-1;3[$.

Remarquons que, dans $]-1;3[$, on a exclu les valeurs interdites -1 et 3 trouvées pour m !

L'ensemble de définition de la fonction m sera donc :

l'intervalle $]-1;3[$

Pour chercher les variations de m, repartons du tableau de variations et de signes de x^2-2x-3 :

Suite du ④

On peut se limiter à l'intervalle $[-1;3]$ puisque c'est l'ensemble de définition de m

	x	-1		1		3
	x^2-2x-3	0	↘	-4	↗	0
passage à l'inverse	$\frac{1}{x^2-2x-3}$	‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖
multiplication par -7	$\frac{-7}{x^2-2x-3}$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{7}{4}$	↗	$+\infty$ ‖
Composition par la fonction $\sqrt{\ }$	$\sqrt{\frac{-7}{x^2-2x-3}}$	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{\frac{7}{4}}$	↗	$+\infty$ ‖
On soustrait 100	$\sqrt{\frac{-7}{x^2-2x-3}}-100$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{7}}{2}-100$	↗	$+\infty$ ‖

avec $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

m sera donc • strictement décroissante sur $]-1;1]$
puis • strictement croissante sur $[1;3[$

Remarque : difficile de vérifier les variations de $x \mapsto \sqrt{\frac{-7}{x^2-2x+3}} - 100$ à la calculatrice, à moins de descendre dans des ordonnées proches de -100.
Personnellement, je me contente de vérifier les variations que j'ai trouvées pour
$$x \mapsto \sqrt{\frac{-7}{x^2-2x-3}}$$

On pouvait aussi travailler sur $\mathbb{R}$ au lieu de $[-1;3]$ seulement

	x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
	x^2-2x-3	$+\infty$	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	$+\infty$
passage à l'inverse	$\frac{1}{x^2-2x-3}$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
multiplication par -7	$\frac{-7}{x^2-2x-3}$	0	↘ −	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ +	$\frac{7}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ −	0
Composition par la racine carrée	$\sqrt{\frac{-7}{x^2-2x-3}}$			‖ $+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	↗	$+\infty$ ‖		
ajout de -100	$\sqrt{\frac{-7}{x^2-2x-3}}-100$			‖ $+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{7}}{2}-100$	↗	$+\infty$ ‖		

Au moment du passage à la racine carrée, / de la composition par, toutes les valeurs pour lesquelles $\frac{-7}{x^2-2x-3}$ était négatif sont exclues de l'ensemble de définition.