1ère **Corrigé de la feuille d'exercices sur le chapitre "fonctions usuelles".**

Exercice 1.

1)

x	-5		-4		$-0,5$		$2,5$		5
$f(x)$	$-3,5$	↗	$\approx 2,2$	↘	-1	↗	2	↘	$\approx -0,6$

2) Le maximum atteint par f sur l'intervalle $[0;4]$ est 2.

x	-5		$-4,2$		-1		$0,25$		$4,5$		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 2 : 1) g est définie par $g(x) = \dfrac{2}{x-3} + 1$

g a une valeur interdite lorsque $x-3=0$ soit $x=3$

L'ensemble de définition de g est donc $\mathbb{R} - \{3\}$

(soit $]-\infty; 3[\cup]3;+\infty[$)

h est définie par $h(x) = -\dfrac{1}{x+4} - 2$

h a une valeur interdite : $x+4=0 \iff x=-4$

h est donc définie sur $\mathbb{R} - \{-4\}$

(soit $]-\infty;-4[\cup]-4;+\infty[$)

2) Tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

* Si on remplace x par $x-3$, la courbe représentative de la fonction subit une translation de vecteur $3\vec{i}$ (dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$)

* Multiplier une fonction par un nombre strictement positif ne change pas son sens de variations.
Ainsi : $x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$ et $x \mapsto \dfrac{2}{x-3}$ auront les mêmes variations :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x-3}$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x \mapsto \frac{2}{x-3}$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

car $2\times 0 = 0$

car "$2\times(-\infty) = -\infty$"

car "$2\times(+\infty) = +\infty$"

car $2\times 0 = 0$

* Si on ajoute 1 à la formule de la fonction, sa courbe subit une translation de vecteur $1\vec{j}$

Ainsi :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

car $0+1=1$

car "$+\infty+1=+\infty$"

car "$-\infty+1=-\infty$"

car $0+1=1$

3) On déduit de ce tableau que la courbe représentative de g admet pour asymptotes les droites d'équations $x=3$ et $y=1$.

Suite de l'exercice 2. $\forall x \neq -4$, $h(x) = -\frac{1}{x+4} - 2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$\frac{1}{x+4}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Remplacer x par $x+4$ translate la courbe de $-4\vec{i}$

$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-4\})$ $-\frac{1}{x+4} = -1 \times \frac{1}{x+4}$. Multiplier la fonction par un nombre strictement négatif inverse son sens de variations

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$-\frac{1}{x+4}$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$-\frac{1}{x+4} - 2$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2

"$+\infty - 2$" $0-2$

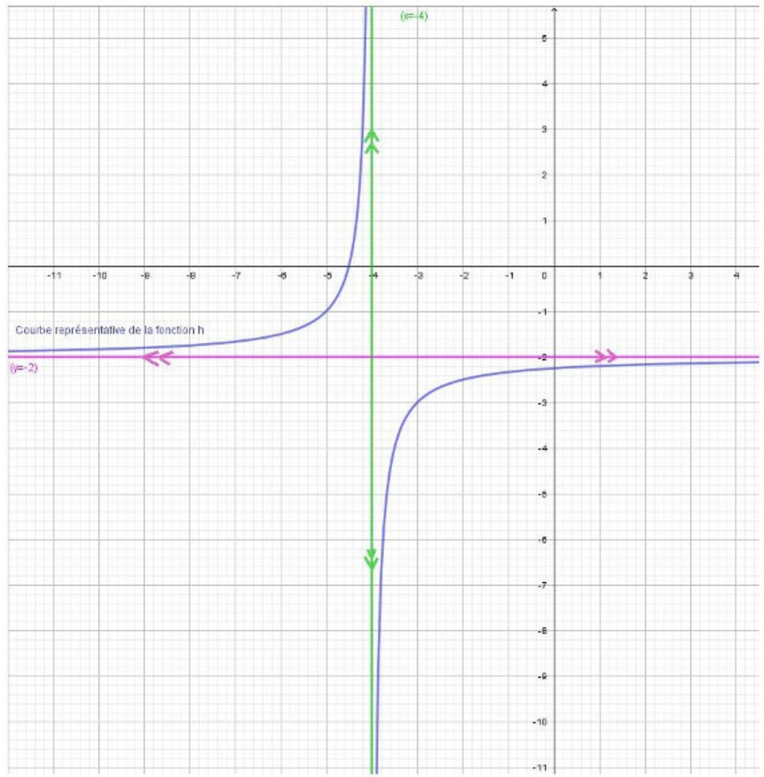
$0-2 \rightarrow$ "$-\infty - 2$"

et enfin, soustraire 2 à la formule de la fonction translate sa courbe de $-2\vec{j}$

J'ai mis entre guillemets les opérations avec $+\infty$ et $-\infty$ car on m'a toujours dit qu'il était "interdit" d'écrire de telles choses, mais personnellement, je ne vois pas pourquoi.

On a donc comme asymptotes à la courbe représentative de h les droites d'équations : $x = -4$ et $y = -2$.

On vérifie tout cela en faisant tracer les courbes de g et de h par la calculatrice ou une appli :



Exercice 3. 1) L'expression $\dfrac{-x-1}{(x-1)(x-2)}$ est définie

si et seulement si le dénominateur $(x-1)(x-2)$ est non nul.

Recherche des valeurs interdites : $(x-1)(x-2)=0 \overset{*}{\iff} x-1=0$ ou $x-2=0$

$\iff \underline{x=1}$ ou $\underline{x=2}$

* (Rappel : d'après la règle : " un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul ")

L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x-1}{(x-1)(x-2)}$ est donc $\boxed{\mathbb{R} - \{1;2\}} = D_f$

C'est-à-dire l'ensemble des réels privé des valeurs 1 et 2.
On peut aussi l'écrire : $\underbrace{]-\infty;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[}_{}$

$\cup$ " union " (Réunion de 3 intervalles)

2) Soit $x \in \mathbb{R}-\{1;2\}$. Réduisons au même dénominateur l'expression

il est important de toujours préciser pour quelles valeurs de x on travaille.

$\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$ où a et b sont 2 réels constants. (indépendants de x)

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a \times (x-2)}{(x-1)\times(x-2)} + \frac{b \times (x-1)}{(x-2)\times(x-1)}$$ car $x-1 \neq 0$ et $x-2 \neq 0$

d'après la règle : " On ne change pas la valeur d'une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie (ou divise) son numérateur $\boxed{\text{ET}}$ son dénominateur par un <u>même</u> nombre <u>non nul</u>. "

On développe au numérateur

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a \times (x-2)}{(x-1)\times(x-2)} + \frac{b \times (x-1)}{(x-2)\times(x-1)}$$

on garde le dénominateur comme factorisé.

$$= \frac{ax - 2a + bx - b}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(a+b)x - 2a - b}{(x-1)(x-2)}$$

Cette expression sera égale à $\dfrac{-x-1}{(x-1)(x-2)}$

si et seulement si $\begin{cases} a+b=-1 \\ \text{et} \\ -2a-b=-1 \end{cases}$ le coefficient de x ; le terme constant.

$$\begin{cases} a+b=-1 & L_1 \text{ (ligne 1)} \\ -2a-b=-1 & L_2 \text{ (ligne 2)} \end{cases}$$

$L_1 + L_2 \longrightarrow$ $-a = -2$ soit $\boxed{a=2}$
$(a-2a+b-b)$; $-1+(-1)$

$2L_1 + L_2 \longrightarrow$ $\boxed{b=-3}$
$2a-2a+2b-b$; $2\times(-1)+(-1)$

On aura donc $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2} = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}-\{1;2\}$

si et seulement si $\boxed{a=2 \text{ et } b=-3}$

Vérification $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \dfrac{3(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{2x-4-3x+3}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{-x-1}{(x-1)(x-2)}$

Exercice 4 : f est définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1) L'expression $\sqrt{x^2+1}$ sera définie si et seulement si x^2+1 est positif. Car la fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$

Or, d'après la règle des signes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$
↳ si x est positif, $x \times x$ aussi car + par + donne +
↳ si x est négatif, $x \times x$ est positif car − par − donne +.

donc $x^2+1 \geqslant 1$ (en ajoutant 1 aux 2 membres)
donc x^2+1 est positif. $\sqrt{x^2+1}$ est donc défini pour tout x réel. C'est pourquoi f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Soient a et b dans $[0;+\infty[$ tels que $\boxed{a<b}$

On a donc $0 \leq a < b$

on compose par la fonction carré

soit $0 \leq a^2 < b^2$ Car la fonction carré est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

on ajoute 1

soit $1 \leq a^2+1 \leq b^2+1$ en additionnant 1 aux 3 membres

On compose par la fonction racine carrée

soit $1 \leq \sqrt{a^2+1} \leq \sqrt{b^2+1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

donc : $\boxed{f(a) < f(b)}$

f conserve l'ordre sur $[0;+\infty[$, elle est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

3) Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-\infty;0]$ tels que $\boxed{a<b}$

On a donc $a < b \leq 0$

on compose par la fonction "carré"

soit $a^2 > b^2 \geqslant 0^2$
(car la fonction carré est strictement décroissante donc elle inverse l'ordre sur $]-\infty;0]$)

On ajoute 1 aux 3 membres

soit $a^2+1 > b^2+1 \geqslant 1$

on compose par la fonction racine carrée

soit $\sqrt{a^2+1} > \sqrt{b^2+1} \geqslant \sqrt{1}$

sans changer l'ordre, car la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

donc $\boxed{f(a) > f(b)}$

f inverse l'ordre sur $]-\infty;0]$, elle est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

4)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

On calcule l'image de 0 par f :

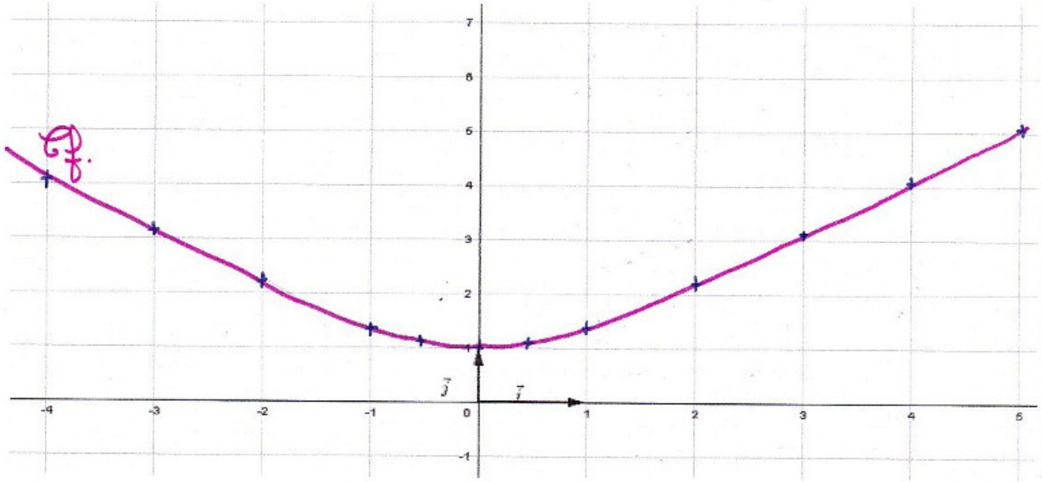
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

donc $f(0) = \sqrt{0^2+1} = \sqrt{1} = 1$

1ère S. Exercices sur le chapitre "fonctions usuelles" (corrigés) 5/25

1ÈRE S – EXERCICES SUR LE CHAPITRE « FONCTIONS USUELLES »

5) Tracer la courbe représentative de f dans le repère suivant :



Exercice 6. 1) $A = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ On utilise 2 règles :

* La règle fondamentale du calcul fractionnaire : On ne change pas la valeur d'une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie (ou divise) son numérateur $\boxed{\text{et}}$ son dénominateur par un même nombre non nul.

* La 3ème identité remarquable : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ quantités conjuguées

$A = \dfrac{2 \times (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)}$ On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

$A = \dfrac{2\sqrt{3}+2}{3-1}$ car $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2$

$A = \dfrac{2\sqrt{3}+2}{2}$

$\boxed{A = \sqrt{3}+1}$ ← car $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

donc $\dfrac{2\sqrt{3}+2}{2} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \dfrac{2}{2}$

$B = \dfrac{3}{2\sqrt{5}+4}$

$B = \dfrac{3\times(2\sqrt{5}-4)}{(2\sqrt{5}+4)\times(2\sqrt{5}-4)}$ $(a+b)(a-b)$

$B = \dfrac{6\sqrt{5}-12}{(2\sqrt{5})^2-4^2}$

$B = \dfrac{6\sqrt{5}-12}{4\times5-16}$ car $(a\times b)^2 = a^2 \times b^2$ la puissance se distribue sur la multiplication et la division.

$B = \dfrac{6\sqrt{5}-12}{4}$

$B = \dfrac{\cancel{2}\times3\sqrt{5}-\cancel{2}\times6}{\cancel{2}\times2}$ toujours $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$ et on en profite pour simplifier par 2

$\boxed{B = \dfrac{3\sqrt{5}-6}{2}}$ ou $\dfrac{3\sqrt{5}}{2} - 3$ si on préfère

$C = \dfrac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$ au numérateur : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$C = \dfrac{(3+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}$ au dénominateur : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$C = \dfrac{9+2\times3\sqrt{7}+7}{9-7}$

$C = \dfrac{16+6\sqrt{7}}{2}$

$\boxed{C = 8+3\sqrt{7}}$

Suite de l'exercice 6 question 1 :

$D = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Ici, pas besoin d'identité remarquable. Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$.

$D = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$

$\boxed{D = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

2) f est définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

Pour que l'expression soit définie, il est nécessaire :

* que le nombre sous la racine carré soit positif ou nul : ici, que $x \geqslant 0$
* que le dénominateur soit non nul : Or, pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$ donc $\sqrt{x}+2 \geqslant 2$. $\sqrt{x}+2$ est donc nécessairement non nul.

$\boxed{D_f = \mathbb{R}_+}$ (c'est le petit nom de $[0;+\infty[$)

g est définie par $g(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

Conditions d'existence : $x \geqslant 0$ et $\sqrt{x}+3 \neq 0$ ← toujours vrai puisque $\sqrt{x} \geqslant 0$

$\boxed{D_g = \mathbb{R}_+}$ aussi

$h(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}-1}$

Conditions d'existence :

* $x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$
* $\sqrt{x+1} - 1 \neq 0$

On résout : $\sqrt{x+1} - 1 = 0$ (E)

$(E) \iff \sqrt{x+1} = 1 \iff \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \text{et } x+1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \text{et } x = 0 \end{cases}$ ← zéro est valeur interdite

2 nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont.

Pour que $h(x)$ existe, il faut donc que $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

donc $\boxed{D_h = [-1;0[\cup]0;+\infty[}$

$k(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+4} - 1}$

Conditions d'existence : $\begin{cases} x^2+4 \geqslant 0 \rightarrow \text{vrai } \forall x \in \mathbb{R} \text{ car } x^2 \geqslant 0 \text{ donc } x^2+4 \geqslant 4 \\ \sqrt{x^2+4} - 1 \neq 0 \end{cases}$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+4} - 1 = 0$ (E_2)

$(E_2) \iff \sqrt{x^2+4} = 1$

$\iff x^2+4 = 1$

$\iff x^2 = -3$ ce qui est faux $\forall x \in \mathbb{R}$ puisque le carré d'un réel est toujours positif ou nul.

deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont.

Conclusion : $\boxed{D_k = \mathbb{R}}$ ($k(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$)

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+ - \{4\}$, $f(x) = \frac{1 \times (\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2) \times (\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

il faut ajouter la condition $\sqrt{x} - 2 \neq 0$ soit $x \neq 4$

Le souci ici, c'est qu'on a multiplié le numérateur et le dénominateur par un nombre qui peut s'annuler ! Remarquons que 4 est valeur interdite pour $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ alors qu'elle ne l'était pas pour $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$. Ici, on a changé d'ensemble de définition !

Suite de l'exercice 6. Question 2 b.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

Même problème que pour $f(x)$: je m'apprête à multiplier le numérateur et le dénominateur par $(\sqrt{x}-3)$.
Mais $\sqrt{x}-3$ doit être non-nul !

On résout $\sqrt{x}-3=0 \iff \sqrt{x}=3 \iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \text{et} \\ x=9 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ - \{9\}, \quad g(x) = \dfrac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$

privé de 9

$= \dfrac{2\sqrt{x}-6-x+3\sqrt{x}}{x-9}$

$\boxed{g(x) = \dfrac{-x+5\sqrt{x}-6}{x-9}}$

$\forall x \in \underbrace{[-1;0[\cup]0;+\infty[}_{D_h}, \quad h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}-1}$

On veut multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x+1}+1$. Or $\sqrt{x+1}+1=0 \iff \sqrt{x+1}=1$

$\iff \begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ x+1=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ x=0 \end{cases}$

pas de problème : zéro était déjà exclu de l'ensemble de définition.

$\forall x \in D_h, \quad h(x) = \dfrac{2(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$h(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1}+2}{x+1-1}$

$\boxed{h(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1}+2}{x}}$

Ici, l'ensemble de définition ne change pas.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad k(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+4}-1}$

On veut multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x^2+4}+1$. $\sqrt{x^2+4}+1$ doit donc être non nul.

C'est toujours le cas car $\forall x \in \mathbb{R}$:

$x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+4 \geqslant 4$

donc $\sqrt{x^2+4} \geqslant 2$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

donc $\sqrt{x^2+4}+1 \geqslant 3$

→ Ici, on ne change pas d'ensemble de définition.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad k(x) = \dfrac{3(\sqrt{x^2+4}+1)}{(\sqrt{x^2+4}-1)(\sqrt{x^2+4}+1)}$

$= \dfrac{3\sqrt{x^2+4}+3}{x^2+4-1}$

$\boxed{k(x) = \dfrac{3\sqrt{x^2+4}+3}{x^2+3}}$

Exercice 7. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |7-2x| + 2|x+5|$

ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |7-2x| = \begin{cases} 7-2x & \text{si } 7-2x \geqslant 0 \\ -7+2x & \text{si } 7-2x \leqslant 0 \end{cases}$

L'opposé de $7-2x$ est $-7+2x$ ou, si on préfère, $2x-7$

Résolvons $7-2x \geqslant 0 \iff 7 \geqslant 2x \iff \dfrac{7}{2} \geqslant x$

Suite de l'exercice 7 - 1 On aura donc :

$$|7-2x| = \begin{cases} 7-2x & \text{lorsque } x \leqslant \frac{7}{2} \\ -7+2x & \text{lorsque } x \geqslant \frac{7}{2} \end{cases}$$

On peut aussi se souvenir que $x \mapsto 7-2x$
soit $x \mapsto -2x+7$

est une fonction affine dont la représentation graphique est une droite au coefficient directeur négatif :

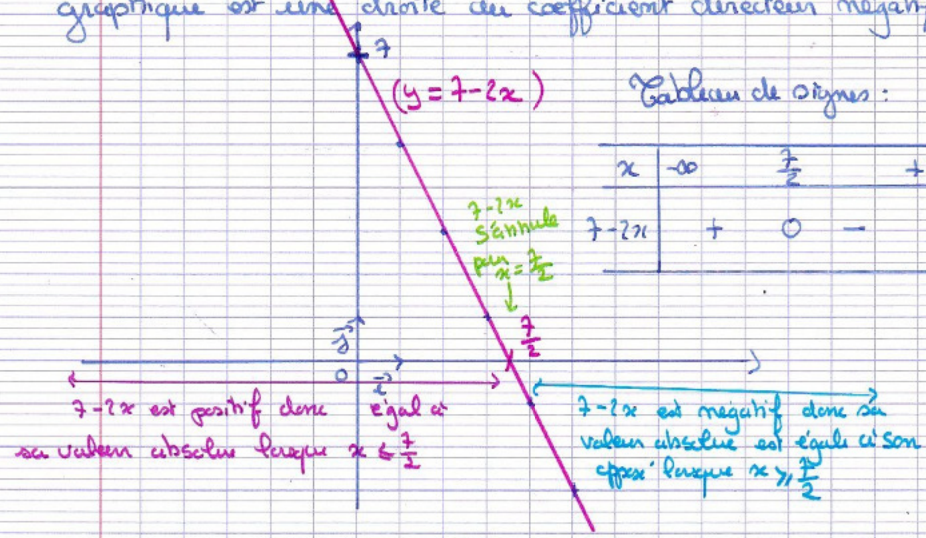
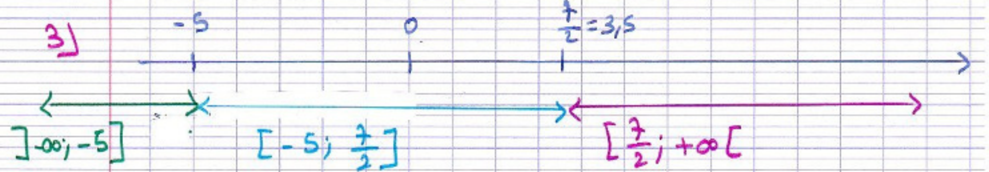


Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$7-2x$		$+$	0	$-$	

2) $$|x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{lorsque } x+5 \geqslant 0 \text{ soit } x \geqslant -5 \\ -x-5 & \text{lorsque } x+5 \leqslant 0 \text{ soit } x \leqslant -5 \end{cases}$$

3)



Pour écrire l'expression de $f(x)$, on distingue 3 cas, correspondant aux 3 intervalles délimités par les valeurs charnières -5 et $\frac{7}{2}$ trouvées aux questions précédentes :

1er cas : $x \in]-\infty ; -5]$ $\quad x \leqslant \frac{7}{2}$ donc $|7-2x| = 7-2x$

$x \leqslant -5$ donc $|x+5| = -x-5$

$$f(x) = |7-2x| + 2|x+5|$$
$$= 7-2x + 2(-x-5)$$
$$= 7-2x-2x-10$$

$$\boxed{f(x) = -4x-3}$$ il s'agit d'une fonction affine.

2ème cas : $x \in [-5 ; \frac{7}{2}]$ $\quad x \leqslant \frac{7}{2}$ donc $|7-2x| = 7-2x$

$x \geqslant -5$ donc $|x+5| = x+5$

$$f(x) = |7-2x| + 2|x+5|$$
$$= 7-2x + 2(x+5)$$
$$= 7 - \cancel{2x} + \cancel{2x} + 10$$

$$\boxed{f(x) = 17}$$ sur l'intervalle $[-5 ; \frac{7}{2}]$, f est une fonction constante toujours égale à 17.

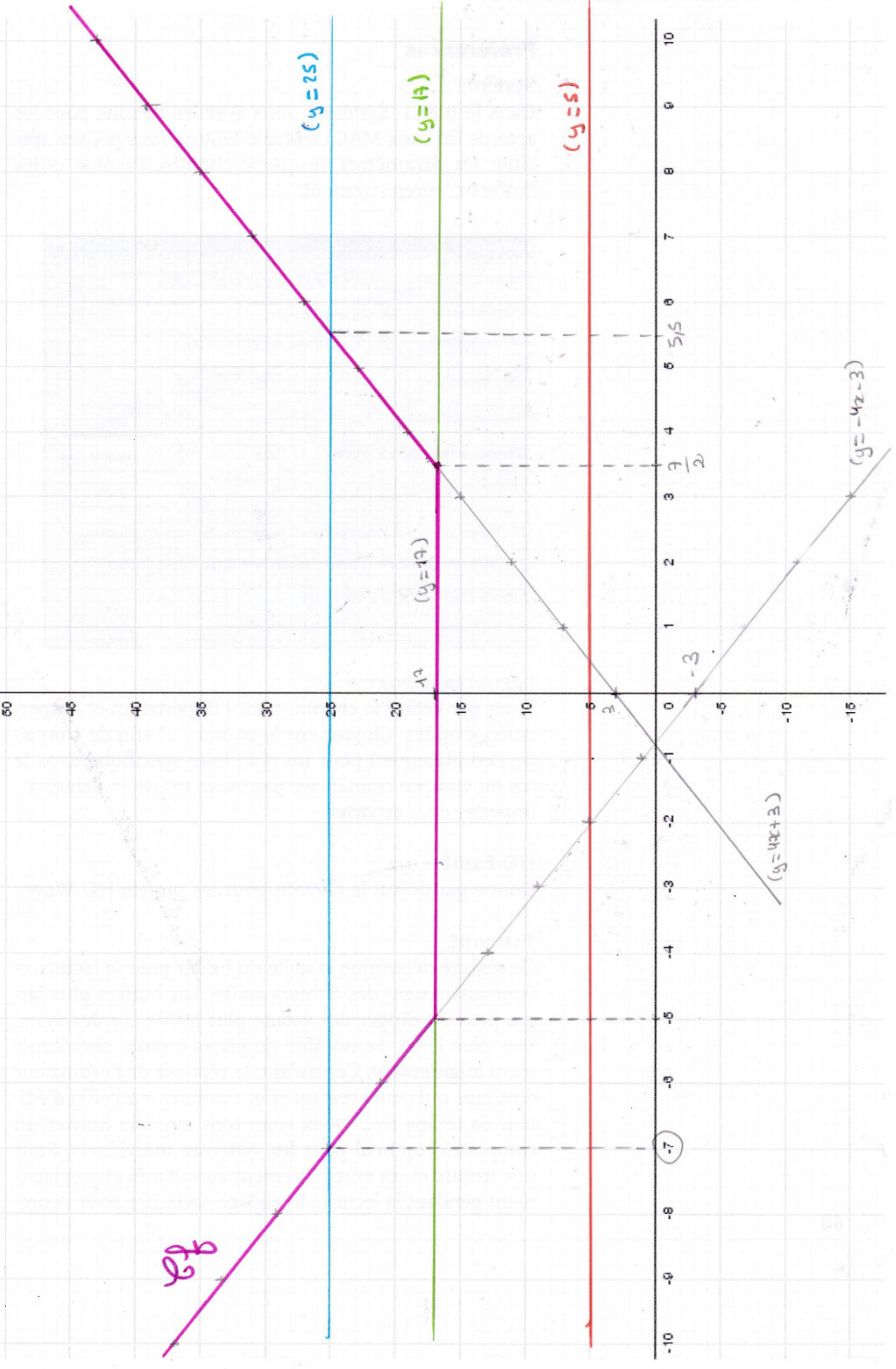
3ème cas : $x \in [\frac{7}{2} ; +\infty[$ $\quad x \geqslant \frac{7}{2}$ donc $|7-2x| = -7+2x$

$x \geqslant -5$ donc $|x+5| = x+5$

$$f(x) = |7-2x| + 2|x+5|$$
$$= -7+2x + 2(x+5)$$
$$= -7+2x+2x+10$$

$$\boxed{f(x) = 4x+3}$$ une autre fonction affine.

Exercice 7 - Question 4.



Suite de l'exercice 7, question 3) On a donc :

$$f(x) = \begin{cases} -4x-3 & \text{lorsque } x \in]-\infty; -5] \\ 17 & \text{lorsque } x \in [-5; \frac{3}{2}] \\ 4x+3 & \text{lorsque } x \in [\frac{3}{2}; +\infty[\end{cases}$$

5) D'après le graphique:

5 n'admet pas d'antécédent par f car la courbe représentative de f ne coupe pas la droite d'équation $y=5$.

17 admet pour antécédents par f tous les nombres de l'intervalle $[-5; \frac{7}{2}]$ puisque la droite d'équation $y=17$ et la courbe représentative de f ont en commun tous leurs points dont les abscisses sont dans l'intervalle $[-5; \frac{7}{2}]$

→ 17 aurait une infinité d'antécédents par f.

25 admet 2 antécédents par f : l'un dans l'intervalle $]-\infty; -5]$ qui semble être -7, l'autre dans l'intervalle $[\frac{7}{2}; +\infty[$ qui semble être 5,5.

En effet, la courbe représentative de la fonction f coupe par deux fois la droite d'équation $y=25$, ceux points d'abscisses -7 et 5,5, il semble.

* Cherchons par le calcul les antécédents de 5 par f :

* Sur l'intervalle $]-\infty; -5]$

$x \in]-\infty; -5]$. $f(x) = -4x-3$ d'après la question 3)

On résout dans $]-\infty; -5]$ l'équation $f(x) = 5$

$x \in]-\infty; -5]$, $f(x) = 5 \iff -4x-3 = 5$
$\iff -4x = 8$
$\iff \boxed{x = -2}$

$\notin$: "n'appartient pas à"

Seulement, $-2 \notin]-\infty; -5]$
Donc $f(x) = 5$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty; -5]$.

Donc 5 n'a pas d'antécédent par f dans l'intervalle $]-\infty; -5]$. (1)

$\forall$: "quel que soit"

* Sur l'intervalle $[-5; \frac{7}{2}]$

$\forall x \in [-5; \frac{7}{2}]$, $f(x) = 17$ et $17 \neq 5$
Donc 5 n'a pas d'antécédent dans l'intervalle $[-5; \frac{7}{2}]$ (2)

* Sur l'intervalle $[\frac{7}{2}; +\infty[$

$\forall x \in [\frac{7}{2}; +\infty[$, $f(x) = 4x+3$

$4x+3 = 5 \iff 4x = 2 \iff \boxed{x = \frac{1}{2}}$

Mais $\frac{1}{2} < \frac{7}{2}$ donc $\frac{1}{2} \notin [\frac{7}{2}; +\infty[$

L'équation $f(x) = 5$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[\frac{7}{2}; +\infty[$.

5 n'a donc pas d'antécédent par f dans cet intervalle. (3)

d'après (1), (2) et (3) $\boxed{\text{5 n'admet aucun antécédent par } f}$

(la réunion de ces 3 intervalles étant $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f)

Suite de l'exercice 7, question 5 Recherchons les antécédents de 17 par f.

* Sur l'intervalle $]-\infty;-5]$ $\forall x \in]-\infty;-5]$, $f(x)=-4x-3$

or $-4x-3=17 \iff -4x=20 \iff \boxed{x=-5}$

$-5 \in]-\infty;-5]$. Le nombre 17 admet donc un antécédent par f sur l'intervalle $]-\infty;-5]$, qui est -5. (4)

* Sur l'intervalle $[-5;\frac{7}{2}]$ $\forall x \in [-5;\frac{7}{2}]$, $f(x)=17$

Donc tous les nombres de l'intervalle $[-5;\frac{7}{2}]$ sont antécédents de 17 par f. (5)

* Sur l'intervalle $[\frac{7}{2};+\infty[$: $\forall x \in [\frac{7}{2};+\infty[$, $f(x)=4x+3$

or $4x+3=17 \iff 4x=14 \iff \boxed{x=\frac{14}{4}=\frac{7\times\cancel{2}}{2\times\cancel{2}}=\frac{7}{2}}$

$\frac{7}{2} \in [\frac{7}{2};+\infty[$. Donc 17 admet un antécédent par f sur l'intervalle $[\frac{7}{2};+\infty[$, qui est $\frac{7}{2}$. (6)

D'après (4), (5) et (6) le nombre 17 admet une infinité d'antécédents par f : tous les nombres compris entre -5 et $\frac{7}{2}$.

⚠ Bien que 17 admette une infinité d'antécédents par f, cela ne signifie pas que tous les réels sont antécédents de 17 : en effet, les nombres strictement inférieurs à -5 et ceux strictement supérieurs à $\frac{7}{2}$ ne sont pas antécédents de 17 par f.

Recherchons maintenant les antécédents de 25 par f :

* Sur l'intervalle $]-\infty;-5]$ $\forall x \in]-\infty;-5]$, $f(x)=-4x-3$

$-4x-3=25 \iff -4x=28 \iff \boxed{x=-7}$ $-7 \in]-\infty;-5]$

Le nombre 25 admet donc un antécédent sur l'intervalle $]-\infty;-5]$ qui est -7. (7)

* Sur l'intervalle $[-5;\frac{7}{2}]$: $\forall x \in [-5;\frac{7}{2}]$, $f(x)=17$

Or $17 \neq 25$. 25 n'admet donc pas d'antécédent par f sur cet intervalle. (8)

* Sur l'intervalle $[\frac{7}{2};+\infty[$: $\forall x \in [\frac{7}{2};+\infty[$, $f(x)=4x+3$

Or $4x+3=25 \iff 4x=22 \iff x=\frac{22}{4}=\frac{\cancel{2}\times 11}{\cancel{2}\times 2}=\frac{11}{2}=5{,}5$

$5{,}5 \in [\frac{7}{2};+\infty[$. Le nombre 25 admet donc un antécédent sur $[\frac{7}{2};+\infty[$, qui est $5{,}5$ (ou $\frac{11}{2}$) (9)

D'après (7), (8) et (9), le nombre 25 admet 2 antécédents par f : -7 et $\frac{11}{2}$

Les résultats obtenus par le calcul sont conformes aux conjectures faites par lecture graphique.

Exercice 9. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=\frac{-2x^2+5x+2}{x-1}$

1) Calculons : pour tout $x \neq 1$:

$$-2x+3+\frac{5}{x-1} = \frac{-2x(x-1)+3(x-1)+5}{x-1}$$

$$= \frac{-2x^2+2x+3x-3+5}{x-1}$$

$$= \frac{-2x^2+5x+2}{x-1}$$

$$= f(x)$$ C.Q.F.D

(car $-2x=\frac{-2x}{1}=\frac{-2x(x-1)}{1\times(x-1)}$)

Suite de l'exercice 8. 2) f est la somme des 2 fonctions :

$u : \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x+3 \end{array}$ et $v : \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{5}{x-1} \end{array}$

qui est une fonction affine du type $x \mapsto mx+p$ avec $m<0$, donc elle est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$

lui, elle aussi, est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ d'une part et sur $]1;+\infty[$ d'autre part, car :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

la courbe de cette fonction est celle de la fonction inverse translatée de $\vec{i}$ (dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$) → donc

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\frac{1}{x-1}$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

et $x \mapsto \dfrac{5}{x-1}$ a le même tableau de variations que $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ car multiplier une fonction par un nombre strictement positif ne change pas son sens de variations.

Nous avons donc : $\forall$ a et b de $]-\infty;1[$ tels que $a<b$

$$f(b)-f(a) = u(b)+v(b)-(u(a)+v(a))$$
$$= \underbrace{u(b)-u(a)}_{<0} + \underbrace{v(b)-v(a)}_{<0}$$

car u est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ — car v est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$

donc $f(b)-f(a)<0$ car c'est la somme de 2 nombres strictement négatifs.

soit $f(b)<f(a)$

f est une fonction qui inverse l'ordre sur l'intervalle $]-\infty;1]$. Elle est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

On montre de même qu'elle est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

→ Penser à vérifier ce qu'on vient de prouver en faisant tracer la courbe par la calculatrice ou une appli ou un logiciel.

Exercice 9 : On sait que le tableau de variations de la fonction f définie sur $[-5;4]$ est le suivant :

x	-5		-1		3		4
$f(x)$	5	↘	-3	↗	2	↘	0

1) $\forall x \in [-5;4]$, $g(x) = 2f(x)+3$

x	-5		-1		3		4
$f(x)$	13	↘	-3	↗	7	↘	3

$2\times5+3=13$
$2\times(-3)+3=-$
$2\times2+3=7$
$2\times0+3=3$

(Le sens de variation reste inchangé si on multiplie la formule de la fonction par un nombre strictement positif et si on lui ajoute une constante. Il faut cependant adapter les valeurs des images dans le tableau.)

Suite de l'exercice 9. 2) On sait que $h(x) = \dfrac{1}{f(x)+3}$

Recherche des valeurs interdites : $f(x)+3$ doit être différent de 0, soit $f(x) \neq -3$

D'après le tableau de variations de f, on sait que, sur l'intervalle $[-5;4]$, $f(x) = -3$ si et seulement si $x = -1$ - -1 est donc valeur interdite pour la fonction h. h est donc définie sur $[-5;-1[\cup]-1;4]$.

Nous étudierons donc ses variations sur chacun des intervalles suivants : $[-5;-1[$, $]-1;3]$ et $[3;4]$

* $\forall$ a et b $\in [-5;-1[$ tels que $a<b$, on a :

$$-5 \leq a < b < -1$$

soit $f(-5) \geqslant f(a) > f(b) > f(-1)$ car f est strictement décroissante sur $[-5;-1[$

soit $5 \geqslant f(a) > f(b) > -3$

soit $\boxed{8 \geqslant f(a)+3 > f(b)+3 > 0}$ en ajoutant 3 aux 2 membres

donc $\dfrac{1}{8} \leq \dfrac{1}{f(a)+3} < \dfrac{1}{f(b)+3}$ en composant par la fonction inverse qui est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ (on est entre 0 au sens strict et 8 donc on est bien dans l'intervalle $]0;+\infty[$)

soit $\dfrac{1}{8} \leq h(a) < h(b)$

h conserve l'ordre sur $[-5;-1[$, elle est donc strictement croissante sur $[-5;-1[$

* $\forall$ a et b dans l'intervalle $]-1;3]$ tels que $a<b$:

$-1 < a < b \leq 3 \iff f(-1) < f(a) < f(b) \leq f(3)$

car f est strictement croissante sur $[-1;3]$

soit $-3 < f(a) < f(b) \leq 2$

soit $0 < f(a)+3 < f(b)+3 \leq 5$

en ajoutant 3 aux 4 membres

On se trouve entre 0 au sens strict et 5 au sens large donc on est dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Composons par la fonction inverse : On peut déduire de ce qui précède que :

$$\frac{1}{f(a)+3} > \frac{1}{f(b)+3} \geqslant \frac{1}{5}$$

car la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

soit $h(a) > h(b) \geqslant \dfrac{1}{5}$

h inverse l'ordre sur l'intervalle $]-1;3]$ (on avait $a<b$ et on a $h(a) > h(b)$), elle est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

* $\forall$ a et b dans l'intervalle $[3;4]$ tels que $a<b$, on a :

$3 \leq a < b \leq 4 \iff f(3) \geqslant f(a) > f(b) \geqslant f(4)$

car f est strictement décroissante donc elle inverse l'ordre sur l'intervalle $[3;4]$.

Suite de l'exercice 9 soit $2 \geqslant f(a) > f(b) \geqslant 0$

soit $\underline{\underline{5}} \geqslant f(a)+3 > f(b)+3 \geqslant \underline{\underline{3}}$
en additionnant 3 aux membres

On est entre 3 et 5 donc sur l'intervalle $]0;+\infty[$ sur lequel la fonction inverse est strictement décroissante. On peut donc composer par la fonction inverse en changeant le sens des inégalités.
On obtient :

$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{f(a)+3} < \frac{1}{f(b)+3} \leqslant \frac{1}{3}$$

soit $$\frac{1}{5} \leqslant h(a) < h(b) \leqslant \frac{1}{3}$$

On avait $a<b$, on obtient $h(a)<h(b)$, donc la fonction $\underline{h}$ conserve l'ordre donc est strictement croissante sur l'intervalle $[3;4]$.

On calcule : $h(-5) = \frac{1}{f(-5)+3} = \frac{1}{5+3} = \frac{1}{8}$

$h(3) = \frac{1}{f(3)+3} = \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}$

$h(4) = \frac{1}{f(4)+3} = \frac{1}{0+3} = \frac{1}{3}$

On obtient :

x	-5		-1		3		4
$h(x)$	$\frac{1}{8}$	↗	‖	↘	$\frac{1}{5}$	↗	$\frac{1}{3}$

Exercice 10 : 1) On sait que f est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x+1} - 9$

Valeur interdite : $x+1=0 \iff x=-1$
f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

d'après le cours

Donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\frac{1}{x+1}$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Car en remplaçant x par $x+1$ dans la formule de la fonction, on translate la courbe du vecteur $-\vec{i}$ (dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$)

Donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)=\frac{1}{x+1}-9$	-9	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-9

Car en soustrayant 9 à la formule de la fonction, on translate la courbe du vecteur $-9\vec{j}$ (dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$)

f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

→ à vérifier en faisant tracer la courbe !

Suite de l'exercice 10. 2) On sait que g est définie par la formule $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

Pour que $g(x)$ soit définie, il faut et il suffit que

$x^2 - 16 \geq 0$ soit $x^2 - 4^2 \geq 0$
soit $(x-4)(x+4) \geq 0$

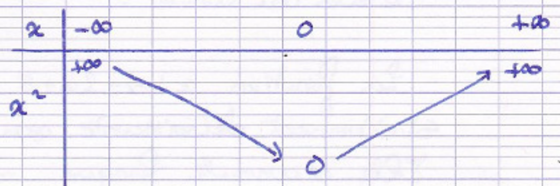
Tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		$+4$		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

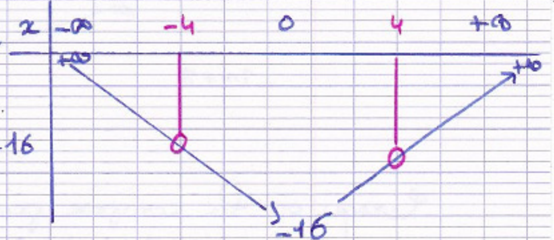
$x^2 - 16$ est positif si et seulement si $x \leq -4$ ou $x \geq 4$

La fonction g est donc définie sur $]-\infty ; -4] \cup [4 ; +\infty[$.

D'après le cours, on sait que :

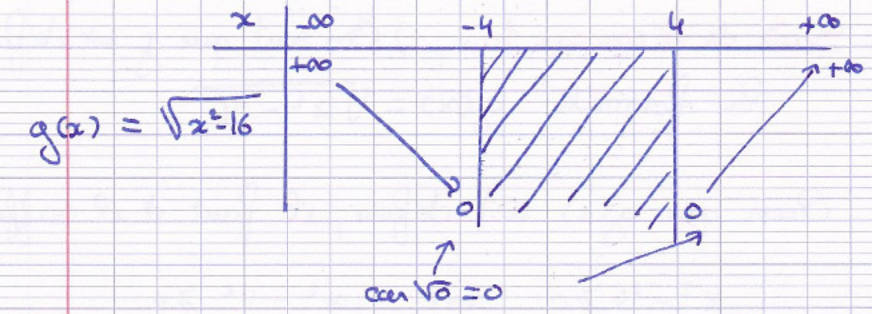


En soustrayant 16 à la formule de la fonction, on translate sa courbe du vecteur $-16\vec{j}$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'où :



On compose maintenant par la fonction racine carrée, qui est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$

⚠ La fonction n'est alors plus définie pour les valeurs de x telles que $x^2 - 16 < 0$.



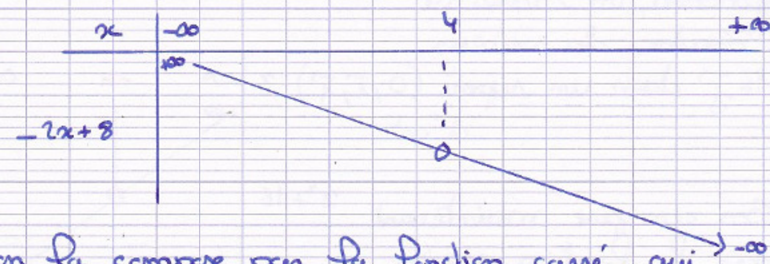
g est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; -4]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[4 ; +\infty[$. → à vérifier en faisant tracer la courbe.

3) On sait que h est la fonction définie par
$h(x) = (-2x + 8)^2$

h est définie sur $\mathbb{R}$, car, pour tout x réel, on peut calculer $-2 \times x$, puis ajouter 8, puis élever au carré.

La fonction $x \mapsto -2x + 8$ est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. (puisque $-2 < 0$).
Elle s'annule lorsque $-2x + 8 = 0 \iff -2x = -8 \iff x = 4$

On a donc :



Lorsqu'on la compose par la fonction carré, qui est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ puis strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, il faut donc distinguer : le cas où $x \leq 4$, car sur l'intervalle $]-\infty ; 4]$, $-2x + 8 \geq 0$, et le

Suite de l'exercice 10 : cas où $x \geq 4$, car sur $[4;+\infty[$, $-2x+8 \leq 0$.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-2x+8$	$+\infty$ ↘	$+$	0	$-$	↘ $-\infty$
$h(x)=(-2x+8)^2$	↘		0		↗

car $(0)^2=0$

sur l'intervalle $]-\infty;4]$, $-2x+8 \geq 0$ et la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc la composition par la fonction carré conserve l'ordre, donc le sens de variation.

sur l'intervalle $[4;+\infty[$, $-2x+8 \leq 0$ et la fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$. Donc la composition par la fonction carré change l'ordre (inverse) et inverse donc le sens de variations.

→ à vérifier en faisant tracer la courbe !

Exercice 11 : On sait que f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2-x}} - 4$$

a) f sera définie lorsque : $2-x \geq 0$ et $\sqrt{2-x} \neq 0$

Ce qui est sous la racine doit être positif ou nul

Ce qui est au dénominateur doit être non nul.

* $2-x \geq 0 \iff 2 \geq x$
$\iff x \in]-\infty;2]$

* $\sqrt{2-x} = 0 \iff 2-x=0$ car le seul nombre dont la racine carrée vaut 0 est zéro.
$\iff 2 = x$ donc 2 est valeur interdite.

Pour que $f(x)$ soit défini, il faut et il suffit que :

$x \in]-\infty;2]$ et que $x \neq 2$

Soit que $x \in]-\infty;2[$.

L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $\boxed{]-\infty;2[}$.

b) $x \mapsto 2-x$ est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car le coefficient de x est -1 qui est strictement négatif.

car $2-x$ peut s'écrire $-1x+2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2-x$	↘	$+$	0	$-$	↘
$\sqrt{2-x}$	↘ car on compose par la fonction $\sqrt{\ }$ qui est ↗ sur $[0;+\infty[$		0	pas défini	
$\frac{1}{\sqrt{2-x}}$	↗ car on compose par la fonction inverse qui est ↘ sur $[0;+\infty[$		||		
$f(x)=\frac{3}{\sqrt{2-x}}-4$	↗		||		

valeur interdite

le tableau nous permet de voir que $\sqrt{2-x}$ a des valeurs positives

f est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$, mais il n'est pas au programme d'en déterminer les limites aux bornes.

→ On vérifie en faisant tracer la courbe.

Suite de l'exercice 11. 1) c) On sait que : f est strictement croissante sur $]-\infty ; 2[$.
Or -2 et 1 appartiennent à cet intervalle.

$$-2 \leq x \leq 1 \iff f(-2) \leq f(x) \leq f(1)$$

Puisque f est strictement croissante donc conserve l'ordre sur $]-\infty ; 2[$.

$$f(-2) = \frac{3}{\sqrt{2-(-2)}} - 4 = \frac{3}{\sqrt{4}} - 4 = \frac{3}{2} - 4$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{4 \times 2}{1 \times 2} = \frac{3}{2} - \frac{8}{2} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

$$f(1) = \frac{3}{\sqrt{2-1}} - 4 = \frac{3}{\sqrt{1}} - 4 = 3 - 4 = \boxed{-1}$$

On a donc, pour tout x de $[-2;1]$, $\boxed{-\frac{5}{2} \leq f(x) \leq -1}$

2) On sait que g est définie par la formule :

$$\boxed{g(x) = \frac{2x-1}{x+1}}$$

a) Valeur interdite : $x+1=0 \iff x=-1$ $\boxed{D_g = \mathbb{R} - \{-1\}}$

b) Soient a et $b \in D_g$

$$g(b) - g(a) = \frac{2b-1}{b+1} - \frac{2a-1}{a+1}$$
$$= \frac{(2b-1)(a+1)}{(b+1)(a+1)} - \frac{(2a-1)(b+1)}{(a+1)(b+1)}$$

On peut car $a+1 \neq 0$ puisque $a \neq -1$ et car $b+1 \neq 0$ puisque $b \neq -1$.

On vient d'appliquer la règle fondamentale du calcul fractionnaire : "On ne change pas la valeur d'une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie ou divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul"

Maintenant : * On garde le dénominateur commun factorisé
* On développe et réduit le numérateur :

$$g(b) - g(a) = \frac{(2b-1)(a+1) - (2a-1)(b+1)}{(a+1)(b+1)}$$
$$= \frac{2ab - a + 2b - 1 - [2ab + 2a - b - 1]}{(a+1)(b+1)}$$

⚠ quand il y a un $-$ devant le produit de parenthèses, je prends la précaution de développer dans un crochet pour distribuer le $-$ dans un second temps. C'est pour éviter des erreurs de signes.

$$= \frac{\cancel{2ab} - a + 2b - \cancel{1} - \cancel{2ab} - 2a + b + \cancel{1}}{(a+1)(b+1)}$$

$$g(b) - g(a) = \frac{-3a + 3b}{(a+1)(b+1)}$$

$$\boxed{g(b) - g(a) = \frac{3(b-a)}{(a+1)(b+1)}}$$

→ j'ai pu vérifier mon calcul dans l'appli XCas Pad en rentrant :

$g(x) := \frac{2*x-1}{x+1}$ puis factor$(g(b)-g(a))$

ou plutôt $g(x) := (2x-1)/(x+1)$

Suite de l'exercice 11 - 2) c) On sait que, d'après 2b), $\forall a \neq -1$ et $b \neq -1$:

$$\boxed{g(b) - g(a) = \frac{3(b-a)}{(a+1)(b+1)}}$$

Lorsque a et b sont dans l'intervalle $]-1;+\infty[$ et que $a \leq b$

On a : $b - a \geqslant 0$ $+$ puisque $a \leq b$

$a+1 > 0$ $+$ puisque $a \in]-1;+\infty[$

et $b+1 > 0$ $+$ puisque $b \in]-1;+\infty[$

D'après la règle des signes, $g(b) - g(a)$ est positif.

détail :

$$\frac{\overset{+}{3}\ \overset{+}{(b-a)}}{\underset{+}{(a+1)}\underset{+}{(b+1)}}$$

$g(b) - g(a) \geqslant 0 \iff g(b) \geqslant g(a)$

$\iff g(a) \leq g(b)$

On avait $a \leq b$, on a $g(a) \leq g(b)$

g conserve l'ordre sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

Elle est donc croissante sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

d) Lorsque a et b sont dans l'intervalle $]-\infty;-1[$ avec $a < b$, on a :

$b - a > 0$ car $a < b$

$a+1 < 0$ car $a \in]-\infty;-1[$

$b+1 < 0$ car $b \in]-\infty;-1[$

donc $g(b) - g(a) = \boxed{\dfrac{\overset{+}{3}\ \overset{+}{(b-a)}}{\underset{-}{(a+1)}\underset{-}{(b+1)}}} > 0$

d'après la règle des signes.

On a donc aussi $g(a) < g(b)$

Donc g est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.

Exercice 12 1) (E) $|5t+4| = |6t-9|$

Deux nombres ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

$$|5t+4| = |6t-9| \iff \begin{cases} 5t+4 = 6t-9 \\ \text{ou} \\ 5t+4 = -(6t-9) \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} 13 = t \\ \text{ou} \\ 5t+4 = -6t+9 \end{cases}$$ ← j'ai ajouté 9 et retranché $5t$ aux 2 membres de $5t+4 = 6t-9$

$$(E) \iff \begin{cases} t = 13 \\ \text{ou} \\ 11t = 5 \end{cases}$$ ← j'ai ajouté $6t$ et soustrait 4 aux 2 membres de $5t+4 = -6t+9$

$(E) \iff \boxed{t = 13}$ ou $\boxed{t = \dfrac{5}{11}}$

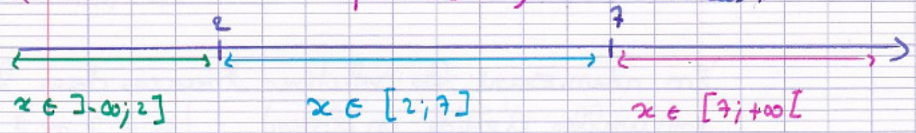
Suite de l'exercice 12. 2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$(I_1) \quad |x-2| \leq |7-x|$

Ici, on va devoir résoudre cas par cas en écrivant nos expressions sans les valeurs absolues.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ lorsque } x-2 \geq 0 \text{ soit } x \geq 2 \\ -x+2 \text{ lorsque } x-2 \leq 0 \text{ soit } x \leq 2 \end{cases}$$

$$|7-x| = \begin{cases} 7-x \text{ lorsque } 7-x \geq 0 \text{ soit } 7 \geq x \\ -7+x \text{ lorsque } 7-x \leq 0 \text{ soit } 7 \leq x \end{cases}$$

$\left(\text{car } |x| = \begin{cases} x \text{ lorsque } x \geq 0 \\ -x \text{ lorsque } x \leq 0 \end{cases} \right)$ On distingue donc 3 cas :



* lorsque $x \in]-\infty;2]$: $|x-2| = -x+2$ car $x \leq 2$
$|7-x| = 7-x$ car $x \leq 7$

Donc (I_1) s'écrit $\cancel{-x}+2 \leq 7 \cancel{-x}$ $\quad +x$
soit $2 \leq 7$ qui est toujours vrai

Donc tous les nombres de l'intervalle $]-\infty;2]$ sont solutions.

* lorsque $x \in [2;7]$: $|x-2| = x-2$ car $x \geq 2$
$|7-x| = 7-x$ car $x \leq 7$

L'inéquation (I_1) s'écrit donc $x-2 \leq 7-x$
qui équivaut à $2x \leq 9$ $\quad +x+2$
soit $x \leq \frac{9}{2}$ $\quad :2$

On garde donc comme solutions tous les nombres de l'intervalle $[2;7]$ qui sont plus petits que $\frac{9}{2} = 4{,}5$,

c'est-à-dire l'intervalle $[2;\frac{9}{2}]$

* lorsque $x \in [7;+\infty[$, on a : $|x-2| = x-2$ car $x \geq 2$
$|7-x| = -7+x$ car $x \geq 7$

(I_1) s'écrit : $x-2 \leq -7+x \iff -2 \leq -7$
en soustrayant x aux 2 membres
Ce qui est toujours faux
→ donc il n'y a pas de solution dans cet intervalle.

En réunissant les solutions trouvées dans les 3 intervalles d'étude, on obtient : $\boxed{S =]-\infty;\frac{9}{2}]}$

→ On vérifie ce résultat en faisant tracer les courbes des fonctions $x \mapsto |x-2|$ et $x \mapsto |7-x|$ et en observant pour quelles valeurs de x la première est en-dessous de la 2ème.

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) :

$(E_2) \quad 2|x+1| - |x-3| = |5-x|$

Ici, on ne peut pas utiliser la règle des nombres qui ont la même valeur absolue. On doit donc écrire les expressions sans valeurs absolues en distinguant les intervalles, d'après la règle :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Suite de l'exercice 12 : $|x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ si } x+1 \geq 0 \text{ soit } x \geq -1 \\ -x-1 \text{ si } x+1 \leq 0 \text{ soit } x \leq -1 \end{cases}$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 \text{ si } x-3 \geq 0 \text{ soit } x \geq 3 \\ -x+3 \text{ si } x-3 \leq 0 \text{ soit } x \leq 3 \end{cases}$$

$$|5-x| = \begin{cases} 5-x \text{ si } 5-x \geq 0 \text{ soit } 5 \geq x \\ -5+x \text{ si } 5-x \leq 0 \text{ soit } 5 \leq x \end{cases}$$

sur l'intervalle :	$]-\infty;-1]$	$[-1;3]$	$[3;5]$	$[5;+\infty[$
$\lvert x+1\rvert =$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x-3\rvert =$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$	$x-3$
$\lvert 5-x\rvert =$	$5-x$	$5-x$	$5-x$	$-5+x$

* Si $x \in]-\infty;-1]$ (E_1) s'écrit $2(-x-1)-(-x+3) = 5-x$
soit $-2x-2+x-3 = 5-x$
soit $-x-5 = 5-x$
soit $-5 = 5$
Ce qui est toujours faux $\rightarrow$ il n'y a donc pas de solution dans cet intervalle.

* Sur l'intervalle $[-1;3]$ (E_1) s'écrit $2(x+1)-(-x+3) = 5-x$
soit $2x+2+x-3 = 5-x$
soit $3x-1 = 5-x$
soit $4x = 6$
soit $x = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} = 1{,}5 \in [-1;3]$ donc, sur cet intervalle, nous avons une solution : $\frac{3}{2}$

* Sur l'intervalle $[3;5]$, (E_1) s'écrit :
$2(x+1)-(x-3) = 5-x \iff 2x+2-x+3 = 5-x$
$\iff x+5 = 5-x$
$\iff 2x = 0$
$\iff x = 0$

mais 0 n'est pas dans l'intervalle $[3;5]$.
$\rightarrow$ il n'y a donc pas de solution dans cet intervalle.

* Sur l'intervalle $[5;+\infty[$, (E_1) s'écrit :

$2(x+1)-(x-3) = -5+x \iff 2x+2-x+3 = x-5$
$\iff x+5 = x-5$
$\iff 5 = -5$
qui est toujours faux
Il n'y a donc pas de solution sur cet intervalle.

En réunissant les résultat obtenus sur les 4 intervalles de recherche, on trouve que (E_1) admet 1 solution :

$$\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_2)

$$\boxed{(I_2) \quad |3x-6|-|x-3|-|x+1| \leq 2-x}$$

Ici encore, on va passer par l'écriture sans les valeurs absolues en distinguant les intervalles.

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 \text{ lorsque } 3x-6 \geq 0 \text{ soit } 3x \geq 6 \text{ soit } x \geq 2 \\ -3x+6 \text{ lorsque } 3x-6 \leq 0 \text{ soit } 3x \leq 6 \text{ soit } x \leq 2 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 \text{ lorsque } x-3 \geq 0 \text{ soit } x \geq 3 \\ -x+3 \text{ lorsque } x-3 \leq 0 \text{ soit } x \leq 3 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ lorsque } x+1 \geq 0 \text{ soit } x \geq -1 \\ -x-1 \text{ lorsque } x+1 \leq 0 \text{ soit } x \leq -1 \end{cases}$$

Suite de l'exercice 12 question 4 :

Sur l'intervalle	$]-\infty;-1]$	$[-1;2]$	$[2;3]$	$[3;+\infty[$
$\lvert 3x-6\rvert$	$-3x+6$	$-3x+6$	$3x-6$	$3x-6$
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$

* Sur l'intervalle $]-\infty;-1]$, (I_2) s'écrit :

(I_2) $-3x+6-(-x+3)-(-x-1) \leq 2-x$

$(I_2) \iff -3x+6+x-3+x+1 \leq 2-x$

$(I_2) \iff -x+4 \leq 2-x$

$(I_2) \iff 4 \leq 2$ toujours faux

Aucun nombre de l'intervalle $]-\infty;-1]$ n'est solution.

* Sur l'intervalle $[-1;2]$, (I_2) s'écrit

(I_2) $-3x+6-(-x+3)-(x+1) \leq 2-x$

$(I_2) \iff -3x+6+\cancel{x}-3-\cancel{x}-1 \leq 2-x$

$(I_2) \iff -3x+2 \leq 2-x$

$(I_2) \iff -2x \leq 0$

$(I_2) \iff x \geq 0$

Ce qui est vrai, sur cet intervalle, pour les valeurs de x de l'intervalle $[0;2]$

* Sur l'intervalle $[2;3]$ (I_2) s'écrit :

(I_2) $3x-6-(-x+3)-(x+1) \leq 2-x$

$(I_2) \iff 3x-6+\cancel{x}-3-\cancel{x}-1 \leq 2-x$

$(I_2) \iff 3x-10 \leq 2-x$

$(I_2) \iff 4x \leq 12$

$(I_2) \iff x \leq 3$

donc tous les nombres de l'intervalle $[2;3]$ sont solutions.

* Sur l'intervalle : $[3;+\infty[$: (I_2) s'écrit :

(I_2) $(3x-6)-(x-3)-(x+1) \leq 2-x$

$(I_2) \iff 3x-6-x+3-x-1 \leq 2-x$

$(I_2) \iff x-4 \leq 2-x$

$(I_2) \iff 2x \leq 6$

$(I_2) \iff x \leq 3$

Seul 3 est solution dans cet intervalle.

En réunissant les solutions trouvées sur nos 4 intervalles d'étude, on trouve : $S = [0;3]$

Ce qu'on peut vérifier en comparant les positions relatives des courbes des fonctions :

$x \mapsto |3x-6|-|x-3|-|x+1|$

et $x \mapsto 2-x$

Exercice 13 f et g sont les fonctions définies par :

$f(x)=\sqrt{-x+4}$ $\qquad g(x)=\sqrt{x-2}$

1) $\sqrt{X}$ est défini si et seulement si $X \geq 0$.

Ainsi, $f(x)$ sera défini si et seulement si :

$-x+4 \geq 0$ soit $-x \geq -4$ soit $x \leq 4$ $\quad D_f =]-\infty;4]$

Et $g(x)$ sera défini si et seulement si :

$x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$ $\quad D_g = [2;+\infty[$

2) Etudier la position relative des courbes C_f et C_g

Suite de l'exercice 13 question 1 : revient à étudier le signe de $f(x)-g(x)$.

$f(x)-g(x)$ n'est défini que sur $D_f \cap D_g$

inter

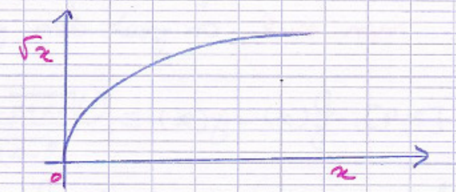
soit sur $]-\infty;4] \cap [2;+\infty[$ soit sur $[2;4]$

(Sur $]-\infty;2[$, on aura une courbe pour f mais pas pour g)
(Sur $]4;+\infty[$, on aura une courbe pour g mais pas pour f)

$\forall x \in [2;4],\ f(x)-g(x) = \sqrt{-x+4} - \sqrt{x-2}$

Pour étudier le signe de cette différence, je souhaite utiliser sa quantité conjuguée : $\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2}$ dont nous connaissons le signe : en effet, pour tout x de $[2;4]$, $\sqrt{-x+4}$ et $\sqrt{x-2}$ sont définies et donc positives d'après l'étude de la fonction racine carrée :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} \geq 0$



$\forall x \in [2;4],\ f(x)-g(x) = \dfrac{\sqrt{-x+4} - \sqrt{x-2}}{1}$

$= \dfrac{(\sqrt{-x+4} - \sqrt{x-2}) \times (\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2})}{1 \times (\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2})}$

D'après la règle fondamentale du calcul fractionnaire :
on ne change pas la valeur d'une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.
→ il nous faut donc nous assurer que $\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2}$ est non nul !

À quelle condition serait-il nul ?
Si et seulement si $\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2} = 0$

soit $\underbrace{\sqrt{-x+4}}_{\text{positif ou nul}} = \underbrace{-\sqrt{x-2}}_{\text{négatif ou nul}}$

soit $\sqrt{-x+4} = 0$ et $\sqrt{x-2} = 0$

soit $-x+4 = 0$ et $x-2 = 0$
(car le seul nombre dont la racine carrée soit 0 est 0)

soit $-x = 4$ et $x = 2$

soit $x = -4$ et $x = 2$

Mais x ne saurait être à la fois égal à -4 et à 2.
Ces 2 conditions sont incompatibles !

On vient de prouver que $\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2}$ est toujours non nul, on peut donc poursuivre le calcul de $f(x)-g(x)$:

$\forall x \in [2;4],\ f(x)-g(x) = \dfrac{(\sqrt{-x+4} - \sqrt{x-2})(\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2}}$

Le numérateur est de la forme $(a-b)(a+b)$.
On le développe à l'aide de la 3ème identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$\forall x \in [2;4],\ f(x)-g(x) = \dfrac{(\sqrt{-x+4})^2 - (\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2}}$

$= \dfrac{-x+4 - (x-2)}{\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2}}$

$= \dfrac{-x+4-x+2}{\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2}}$

$= \dfrac{-2x+6}{\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2}}$

(suite de l'exercice 13)

Le dénominateur est toujours strictement positif comme nous l'avons prouvé précédemment.

Mais quel est le signe de $-2x+6$ lorsque $x \in [2;4]$?

$-2x+6 \geq 0 \iff -2x \geq -6$

(sera positif) $\overset{:(-2)}{\iff} x \leq 3$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	2		3		4
$-2x+6$		+	0	−	
$\sqrt{-x+4} + \sqrt{x-2}$		+		+	
$f(x) - g(x)$		+	0	−	

$f(x) - g(x)$ sera positif si et seulement si $x \in [2;3]$
nul si $x = 3$
négatif si $x \in [3;4]$

Ce qui signifie que C_f se trouvera au-dessus de C_g pour les abscisses entre 2 et 3,
que C_f et C_g se couperont en leur point d'abscisse 3
et que C_f sera en-dessous de C_g pour les abscisses comprises entre 3 et 4.

→ à vérifier en faisant tracer les courbes représentatives de f et de g par la calculatrice ou une appli.

Exercice 15 : Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$.
Sa courbe représentative est la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 2x^2 - 6x + 1$.

Soit g la fonction affine définie par $g(x) = -x+4$
Sa courbe représentative est la droite (d) d'équation $y = -x+4$.

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ car ce sont des fonctions polynômes.

Etudions le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x + 1 - (-x+4)$
$= 2x^2 - 6x + 1 + x - 4$
$= \boxed{2x^2 - 5x - 3}$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49$

On a 2 racines à ce trinôme : $x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{49}}{2\times2} = \dfrac{5-7}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

et $x_2 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2} = \dfrac{5+7}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$

Le coefficient de x^2 étant positif, on a :

x	$-\infty$		$-0,5$		3		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{P}$ sera donc au-dessus de (d) pour les x de l'ensemble $]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]3 ; +\infty[$
en-dessous de (d) pour les x de l'intervalle $[-\frac{1}{2} ; 3]$

$\mathcal{P}$ et (d) auront pour points communs leurs points d'abscisses $-\frac{1}{2}$ et 3.

Exercice 15. 1) $M \in [OS]$. $OS = 2$ puisque c'est le rayon d'un cercle de diamètre $RS = 4$.

$x = OM$ donc $x \in [0;2]$

$f(x)$ est l'aire du triangle OBC, qui existe (bien qu'il soit aplati lorsque M est en O ou en S) quelle que soit la position de M sur [OS] donc quel que soit x appartenant à l'intervalle $[0;2]$

L'ensemble de définition de la fonction f est donc $\underbrace{[0;2]}_{I}$

2) En reproduisant la figure sur geogebra, en faisant afficher l'aire du triangle et en déplaçant le point M sur [OS], il semble que la valeur maximale atteinte par l'aire du triangle soit $m = 2$.

3) $\forall x \in I$, l'aire du triangle est égale à $\boxed{\frac{OM \times BC}{2}}$ puisque [OM] est la hauteur relative au côté [BC] de ce triangle. C'est un triangle isocèle en O car $OB = \underset{=2}{OC}$ (c'est le rayon du cercle).

Calculons BM à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle OBM rectangle en M:

$OB^2 = OM^2 + BM^2$ M est le pied de la hauteur issue de O du triangle OBC isocèle en O, donc aussi le milieu de [BC].

soit $2^2 = x^2 + BM^2$

soit $4 - x^2 = BM^2$

donc $BM = \sqrt{4-x^2}$

On a donc $BC = 2BM = 2\sqrt{4-x^2}$

Donc $f(x) = \frac{OM \times BC}{2} = \frac{x \times \cancel{2}\sqrt{4-x^2}}{\cancel{2}}$

Soit $\boxed{f(x) = x\sqrt{4-x^2}}$ C.Q.F.D

4) a) On a $m = 2$ et $\forall x \in I$, $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

Donc $f(x) - m = x\sqrt{4-x^2} - 2$

x peut s'écrire $\sqrt{x^2}$

Or on sait que Pour tous nombres a et b positifs $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$x \geqslant 0$ car $x \in [0;2]$

$4 - x^2 \geqslant 0$ car $x \in [0;2] \iff 0 \leqslant x \leqslant 2$

$\iff 0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

car la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\iff 0 \geqslant -x^2 \geqslant -4$

en multipliant tous les membres par -1

$\iff 4 \geqslant 4 - x^2 \geqslant 0$

en ajoutant 4 à tous les membres. ok

Donc $\forall x \in [0;2]$, $f(x) - m = \sqrt{x^2}\sqrt{4-x^2} - 2$

$= \sqrt{x^2(4-x^2)} - 2$

$= \sqrt{4x^2 - x^4} - 2$ CQFD

b) La quantité conjuguée de $\sqrt{4x^2-x^4} - 2$

est $\sqrt{4x^2-x^4} + 2$

Voir l'exercice 13 pour les détails de l'explication sur la quantité conjuguée.

Suite de l'exercice 15. Question 4b.

$$\forall x \in [0;2],\ f(x) - m = \frac{(\sqrt{4x^2-x^4}-2)(\sqrt{4x^2-x^4}+2)}{1 \times (\sqrt{4x^2-x^4}+2)}$$

On a le droit car $\sqrt{4x^2-x^4}+2$ est toujours strictement positif car la somme de 2 et de $\sqrt{4x^2-x^4}$ qui est nécessairement positif ou nul.

$$f(x) - m = \frac{(\sqrt{4x^2-x^4})^2 - 2^2}{\sqrt{4x^2-x^4}+2}$$ ← 3ème identité remarquable

$$= \frac{4x^2 - x^4 - 4}{\sqrt{4x^2-x^4}+2}$$

$$\forall x \in [0;2],\ \boxed{f(x) - m = \frac{-x^4+4x^2-4}{\sqrt{4x^2-x^4}+2}}$$

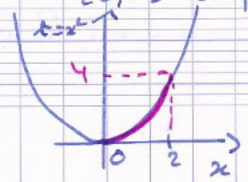
On a vu que le dénominateur est toujours strictement positif.

Déterminons le signe du numérateur $-x^4+4x^2-4$ en posant $t = x^2$: $-x^4+4x^2-4 = -t^2+4t-4$

$\Delta = 4^2 - 4\times(-1)\times(-4) = 16 - 16 = 0$

Le trinôme admet une racine double : $t_0 = \frac{-4}{2\times(-1)} = 2$

Lorsque $x \in [0;2]$, $t = x^2 \in [0;4]$ d'après les variations de la fonction carré :



$-t^2+4t-4$ sera du signe de -1 sur $[0;4]$ sauf en $t=2$ où il vaut 0.

$t=x^2$	0		2		4
x	0		$\sqrt{2}$		2
$-x^4+4x^2-4$		$-$	0	$-$	
$f(x)-m$		$-$	0	$-$	

Car $f(x)-m$ est du signe de son numérateur puisque son dénominateur est strictement positif.

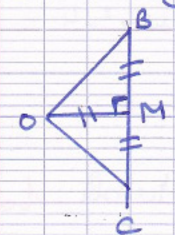
On a bien $f(x) - m \leq 0 \quad \forall x \in [0;2]$ avec $f(x) - m = 0 \iff x = \sqrt{2}$

c) L'aire maximale du triangle est bien $m=2$. Elle est atteinte lorsque $x = \sqrt{2}$.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OBM rectangle en M, lorsque $x=\sqrt{2}$,

$BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$

Le triangle OBM est alors rectangle-isocèle en M.



et le triangle OBC est rectangle-isocèle en O.

Il est isocèle car OB = OC = 2 (rayons du cercle)

et rectangle car le milieu de [BC] est équidistant de O, B, et C

(C'est le centre de son cercle circonscrit).