Corrigés.

Exercice 1.

1) La droite d'équation $ax+by+c=0$ $(a\neq 0$ ou $b\neq 0)$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;\,a)$

2) L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $x=c$ → équation réduite
$ax+c=0$ → équation cartésienne

3) Dire que les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires équivaut à dire que $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0$ c'est-à-dire $xy'-yx'=0$

Pour calculer le déterminant : 1ère diagonale − 2ème diagonale.

Le déterminant formé par les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ écrites verticalement.

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

4) La droite d'équation $y=mx+p$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;\,m)$

5) Dire que les droites d'équations $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont parallèles équivaut à dire que $m=m'$.

Exercice 2.

1) d passe par $A(-2;5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Pour tout point $M(x;y)$ de d, on a :

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Avec : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M-x_A \\ y_M-y_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\iff \begin{vmatrix} x+2 & 2 \\ y-5 & 3 \end{vmatrix}=0 \iff 3(x+2)-2(y-5)=0$ (E)

(E) $\iff 3x+6-2y+10=0 \iff \boxed{3x-2y+16=0}$

Voici une équation cartésienne de d.

2) d passe par $A\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et a pour coefficient directeur $m=\frac{2}{3}$.

Un vecteur directeur de d est donc $\vec{u}\left(\frac{2}{3}\,;\,1\right)$

Les coordonnées du vecteur $3\vec{u}$ s'obtiennent en multipliant celles de $\vec{u}$ par 3.

mais aussi $3\vec{u}(2\,;\,3)$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $3\vec{u}$ sont colinéaires

(sachant que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M-x_A \\ y_M-y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+5 \\ y-3 \end{pmatrix}$)

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \iff \begin{vmatrix} x+5 & 2 \\ y-3 & 3 \end{vmatrix}=0$

$\iff 3(x+5)-2(y-3)=0$

$\iff 3x+15-2y+6=0$

$\iff \boxed{3x-2y+21=0}$

Une équation cartésienne de d.

Exercice 3

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$C\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et d est la droite passant par C de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \iff \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, avec $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x_M-x_C \\ y_M-y_C \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x+4 \\ y-6 \end{pmatrix}$

Suite de l'exercice 3. $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in d \iff \begin{vmatrix} x+4 & 2 \\ y-6 & 3 \end{vmatrix} = 0$

coordonnées de $\overrightarrow{CH}$; coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

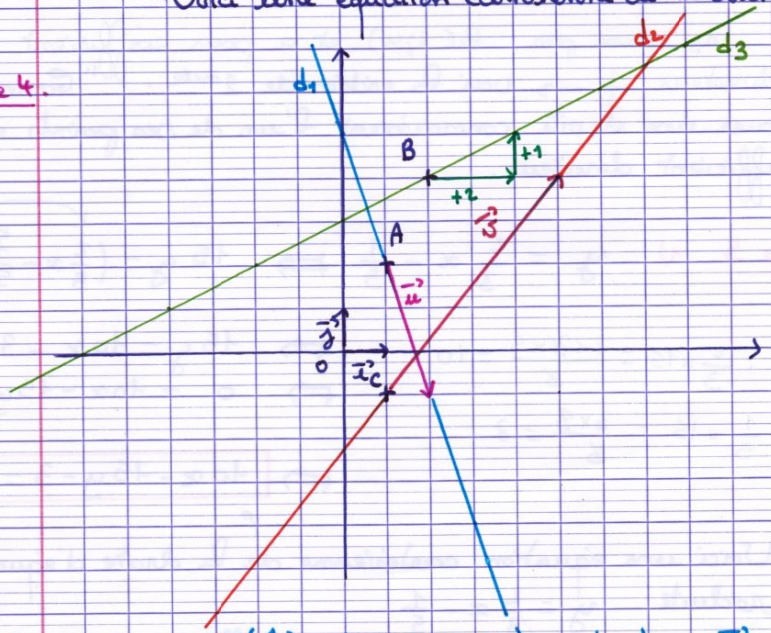
soit $3(x+4) - 2(y-6) = 0$

soit $3x + 12 - 2y + 12 = 0$

soit $\boxed{3x - 2y + 24 = 0}$

Voici une équation cartésienne de la droite d.

Exercice 4.



d_1 passe par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$

d_2 a pour équation $5x - 4y - 9 = 0$ avec $a=5$ $b=-4$ $c=-9$

$ax + by + c = 0$

* Un vecteur directeur de d_2 est donc $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ ← $-b$ ← a

* Cherchons un point de d_2 : $5x - 4y - 9 = 0 \iff 5x - 9 = 4y$

J'aimerais trouver un point à coordonnées entières. Je vais choisir x entier

tel que $5x - 9$ soit un multiple de 4.

si $x = 1$: $5\boxed{x} - 9 = 5 \times \boxed{1} - 9 = 5 - 9 = -4$

pour $x = 1$: $5x - 9 = 4y \iff -4 = 4y \iff -1 = y$.

Le point de coordonnées $\underbrace{(1;-1)}_{\text{Nommons-le C}} \in d_2$

d_3 passe par $B(2;4)$ et a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$ → voici la vidéo de 2nde : "Comment tracer une droite connaissant l'un de ses points et son coefficient directeur.

Exercice 5. 1) $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5} \iff 15y = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}\right) \times 15$

Rappel : $\frac{2}{3} \times 15 = \frac{2 \times 3 \times 5}{3} = 10$

$\frac{1}{5} \times 15 = \frac{3 \times 5}{5} = 3$

$\iff 15y = 10x - 3$

$\iff 0 = 10x - 15y - 3$

$\iff \boxed{10x - 15y - 3 = 0}$

Voici une équation cartésienne de la droite d'équation réduite $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}$

2) La droite d'équation $y = \underbrace{\boxed{\frac{2}{3}}}_{\text{coefficient directeur}} x - \frac{1}{5}$

admet pour vecteur directeur $\vec{v}\left(\boxed{\frac{2}{3}}; 1\right)$

$\vec{u}$ sera aussi l'un de ses vecteurs directeurs si et seulement si $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\left(\frac{2}{3};1\right)$ sont colinéaires (car $\vec{u} \neq \vec{0}$)

Calculons : $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 2 \times \frac{2}{3} = 3 - \frac{4}{3} \neq 0$

→ non, $\vec{u}(3;2)$ n'est pas un vecteur directeur de cette droite.

Exercice 6. Les hypothèses fournies par la figure sont :

$A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\5-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

(AB) est la droite passant par $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires $\iff \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$

$\iff \begin{vmatrix}x+2 & 4\\ y-3 & 2\end{vmatrix}=0$

$\iff 2\times(x+2)-4\times(y-3)=0$

$\iff 2x+4-4y+12=0$

Voici 2 des équations cartésiennes possibles pour la droite (AB)

$\iff \boxed{2x-4y+16=0}$

$\iff \boxed{x-2y+8=0}$

2) La droite Δ passe par $C\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ puisqu'elle est parallèle à (AO)

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \Delta \iff \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires.

$\iff \begin{vmatrix}x-3 & -2\\ y-1 & 3\end{vmatrix}=0 \iff 3(x-3)+2(y-1)=0$

coordonnées de $\overrightarrow{CM}$ ↑ ↑ coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ — produit en croix

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \Delta \iff 3x-9+2y-2=0$

$\iff \boxed{3x+2y-11=0}$

Une équation cartésienne de Δ

Exercice 7. 1) d est parallèle à la droite Δ d'équation $2x-y+3=0$ et passe par $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$2x-y+3=0$ est de la forme $ax+by+c=0$

avec $\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=3\end{cases}$

Un vecteur directeur de Δ est donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ← $-b$ ← a

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires

$\iff \begin{vmatrix}x & 1\\ y-1 & 2\end{vmatrix}=0$

coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ ↑ ↑ coordonnées de $\vec{u}$

$\iff 2x-(y-1)=0$

$\iff \boxed{2x-y+1=0}$

équation cartésienne de d.

Autre idée : Utiliser le fait que toute droite parallèle à Δ admet une équation cartésienne de la forme :

$2x-y+c=0$ et trouver c pour que la parallèle passe par $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$2\times 0-1+c=0 \iff c=1$

d admet donc pour équation cartésienne :

$\boxed{2x-y+1=0}$

Suite de l'exercice 7 - 2) d passe par $A\left(\frac{1}{4};\frac{8}{5}\right)$ et est parallèle à Δ d'équation $\frac{4}{5}x+\frac{5}{7}y+\frac{3}{8}=0$

d admet une équation cartésienne de la forme :

$\frac{4}{5}x+\frac{5}{7}y+c=0$ puisque $d \parallel \Delta$

$A\left(\frac{1}{4};\frac{8}{5}\right) \in d$ donc $\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{7}\times\frac{8}{5}+c=0$

soit $\frac{1}{5}+\frac{8}{7}+c=0$

donc $c=-\frac{1\times7}{5\times7}-\frac{8\times5}{7\times5}$ soit $c=\frac{-49-40}{35}$

soit $c=-\frac{89}{35}$

Une équation cartésienne de d est donc : $\boxed{\frac{4}{5}x+\frac{5}{7}y-\frac{89}{35}=0}$

En multipliant les 2 membres par 35, on peut trouver cette autre équation cartésienne pour d :

$\boxed{28x+25y-89=0}$

Exercice 8. $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

1) d passe par A et est parallèle à (BC)

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5-(-2)\\2-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$

d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ et passe par $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

$\iff \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BC})=0$ avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-3\end{pmatrix}$

$\iff \begin{vmatrix}x-4 & 7\\ y-3 & 1\end{vmatrix}=0$

$\iff 1(x-4)-7(y-3)=0$

$\iff x-4-7y+21=0$

$\iff \boxed{x-7y+17=0}$ Voici une équation cartésienne de d.

2) d passe par $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et le milieu I de [BC].

Calculons les coordonnées de I : $I\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$

soit $I\left(\frac{-2+5}{2};\frac{1+2}{2}\right)$ soit $\boxed{I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)}$

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}x_I-x_A\\y_I-y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-4\\\frac{3}{2}-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-\frac{8}{2}\\\frac{3}{2}-\frac{6}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$-2\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AI}$ et donc $-2\overrightarrow{AI}$ sont des vecteurs directeurs de d.

d passe par $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $-2\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $-2\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-3\end{pmatrix}$

$\iff \begin{vmatrix}x-4 & 5\\ y-3 & 3\end{vmatrix}=0$

$\iff 3(x-4)-5(y-3)=0$

$\iff 3x-12-5y+15=0$

$\iff \boxed{3x-5y+3=0}$ Voici une équation cartésienne de d.

Exercice 9 $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}-7\\-9\end{pmatrix}$

* La méthode qui me semble la plus rapide pour savoir si C est un point de la droite (AB) consiste à regarder si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (par exemple) sont colinéaires.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}5-2\\7-3\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-7-2\\-9-3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix}$

$\det(\vec{AB};\vec{AC}) = \begin{vmatrix}3 & -9\\4 & -12\end{vmatrix} = -36+36 = 0$

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires donc $C \in (AB)$.

* Etant donné qu'on est dans le chapitre des équations cartésiennes de droites, on peut aussi déterminer une équation cartésienne de (AB) et voir si les coordonnées de C la vérifient.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et pour tout $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$

$M \in (AB) \iff \vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

$\iff \begin{vmatrix}x-2 & 3\\y-3 & 4\end{vmatrix} = 0$

$\iff 4(x-2)-3(y-3) = 0$

$\iff 4x-8-3y+9 = 0$

$\iff \boxed{4x-3y+1=0}$ équation cartésienne de (AB)

$4x_C-3y_C+1 = 4\times(-7)-3\times(-9)+1$
$= -28+27+1$
$= 0$

Les coordonnées de C vérifient bien l'équation de (AB)

donc $C \in (AB)$.

Exercice 10 : On gagne du temps à savoir que 2 droites d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ seront (parallèles ou confondues) si et seulement si $\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}=0$

c'est à dire si les coefficients a' et b' de la seconde sont proportionnels aux coefficients a et b de la première.

1) d a pour équation $x-4y+2=0$
d' a pour équation $\frac{1}{2}x+2y+5=0$

$\begin{vmatrix}1 & -4\\\frac{1}{2} & 2\end{vmatrix} = 2+2 \neq 0$ → d et d' sont sécantes. Elles ne sont ni parallèles, ni confondues.

2) d a pour équation $3x-2y+1=0$
d' a pour équation $y=\frac{7}{5}x-1$

Le coefficient directeur de d' est $\frac{7}{5}$.

Rappel : si l'équation réduite d'une droite est $y=mx+p$, son coefficient directeur (= sa pente) est le nombre m.

Transformons l'équation de d pour trouver son coefficient directeur :

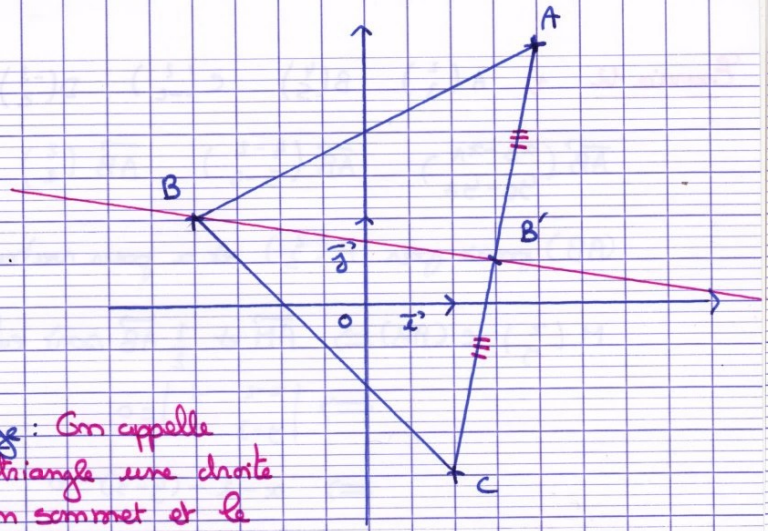
$3x-2y+1=0 \iff 3x+1=2y \iff \boxed{\frac{3}{2}}x+\frac{1}{2}=y$

Le coefficient directeur de d' est $\frac{3}{2}$. Ce n'est pas le même que celui de d.

Donc d et d' ne sont pas parallèles.

Rappel de 2nde : Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entre elles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Exercice 11.



$A(2;3)$

$B(-2;1)$

$C(1;-2)$

Rappel de collège : On appelle médiane dans un triangle une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

La médiane issue de B dans le triangle ABC est la droite (BB'), où B' est le milieu de [AC].

Calculons les coordonnées de B' : $B'\left(\frac{x_A+x_C}{2} ; \frac{y_A+y_C}{2}\right)$

$B'\left(\frac{2+1}{2} ; \frac{3+(-2)}{2}\right)$ $\quad \boxed{B'\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)}$

$\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} x_{B'}-x_B \\ y_{B'}-y_B \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-(-2) \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{4}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{2}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

et $2\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (BB') a pour vecteur directeur $2\overrightarrow{BB'}$ et passe par B.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (BB') \iff \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont colinéaires ; avec $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{vmatrix} x+2 & 7 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff -(x+2)-7(y-1)=0$

$\iff -x-2-7y+7=0 \iff \boxed{-x-7y+5=0}$

Voici une équation cartésienne de la médiane issue de B dans le triangle ABC.

Exercice 12.

1) $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad B\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad C\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad D\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(AB) passe par $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\iff x-2-(y-3)=0$

$\iff \boxed{x-y+1=0}$

Voici une équation cartésienne de (AB)

2) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D-x_C \\ y_D-y_C \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -3-2 \\ 2-(-2) \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Δ passe par $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{vmatrix} x-2 & -5 \\ y-3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\iff 4(x-2)+5(y-3)=0$

↑ - par -

$\iff 4x-8+5y-15=0$

$\iff \boxed{4x+5y-23=0}$

Voici une équation cartésienne de Δ.

Exercice 13.

1) $d : x-4y+2=0$ $\qquad d' : -\frac{1}{2}x+2y+5=0$

$-\frac{1}{2}x+2y+5=0 \iff \underline{x-4y-10=0}$

Voici une autre équation cartésienne de d' obtenue en multipliant les 2 membres par -2.

Suite de l'exercice 13. 1) Les 2 premiers coefficients (ceux de x et de y) sont les mêmes que dans l'équation de d, mais pas le 3ème coefficient. → On en déduit que les droites d et d' sont parallèles et non confondues.

2) $d: 5x - 3y + 10 = 0$ $\quad d': y = \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$ (c'est la même)

Cherchons l'équation réduite de d :

$5x - 3y + 10 = 0 \iff 5x + 10 = 3y \iff \boxed{\frac{5}{3}x + \frac{10}{3} = y}$

d et d' ont la même équation réduite. Elles sont donc confondues.

Exercice 14. 1) $d: x - \frac{1}{7}y + 2 = 0$ $\quad \Delta: \frac{5}{3}x - y + 3 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{7} \\ \frac{5}{3} & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1) + \frac{5}{3}\times\frac{1}{7} = -1 + \frac{5}{21} \neq 0$ car $\frac{5}{21} \neq 1$

(produit en croix)

d et Δ sont sécantes.

→ J'utilise le fait que 2 droites d'équations $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ seront sécantes si les coefficients a et b ne sont pas proportionnels aux coefficients a' et b'.

2) d a pour vecteur directeur $\vec{u} = -\frac{9}{2}\vec{i} + 3\vec{j}$

Δ a pour équation $\underbrace{2x + 3y - 3}_{ax+by+c} = 0$ avec $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=-3 \end{cases}$

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ← −b, ← a

$\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$\begin{vmatrix} -3 & -\frac{9}{2} \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\times3 + 2\times\frac{9}{2} = -9 + 9 = 0$

(produit en croix)

→ oui, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Donc d et Δ sont parallèles ou confondues.

On sait que $A\left(\frac{-3}{3}\right) \in d$. Si $A \in \Delta$, alors les 2 droites seront confondues. Voyons si les coordonnées de A vérifient l'équation de Δ :

$2x_A + 3y_A - 3 = 2\times(-3) + 3\times3 - 3$
$= -6 + 9 - 3$
$= 0$

→ Oui : les coordonnées de A vérifient l'équation de Δ.

Δ est donc la parallèle à d passant par A.
Comme $A \in d$, d et Δ sont confondues.

3) $d: 2x - 3y + 5 = 0$ $\quad \Delta: 0{,}4x - 0{,}6y + 8 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0{,}4 & -0{,}6 \end{vmatrix} = -2\times0{,}6 + 3\times0{,}4 = -1{,}2 + 1{,}2 = 0$

(produit en croix)

→ d et Δ sont donc parallèles ou confondues.

On remarque :

2	−3
0,4	−0,6

(×0,2 à gauche ; ×q2 à droite)

5
8

(×? à droite)

$5 \times q2 = 1 \neq 8$ → les droites sont donc strictement parallèles, non confondues.

Sauf que d et Δ soient confondues, il faut que les coefficients constants aussi soient proportionnels.

→ Rappel : 2 droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ seront confondues si et seulement si a', b', c' sont proportionnels à a, b et c.

Exercice 15 : 1) Nommons d_1 la droite d'équation $5x - 2y - 4 = 0$ et d_2 la droite d'équation $y = -2{,}5x + 0{,}5$.

d_2 a pour coefficient directeur $-2{,}5$.

d_1 sera parallèle à d_2 si et seulement si elle admet elle aussi un coefficient directeur égal à $-2{,}5$.

Transformons l'équation de d_1 pour l'écrire sous forme réduite :

$$5x - 2y - 4 = 0 \iff -2y = -5x + 4 \iff \boxed{y = \frac{5}{2}x - 2}$$

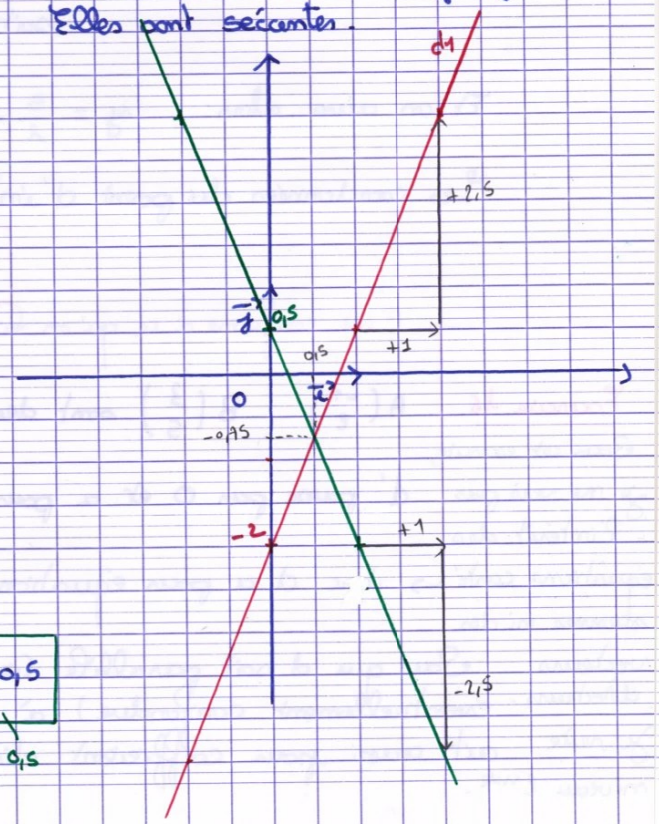
équation réduite de d_1

$-2{,}5 \neq \frac{5}{2}$ donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles. Elles sont sécantes.

2) Pour tracer ces 2 droites, le plus simple est d'utiliser leurs équations réduites, qui nous fournissent leur coefficient directeur et leur ordonnée à l'origine.

d_1 : $y = \frac{5}{2}x - 2$ (2,5 ; −2)

d_2 : $y = -\frac{5}{2}x + 0{,}5$ (−2,5 ; 0,5)



3) Pour trouver les coordonnées du point d'intersection des 2 droites, on résout le système formé par les équations de ces 2 droites :

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2}x - 2 \\ y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sera ce l'intersection de ces 2 droites lorsque :

$$\frac{5}{2}x - 2 = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$$

soit $\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x = \frac{1}{2} + 2$ (+5/2 x +2)

soit $5x = \frac{1}{2} + \frac{4}{2}$

soit $5x = \frac{5}{2}$ (:5)

soit $x = \frac{1}{2}$

Et on aura alors : $y = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} - 2 = \frac{5}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{3}{4}$

Les coordonnées du point d'intersection des 2 droites sont donc

$$\left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{4}\right)$$

→ c'est conforme à ce qu'on lit sur la figure.

Exercice 16. $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont deux points de d.

Pour cet exercice, je ne vois pas l'intérêt des équations cartésiennes ni des vecteurs directeurs. Je reste niveau 2nde.

→ d a pour équation réduite $y = 0{,}75x$.

Pour que d soit parallèle (au sens large, donc éventuellement confondue) à d, il suffit que d ait aussi pour coefficient directeur 0,75.

Suite de l'exercice 16 : $x_A \neq x_B$ car $-1 \neq 3$. La droite $d=(AB)$ admet donc un coefficient directeur, que je calcule par la formule : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{3-(-1)} = \frac{3}{4} = 0,75$

C'est le même coefficient directeur que d'. d et d' sont donc parallèles ou confondues.

On a plusieurs possibilités pour déterminer si d et d' sont confondues ou non.

Idée n°1 : On sait que $O(0;0) \in d'$.
O appartiendra à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ Facile à calculer car O est l'origine du repère.

$\det(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix} = -1\times5 - 2\times3 = -5-6 = -11 \neq 0$

Donc $O \notin (AB)$ - d et d' sont donc strictement parallèles.

Idée n°2 : On connaît une équation de d' : $y = 0,75x$.
On regarde si $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ appartient à d' :

$0,75\,x_A = 0,75\times(-1) = -0,75 \neq y_A$

donc A appartient à d mais pas à d'.

Les droites d et d' ne sont donc pas confondues.
Elles sont strictement parallèles.
Puisqu'on a dès précédemment qu'elles ont le même coefficient directeur.

Exercice 17. $d : 2x - 3y + 4 = 0$ $\Delta : mx - 2y + 2 = 0$

d et Δ seront parallèles (au sens large) lorsque les coefficients 2 et -3 de la première équation seront proportionnels aux coefficients m et -2 de la deuxième équation, soit lorsque : $\begin{vmatrix}2 & -3\\ m & -2\end{vmatrix} = 0$ (E)

$(E) \iff 2\times(-2) - m\times(-3) = 0$
$\iff -4 + 3m = 0$
$\iff 3m = 4$
$\iff \boxed{m = \frac{4}{3}}$

Seront-elles alors confondues ou strictement parallèles ?
Avons-nous ou non un tableau de proportionnalité ci-dessous ?

2	-3	4
$\frac{4}{3}$	-2	2

$\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 2\end{vmatrix} = -3\times2 - (-2)\times4 = -6+8 = 2 \neq 0$

là, on a proportionnalité — on n'a pas proportionnalité ici

→ d et d' sont donc strictement parallèles (pas confondues)

Exercice 18 : $d : 3x + y = 0$ $\Delta : (2m-1)x + (m-3)y - 1 = 0$

Remarque : Celle-ci passe par l'origine du repère car le coefficient e dans $ax+by+c$ vaut 0.

Celle-ci ne passe pas par l'origine du repère.

Suite de l'exercice 18. Donc même si on arrive à trouver m tel que d et Δ soient parallèles, elles seront alors strictement parallèles, pas confondues.

d et Δ seront parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2m-1 & m-3 \end{vmatrix} = 0$

soit $3(m-3) - (2m-1)\times 1 = 0$
soit $3m - 9 - 2m + 1 = 0$
soit $m - 8 = 0$
soit $\boxed{m = 8}$

Lorsque $m = 8$:
$2m-1 = 2\times 8 - 1 = 15$
$m-3 = 8-3 = 5$

Δ a pour équation :
$\boxed{15x + 5y - 1 = 0}$

Exercice 19 1) Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$A\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-(-3) \\ 8-(-5) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} x_C - 0 \\ y_C - 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 5-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 8\times 5 - 13\times 3 = 40 - 39 = 1 \quad 1 \neq 0$

FAUX : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas colinéaires.
→ bien que, sur le graphique, les points A, O, C, B semblent alignés.

2) $d_1 : 5x + 2y + 6 = 0$ $d_2 : 3x + \frac{3}{4}y - 5 = 0$

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 5\times\frac{3}{4} - 3\times 2 = \frac{15}{4} - 6 = \frac{15}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{9}{4} \neq 0$

FAUX Ces 2 droites ne sont pas parallèles. Elles sont sécantes.

3) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront les vecteurs directeurs d'une même droite si et seulement si ils sont tous deux non nuls et colinéaires.

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2,4 \\ 3,2 \end{pmatrix}$ sont non nuls car leurs coordonnées ne sont pas $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De plus : $0,8\,\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0,8\times 3 \\ 0,8\times 4 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 2,4 \\ 3,2 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{v} = 0,8\,\vec{u}$ → $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires

VRAI → ils sont donc vecteurs directeurs d'une même droite (et même de plusieurs droites, toutes parallèles entre elles).

On pouvait aussi, sans remarquer que $\vec{v} = 0,8\,\vec{u}$, calculer $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2,4 \\ 4 & 3,2 \end{vmatrix} = 3\times 3,2 - 4\times 2,4$

$= 9,6 - 9,6 = 0$

Ce qui prouvait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4) **VRAI** Toute droite du plan admet un vecteur directeur. Il suffit de choisir 2 points distincts de cette droite, A et B : $\overrightarrow{AB}$ est alors un vecteur directeur de la droite.

Ou bien : toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
$\vec{u}(-b; a)$ est alors un vecteur directeur de la droite.
$\vec{u}$ est non nul car $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Suite de l'exercice 19 5) FAUX Les droites parallèles à l'axe des ordonnées n'ont pas de coefficient directeur : ce sont celles qui admettent des équations réduites de la forme $x = c$ ou des équations cartésiennes de la forme $ax + c = 0$.

Toutes les autres droites, en revanche, admettent une équation réduite de la forme $y = mx + p$, où p est leur coefficient directeur.

6) $d_1 : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$ $\quad d_2 : 3x + 2y - 6 = 0$

Si l'on multiplie par 6 les 2 membres de l'équation de d_1, on obtient celle de d_2. Ces 2 équations sont donc équivalentes (car 6 est un nombre non nul). VRAI

Ce sont bien 2 équations d'une même droite.

Exercice 20. d a pour équation $x - y + 1 = 0$

Pour trouver 2 points de d, on choisit 2 valeurs différentes pour x par exemple (ou pour y : peu importe puisqu'ici il ne s'agit pas d'une droite parallèle à l'un des axes), et on calcule la valeur de y (resp : de x) qui vérifie l'équation.

$x - y + 1 = 0 \iff x + 1 = y$

$\begin{cases} \text{si } x = 10 & y = 11 \quad (10+1) \\ \text{si } x = -13 & y = -12 \quad (-13+1) \end{cases}$

Voici 2 points de d : $\boxed{A\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}}$ et $\boxed{B\begin{pmatrix}-13\\-12\end{pmatrix}}$

Exercice 21 : L'énoncé ne précise pas si l'équation de droite demandée est cartésienne, réduite ... ou autre.

d passe par $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ donc son ordonnée à l'origine est 2 ... sauf s'il s'agit de l'axe des ordonnées

... mais ce n'est pas le cas car d admet un coefficient directeur : 3.

d a donc pour équation réduite :

$\boxed{y = 3x + 2}$

$y = 3x + 2 \iff 0 = 3x - y + 2$

$\iff \boxed{3x - y + 2 = 0}$

Voici une équation cartésienne de d.

On obtient les autres équations cartésiennes de d en multipliant les 2 membres de cette équation par n'importe quel réel non nul.

Exercice 22 : $3x + 2y - 5 = 0 \iff 2y = -3x + 5$

$\iff y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

Le coefficient directeur de la droite d'équation $3x + 2y - 5 = 0$ est $\boxed{-\frac{3}{2}}$

Exercice 23. d a pour équation $2x - 5y + 3 = 0$
($ax + by + c = 0$)

Elle admet donc pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$)

$A\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. $2x_A - 5y_A + 3 = 2 \times 6 - 5 \times 3 + 3$
$= 12 - 15 + 3$
$= 0$

Les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite d.
Donc A appartient à la droite d.

Exercice 24. d a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + 4$
Son coefficient directeur est donc $-\frac{2}{3}$.

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est l'un de ses vecteurs directeurs.

Exercice 25. ABC est un triangle — hypothèse H_1
$4\vec{BI} = \vec{BA}$ — hypothèse H_2
$5\vec{CJ} = 2\vec{CA}$ — hypothèse H_3

Remarque : l'hypothèse H_1 nous explique implicitement que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1) Il s'agit d'exprimer le vecteur $\vec{IJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, et de vérifier si ce vecteur a ou non dans la base $(\vec{AB}; \vec{AC})$ les coordonnées $-\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{5}$.

$\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CJ}$ (R_1) d'après la relation de Chasles

grâce à H_2, je vais pouvoir exprimer $\vec{IB}$ en fonction de $\vec{AB}$ — les vecteurs de base ... car puisque — grâce à H_3, je vais pouvoir exprimer $\vec{CJ}$ en fonction de $\vec{AC}$

H_2 $4\vec{BI} = \vec{BA} \iff 4\vec{IB} = \vec{AB}$
$\iff \vec{IB} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ (R_2)

H_3 $5\vec{CJ} = 2\vec{CA} \iff \vec{CJ} = \frac{2}{5}\vec{CA}$
$\iff \vec{CJ} = -\frac{2}{5}\vec{AC}$ (R_3)

Dans (R_1), je remplace : $\vec{IB}$ par $\frac{1}{4}\vec{AB}$ d'après (R_2)
$\vec{BA}$ par $-\vec{AB}$
et $\vec{CJ}$ par $-\frac{2}{5}\vec{AC}$ d'après (R_3)

J'obtiens : $\vec{IJ} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \vec{AB} + \vec{AC} - \frac{2}{5}\vec{AC}$

soit $\vec{IJ} = \left(\frac{1}{4} - 1\right)\vec{AB} + \left(1 - \frac{2}{5}\right)\vec{AC}$

soit $\vec{IJ} = \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4}\right)\vec{AB} + \left(\frac{5}{5} - \frac{2}{5}\right)\vec{AC}$

soit $\vec{IJ} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}$

On obtient bien la relation de l'énoncé : VRAI

2) Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$, $\vec{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ d'après ce qui précède. $\vec{u}$ sera un vecteur directeur de la droite $\vec{IJ}$ si et seulement si $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires (puisque ce sont 2 vecteurs non nuls)

$\det(\vec{u}; \vec{IJ}) = \begin{vmatrix} -5 & -\frac{3}{4} \\ 4 & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -5 \times \frac{3}{5} - 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)$
$= -3 + 3$
$= 0$

VRAI $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (IJ).

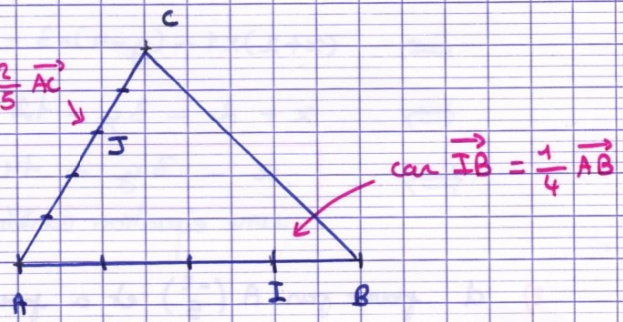
Suite de l'exercice 25. 3) Dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AC})$

$\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC}$ donc $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AC} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC}$ donc $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\ y_C - y_B\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

est un vecteur directeur de la droite (BC)



(BC) est la droite passant par $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{BC}$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (BC) \iff \vec{BM}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires

$\iff \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\iff (x-1)\times 1 - y\times(-1) = 0$

$\iff x - 1 + y = 0$

$\iff \boxed{x + y - 1 = 0}$

VRAI (BC) a pour équation $x+y-1=0$

On pouvait aussi, sachant que B et C n'étaient pas confondus, se contenter de vérifier que B et C satisfaisaient à l'équation proposée par l'énoncé.

Exercice 26 1) d passe par $A\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ → puisque $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ dans son repère supposé s'appeler $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. On a $\vec{AM}\begin{pmatrix}x_M - x_A\\ y_M - y_A\end{pmatrix}$ soit $\vec{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix}$

$M \in d \iff \vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\iff \begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ y-4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\iff (x+2)\times 1 - (y-4)\times 3 = 0$

$\iff x + 2 - 3y + 12 = 0$

$\iff \boxed{x - 3y + 14 = 0}$

une équation cartésienne de d.

2) d passe par $A\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ puisque $\vec{u} = 2\vec{i}\ (+0\vec{j})$

d est dirigée par $\vec{i}$. Elle est donc parallèle à l'axe des abscisses. Son équation réduite est donc de la forme $y = p$.

Comme $A\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} \in d$, on sait que $p = 5$.

L'équation réduite de la droite d est donc $\boxed{y = 5}$.

Une équation cartésienne de d est donc $\boxed{y - 5 = 0}$.

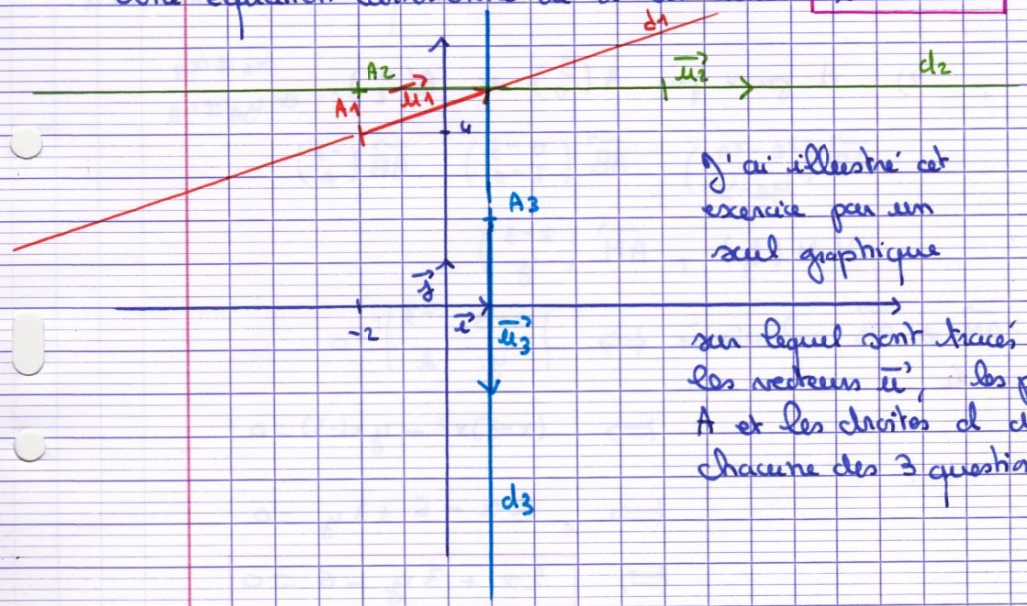
Suite de l'exercice 26. 3) d passe par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $-4\vec{j}$.

$-4\vec{j}$ et donc $\vec{j}$ dirigent d. d est donc parallèle à l'axe des ordonnées. Elle admet donc une équation réduite de la forme $x = c$.

Comme $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in d$, on sait que $c = 1$.

L'équation réduite de d est donc $\boxed{x = 1}$

Une équation cartésienne de d est donc $\boxed{x - 1 = 0}$



J'ai illustré cet exercice par un seul graphique sur lequel sont tracés les vecteurs $\vec{u}$, les points A et les droites d de chacune des 3 questions.

Exercice 27 1) d passe par $A\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

On remarque que $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$ → Ça peut faire gagner du temps.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1\\2-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$

et, pour tout $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-5\end{pmatrix}$

d est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires $\iff \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix}x-1 & -4\\y-5 & -3\end{vmatrix} = 0$

$\iff (x-1)\times(-3) - (y-5)\times(-4) = 0$

$\iff -3x + 3 + 4y - 20 = 0$

$\iff \boxed{-3x + 4y - 17 = 0}$

Voici une équation cartésienne de d.

2) d passe par $A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-3\\2-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires $\iff \begin{vmatrix}x-3 & -3\\y & 2\end{vmatrix} = 0$

$\iff (x-3)\times 2 - y\times(-3) = 0$

$\iff 2x - 6 + 3y = 0$

$\iff \boxed{2x + 3y - 6 = 0}$

Voici une équation cartésienne de d.

3) $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $x_A = x_B = 4$ (et $y_A \neq y_B$) d a donc pour équation réduite $x = 4$ et pour équation cartésienne $\boxed{x - 4 = 0}$ Il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Suite de l'exercice 27. 4) d passe par $A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

$y_A = y_B = -2$ (et $x_A \neq x_B$) Donc (AB) admet pour équation réduite $y = -2$

et pour équation cartésienne $\boxed{y + 2 = 0}$

Exercice 28 : d a pour équation $2x - 3y + 5 = 0$

1) $2x - 3y + 5 = 0 \iff 2x + 5 = 3y$

$\iff \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = y$

$\iff \boxed{y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}}$ Équation réduite de d

Le coefficient directeur de d est $\frac{2}{3}$

2) L'ordonnée à l'origine de d est $\frac{5}{3}$

3) A est le point de d d'abscisse $x_A = \frac{3}{2}$.

$y_A = \frac{2}{3}x_A + \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = 1 + \frac{5}{3}$

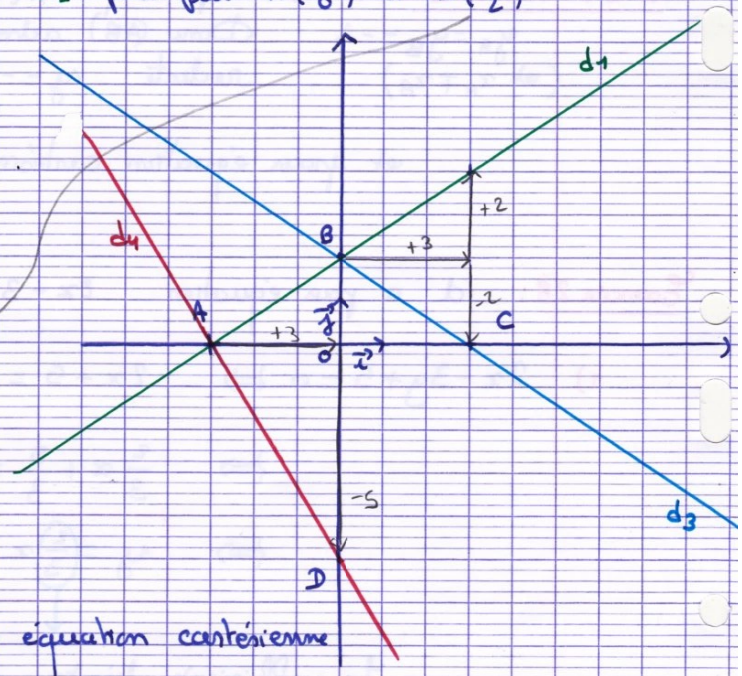
$y_A = \frac{3}{3} + \frac{5}{3}$

$\boxed{y_A = \frac{8}{3}}$ L'ordonnée du point A est $\frac{8}{3}$.

Exercice 29 : 1) La droite d'équation $2x - y - 4 = 0$ est nécessairement d_2 car elle est la seule à passer par le point de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$: $2 \times 0 - (-4) - 4 = 4 - 4 = 0$

Les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite.

2) La droite d_1 passe par $A\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$



Lecture sur le graphique de son coefficient directeur : $\frac{2}{3}$

et de son ordonnée à l'origine : +2

Son équation réduite est donc $\boxed{y = \frac{2}{3}x + 2}$

Pour trouver une équation cartésienne de d_1, on peut

* Utiliser le fait qu'elle passe par $A\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{AB}\begin{pmatrix}0-(-3)\\2-0\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (AB) \iff \vec{AM}$ et $\vec{AB}$ colinéaires avec $\vec{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y\end{pmatrix}$

$\iff \det(\vec{AM}; \vec{AB}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\iff (x+3) \times 2 - y \times 3 = 0$

$\iff 2x + 6 - 3y = 0$

$\iff \boxed{2x - 3y + 6 = 0}$ équation cartésienne de d_1

* Transformer son équation réduite en une équation cartésienne équivalente : $y = \frac{2}{3}x + 2 \iff y - 2 = \frac{2}{3}x \iff 3y - 6 = 2x$

$\iff \boxed{-2x + 3y - 6 = 0}$ équation cartésienne de d_1 aussi !

Suite de l'exercice 29 - 2) d_3 passe par $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

On lit sur le graphique son coefficient directeur : $-\frac{2}{3}$

et son ordonnée à l'origine : 2

Son équation réduite est donc : $\boxed{y = -\frac{2}{3}x + 2}$

Soit trouver une de ses équations cartésiennes :

* **Méthode 1 :** d_3 passe par $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\y_C - y_B\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-0\\0-2\end{pmatrix}$

$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x_M - x_B\\y_M - y_B\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-2\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}}$

$M \in d_3 \iff \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

$\iff \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix}x & 3\\y-2 & -2\end{vmatrix} = 0 \iff -2x - 3(y-2) = 0 \iff \boxed{-2x - 3y + 6 = 0}$

Voici une équation cartésienne de d_3

* **Méthode 2 :** $y = -\frac{2}{3}x + 2 \iff \frac{2}{3}x + y - 2 = 0$

(j'ai multiplié les 2 membres par 3) $\iff \boxed{2x + 3y - 6 = 0}$

Voici une autre équation cartésienne de d_3.

d_4 passe par $A\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$

Son coefficient directeur, on peut le lire sur la figure : $-\frac{5}{3}$

mais aussi le calculer : $\frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-5-0}{0-(-3)} = -\frac{5}{3}$

(On pouvait aussi le calculer de même dans les cas précédents)

Son ordonnée à l'origine est -5 . ($D\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ son point d'intersection avec l'axe des ordonnées a pour ordonnée -5)

Son équation réduite est donc : $\boxed{y = -\frac{5}{3}x - 5}$

Soit trouver une équation cartésienne de d_4 :

* **Méthode 1 :** $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D - x_A\\y_D - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-(-3)\\-5-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M - x_A\\y_M - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in d_4 \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AD}$ colinéaires

$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix}x+3 & 3\\y & -5\end{vmatrix} = 0$

$\iff (x+3)\times(-5) - y \times 3 = 0$

$\iff -5x - 15 - 3y = 0$

$\iff \boxed{-5x - 3y - 15 = 0}$

$\iff \boxed{5x + 3y + 15 = 0}$

Voici 2 équations cartésiennes de d_4.

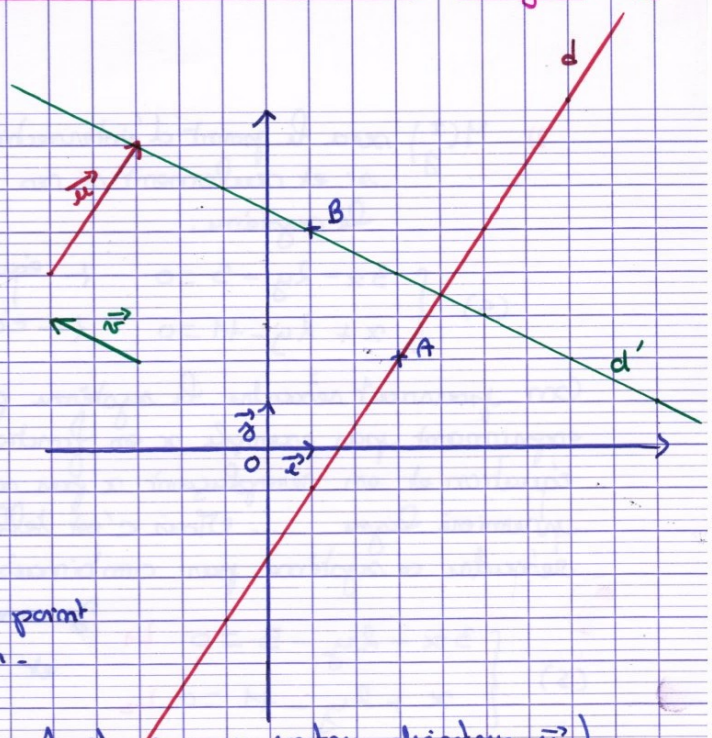
* **Méthode 2 :** $y = -\frac{5}{3}x - 5 \iff 3y = -5x - 15$

$\iff \boxed{5x + 3y + 15 = 0}$

C'est plus rapide, non ?

Exercice 30

1)



$A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

2) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point quelconque du plan.

$M \in d$ (d passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}$) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ seront colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix}x-3 & 2\\ y-2 & 3\end{vmatrix}=0$ (déterminant de $(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$)

soit $(x-3)\times 3-(y-2)\times 2=0$

soit $3x-9-2y+4=0$

soit $\boxed{3x-2y-5=0}$ une équation cartésienne de d.

$M \in d' \iff \overrightarrow{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, avec $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$\iff \begin{vmatrix}x-1 & -2\\ y-5 & 1\end{vmatrix}=0 \iff (x-1)\times 1-(y-5)\times(-2)=0$

$\iff x-1+2y-10=0$

$\iff \boxed{x+2y-11=0}$ une équation cartésienne de d'.

3) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sera le point d'intersection des droites d et d' si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$(S)\begin{cases}3x-2y-5=0 & \leftarrow \text{équation de } d\\ x+2y-11=0 & \leftarrow \text{équation de } d'\end{cases}$$

On pourrait résoudre le système par substitutions en exprimant par exemple x en fonction de y dans la 2ème équation et en remplaçant x par son expression dans la première ligne. ... Mais c'est tellement plus rapide de résoudre ce système par combinaisons linéaires ! Voyez :

$$(S)\begin{cases}3x-2y-5=0 & L_1\\ x+2y-11=0 & L_2\end{cases}$$

Je nomme la première ligne L_1 et la seconde L_2

Je remarque que si j'additionne L_1 et L_2, les termes en y s'annulent.

Pour annuler les termes en x, je multiplie la 2ème ligne par 3 et je la soustrais à la première. Cela se note ainsi :

$$(S)\iff\begin{cases}\underbrace{4x}_{3x+x} \underbrace{-16}_{(-5)+(-11)}=0 & L_1 \leftarrow L_1+L_2 \text{ Je remplace } L_1 \text{ par } L_1+L_2\\ \underbrace{-8y}_{-2y-3\times 2y} \underbrace{+28}_{-5-3\times(-11)}=0 & L_2 \leftarrow L_1-3L_2 \text{ Je remplace } L_2 \text{ par } L_1-3L_2\end{cases}$$

$$(S)\iff\begin{cases}4x=16\\ -8y=-28\end{cases} \qquad (S)\iff\begin{cases}x=4\\ y=\frac{28}{8}=\frac{7\times 4}{2\times 4}=\frac{7}{2}\end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection des droites d et d' sont $\boxed{\left(4;\frac{7}{2}\right)}$

Exercice 31. $d_1 : 3x - 2y + 5 = 0$
$ax + by + c = 0$

Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ← $-b$ ← a

Soit M_1 le point de d_1 d'abscisse 0.

On a : $3x_{M_1} - 2y_{M_1} + 5 = 0$

soit $3 \times 0 - 2y_{M_1} + 5 = 0 \iff -2y_{M_1} = -5 \iff y_{M_1} = \frac{5}{2}$

Un point de d_1 est $M_1\left(0 ; \frac{5}{2}\right)$

$d_2 : 3y - x + 1 = 0 \iff -x + 3y + 1 = 0$
$ax + by + c = 0$

$\vec{u_2}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ← $-b$ ← a est un vecteur directeur de d_2.

Soit B le point de d_2 d'ordonnée 0.
On a alors $3 \times 0 - x_B + 1 = 0$ soit $1 = x_B$

$B(1;0) \in d_2$.

$d_3 : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 = 0 \iff 2x + 3y - 6 = 0$
en multipliant les 2 membres par 6.

$\vec{u_3}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ← $-b$ ← a est un vecteur directeur de d_3.

Soit C le point de d_3 d'ordonnée 2.

On a : $\frac{x_C}{3} + \frac{y_C}{2} - 1 = 0$ soit $\frac{x_C}{3} + \frac{2}{2} - 1 = 0$

soit $\frac{x_C}{3} = 0$

soit $x_C = 0$

$C(0;2) \in d_3$

$d_4 : \frac{3}{4}x - 2y + \frac{7}{2} = 0 \iff 3x - 8y + 14 = 0$

Ce n'est pas du tout obligatoire, mais je trouve agréable de me débarrasser des dénominateurs en multipliant les 2 membres par 4.

$\vec{u_4}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_4.

et $4\vec{u_4}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ aussi.

Pour trouver un point de d_4 :
- Soit on choisit une valeur pour y et on calcule x
- Soit on choisit une valeur pour x et on calcule y.

Je remarque que $-8 + 14 = 6$ qui est un multiple de 3 : ainsi, si je choisis $y = 1$, j'obtiens pour x une valeur entière !

Soit D le point de d_4 d'ordonnée 1. J'ai :

$3x_D - 8 \times 1 + 14 = 0 \iff 3x_D + 6 = 0 \iff 3x_D = -6$

$\iff x_D = -2$

Donc $D(-2;1)$ est un point de d_4.

Exercice 32. $d : 7x - 3y + 2 = 0$ $\quad d' : 5x - 2y - 8 = 0$

1) d et d' seront sécantes si et seulement si les coefficients 7 et -3 d'une part et 5 et -2 d'autre part ne sont pas proportionnels :

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 7\times(-2) - 5\times(-3) = -14 + 15 = 1 \neq 0$$

Les droites d et d' sont donc sécantes.

1) Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de d et de d', on résout le système formé par leurs deux équations :

$$(S) \begin{cases} 7x - 3y + 2 = 0 & L_1 \\ 5x - 2y - 8 = 0 & L_2 \end{cases}$$

pour annuler le coefficient de y

$$(S) \begin{cases} -x + 28 = 0 & L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \\ -y + 66 = 0 & L_2 \leftarrow 5L_1 - 7L_2 \end{cases}$$

pour annuler le coefficient de x

$$(S) \iff \begin{cases} 28 = x \\ 66 = y \end{cases}$$

Le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $(28;66)$

- car $2\times7x - 3\times5x = 14x - 15x = -x$
- car $2\times2 - 3\times(-8) = 4 + 24 = 28$
- car $5\times(-3y) - 7\times(-2y) = -15y + 14y = -y$
- car $5\times2 - 7\times(-8) = 10 + 56 = 66$

Inutile d'expliciter ces calculs car vous avez indiqué que vous remplaciez L_1 par $2L_1 - 3L_2$ et L_2 par $5L_1 - 7L_2$

Exercice 33. $d_1 : 3x - 2y - 8 = 0$ $\quad d_2 : 5x + 4y - 6 = 0$

$\Delta : 2mx - (m+1)y - 8 = 0$

* Pour commencer : vérifions que d_1 et d_2 sont sécantes

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\times4 - 5\times(-2) = 12 + 10 = 24 \neq 0 \rightarrow d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont sécantes}$$

* Calculons les coordonnées de leur point d'intersection.

$$(S) \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 & L_1 \\ 5x + 4y - 6 = 0 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 11x - 22 = 0 & L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ -22y - 22 = 0 & L_2 \leftarrow -5L_1 - 3L_2 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} 11x = 22 \\ -22y = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Le point d'intersection de d_1 et d_2 a pour coordonnées $(2;-1)$

Nommons-le C.

* Déterminons m pour que Δ passe par C.

Pour que $C\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit un point de Δ, il faut et il suffit que :

$2mx_C - (m+1)y_C - 8 = 0$ soit $2m\times2 - (m+1)\times(-1) - 8 = 0$

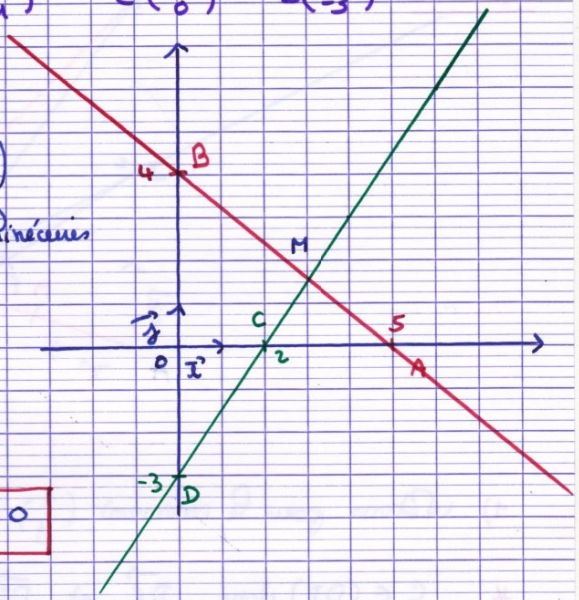
soit $4m + (m+1) - 8 = 0$ soit $5m - 7 = 0$

soit $5m = 7$ soit $\boxed{m = \frac{7}{5}}$.

Δ a alors pour équation : $2\times\frac{7}{5}x - \left(\frac{7}{5}+1\right)y - 8 = 0$

soit $\boxed{\frac{14}{5}x - \frac{12}{5}y - 8 = 0}$

Exercice 34. $A\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$



(AB) passe par $A\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-5\\4-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\iff \begin{vmatrix}x-5 & -5\\ y & 4\end{vmatrix} = 0$

$\iff 4(x-5)+5y=0$

$\iff 4x-20+5y=0$

$\iff \boxed{4x+5y-20=0}$

équation de (AB)

(CD) passe par $C\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0-2\\-3-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ← pour éviter de m'encombrer des - dans les calculs.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (CD) \iff \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires

$\iff \begin{vmatrix}x-2 & 2\\ y & 3\end{vmatrix} = 0$

$\iff 3(x-2)-2y=0 \iff 3x-6-2y=0 \iff \boxed{3x-2y-6=0}$

équation de (CD)

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (AB)\cap(CD) \iff (S)\begin{cases}4x+5y-20=0 & L_1\\ 3x-2y-6=0 & L_2\end{cases} \iff \begin{cases}23x-70=0 & L_1 \leftarrow 2L_1+5L_2\\ 23y-36=0 & L_2 \leftarrow 3L_1-4L_2\end{cases}$

$(S) \iff \begin{cases}x=\frac{70}{23}\\ y=\frac{36}{23}\end{cases}$

Le point d'intersection M de (AB) et (CD) a pour coordonnées $\left(\frac{70}{23};\frac{36}{23}\right)$

$\approx 3{,}04$ $\approx 1{,}57$

Exercice 35.

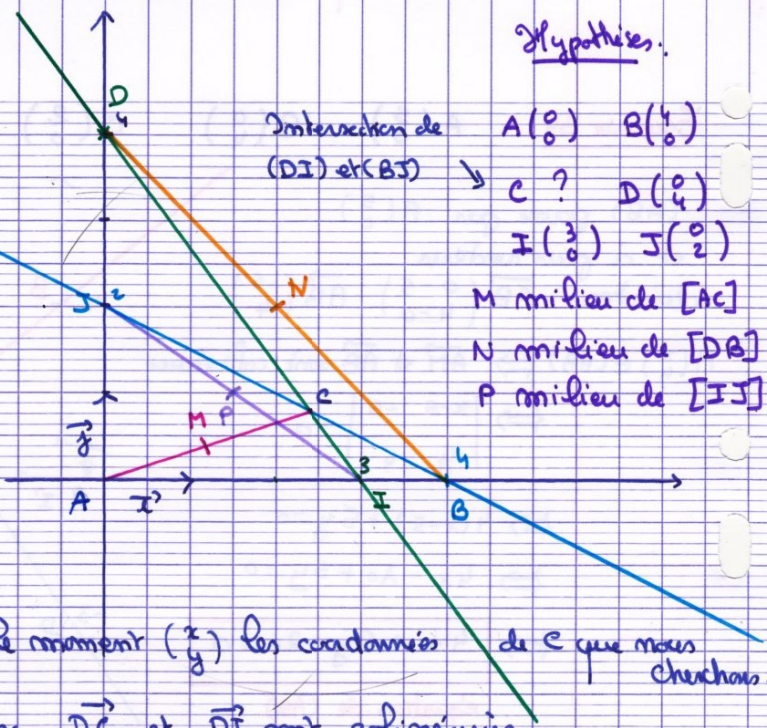
Hypothèses :

Intersection de (DI) et (BJ) ↘ $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ C ? $D\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

M milieu de [AC]

N milieu de [DB]

P milieu de [IJ]



1) Notons pour le moment $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de C que nous cherchons

* $C \in (DI)$ donc $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x\\y-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}3-0\\0-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DI}$ colinéaires $\iff \begin{vmatrix}x & 3\\ y-4 & -4\end{vmatrix} = 0 \iff -4x-3(y-4)=0$

$\iff \boxed{-4x-3y+12=0}$ équation de (DI)

* $C \in (BJ)$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x-4\\y\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}0-4\\2-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ pour simplifier les calculs →

$\overrightarrow{BC}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}$ colinéaires $\iff \begin{vmatrix}x-4 & -2\\ y & 1\end{vmatrix} = 0 \iff x-4+2y=0$

$\iff \boxed{x+2y-4=0}$ équation de (BJ)

* Les coordonnées de C vérifient donc le système :

Suite de l'exercice 35.

$$(S)\begin{cases} -4x - 3y + 12 = 0 & L_1 \\ x + 2y - 4 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 12 = 0 & L_1 \leftarrow 2L_1 + 3L_2 \\ 5y - 4 = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + 4L_2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} = 2{,}4 \\ y = \frac{4}{5} = 0{,}8 \end{cases}$$

$C\left(\frac{12}{5}; \frac{4}{5}\right)$ ou $C\begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

2) Calculons les coordonnées de M, N et P.

* M est le milieu de [AC] donc $M\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_C}{2} \\ \frac{y_A + y_C}{2} \end{pmatrix}$

$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0 + \frac{12}{5}}{2} = \frac{12}{10}$ ou 1,2 donc $M\left(\frac{12}{10}; \frac{4}{10}\right)$

$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + \frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{10}$ ou 0,4 ou $M(1{,}2 ; 0{,}4)$

* N est le milieu de [DB] donc $N\left(\frac{x_D + x_B}{2}; \frac{y_D + y_B}{2}\right)$

soit $N\left(\frac{0+4}{2}; \frac{4+0}{2}\right)$ soit $N(2;2)$

* P est le milieu de [IJ] donc $P\left(\frac{x_I + x_J}{2}; \frac{y_I + y_J}{2}\right)$

soit $P\left(\frac{\frac{3}{2}+0}{2}; \frac{0+2}{2}\right)$ soit $P\left(\frac{3}{2};1\right)$ ou $P(1{,}5;1)$

* M, N et P seront alignés si et seulement si $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 2 - 1{,}2 \\ 2 - 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} x_P - x_N \\ y_P - y_N \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} 1{,}5 - 2 \\ 1 - 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{NP}) = \begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 \\ 1{,}6 & -1 \end{vmatrix} = -0{,}8 + 0{,}8 = 0$

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont bien colinéaires. Les points M, N et P sont donc alignés.

Exercice 36.

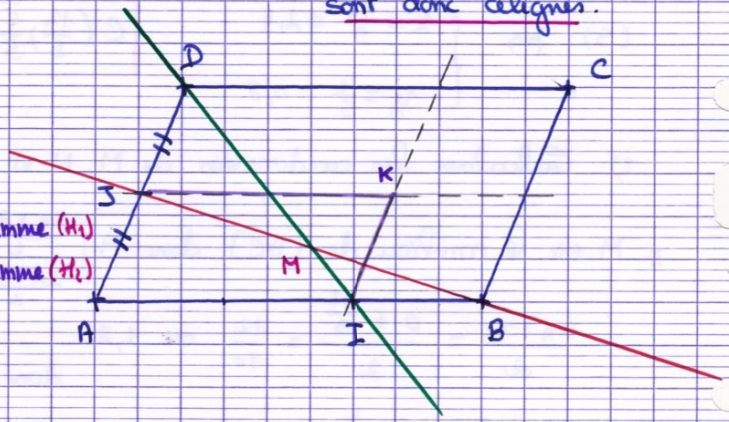
Hypothèses

ABCD est un parallélogramme (H_1)

AIKJ est un parallélogramme (H_2)

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (H_3)

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (H_4)



1) Pour déterminer les coordonnées d'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$, on exprime $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ et on trouve $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AI} + y\overrightarrow{AJ}$ (coordonnées de $\overrightarrow{M}$)

* On sait que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\frac{3}{2}\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} + 0\overrightarrow{AJ}$ donc

$B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

dans le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$

* On sait que ABCD est un parallélogramme (H_1)

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Suite de l'exercice 36. On sait aussi que :

* $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ (vrai : coordonnées de B)

et que * $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \iff 2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD}$ (H_4)

Dans $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, remplaçons $\overrightarrow{AB}$ par $\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AD}$ par $2\overrightarrow{AJ}$.

On obtient : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AJ}$ donc $\boxed{C\left(\frac{3}{2};2\right)}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$

(coordonnées de C)

* On a vu que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AJ}$ donc $\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ}$ donc $\boxed{D(0;2)}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$

(coordonnées de D)

* On sait que AIKJ est un parallélogramme (H_2)

Donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$ soit $\overrightarrow{AK} = 1\overrightarrow{AI} + 1\overrightarrow{AJ}$

Donc $\boxed{K(1;1)}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$ (Coordonnées de K)

2) Nouvelle hypothèse : M est le point d'intersection de (DI) et (BJ) (H_5)

* $D\binom{0}{2}$ $I\binom{1}{0}$ $\overrightarrow{DI}\binom{1-0}{0-2}$ $\overrightarrow{DI}\binom{1}{-2}$

$M\binom{x}{y} \in (DI) \iff \overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{DI}$ colinéaires.

ou $\overrightarrow{IM}\binom{x-1}{y}$ $\left(\text{car } \overrightarrow{IM}\binom{x-1}{y-0}\right)$

$\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{DI}$ colinéaires $\iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\iff -2(x-1) - y = 0$

$\iff \boxed{-2x - y + 2 = 0}$ équation de (DI)

* $B\left(\frac{3}{2};0\right)$ $J(0;1)$ donc $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} 0-\frac{3}{2} \\ 1-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$M\binom{x}{y} \in (BJ) \iff \overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{JM}\binom{x}{y-1}$

$\iff \begin{vmatrix} x & -\frac{3}{2} \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\iff x + \frac{3}{2}(y-1) = 0$

$\iff x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$

$\iff \boxed{2x + 3y - 3 = 0}$ équation de (BJ)

* $M\binom{x}{y}$ est l'intersection de (DI) et de (BJ), donc ses coordonnées vérifient le système :

$$(S)\begin{cases} -2x - y + 2 = 0 & L_1 \\ 2x + 3y - 3 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} -4x + 3 = 0 & L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ 2y - 1 = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc $\boxed{M\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$

Suite de l'exercice 36 - 3) M, K et C seront alignés si et seulement si $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont colinéaires.

On rappelle : $K\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}-1\\\frac{1}{2}-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}-\frac{4}{4}\\\frac{1}{2}-\frac{2}{2}\end{pmatrix}$ soit $\boxed{\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-1\\2-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-\frac{2}{2}\\1\end{pmatrix}$ soit $\boxed{\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}}$

On remarque que $\overrightarrow{MK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$

puisque $-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{2}\times 1 = -\frac{1}{2}$

($-\frac{1}{2}$: abscisse de $\overrightarrow{KC}$; abscisse de $\overrightarrow{MK}$; $-\frac{1}{2}$: ordonnée de $\overrightarrow{KC}$; ordonnée de $\overrightarrow{MK}$)

Donc $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont colinéaires,
donc les points M, K et C sont alignés.

C.Q.F.D

Sans remarquer directement que $\overrightarrow{MK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$, on pouvait calculer :

$$\det(\overrightarrow{MK};\overrightarrow{KC}) = \begin{vmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right)\times 1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 0$$

(+ : produit)

Ce qui prouvait que $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont colinéaires.

Exercice 37 - $A\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\q\end{pmatrix}$ $p\neq 0$ et $q\neq 0$

1) La droite (AB) passe par $A\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-p\\q-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-p\\q\end{pmatrix}$

Remarque : $\overrightarrow{AB}$ n'est pas le vecteur nul car $p\neq 0$ et $q\neq 0$.
Une droite ne saurait être dirigée par le vecteur nul !

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-p\\y\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{vmatrix}x-p & -p\\ y & q\end{vmatrix} = 0$$

$$\iff q(x-p) + yp = 0$$

(+ : produit)

$$\iff qx - qp + yp = 0$$

$$\iff qx + py - pq = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0}$$

en divisant les 2 membres par pq qui est non nul car $p\neq 0$ et $q\neq 0$

Équation de la droite (AB)

2) $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ → analogue à $p=3$ et $q=-2$

(CD) a donc pour équation : $\boxed{\frac{x}{3} - \frac{y}{2} - 1 = 0}$

Exercice 38 - **Hypothèses** :

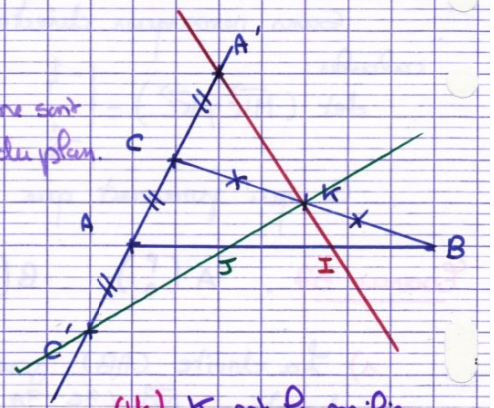
(H_1) ABC est un triangle → donc A, B et C ne sont pas alignés, donc $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.

(H_2) A' est le symétrique de A par rapport à C.

(H_3) C' est le symétrique de C par rapport à A.

(H_4) La droite (A'K) coupe (AB) en I

(H_5) La droite (C'K) coupe (AB) en J.



(H_6) K est le milieu de [BC].

Suite de l'exercice 38. 1) Déterminons les coordonnées des points A', K et C' dans le repère $(A;\vec{AB},\vec{AC})$

(H_4) A' est le symétrique de A par rapport à C
soit C est le milieu de $[AA']$
soit $\vec{AC} = \vec{CA'}$

Donc $\vec{AA'} = \vec{AC} + \vec{CA'}$ d'après la relation de Chasles
$= \vec{AC} + \vec{AC}$
$= 2\vec{AC}$ donc $\vec{AA'} = 0\vec{AB} + 2\vec{AC}$
(coordonnées de A')

donc $\boxed{A'(0;2)}$
dans le repère $(A;\vec{AB},\vec{AC})$

(H_5) K est le milieu de $[BC] \iff \vec{BK} = \vec{KC}$
$\iff \boxed{\vec{BK} = \frac{1}{2}\vec{BC}}$ (R_1)

donc $\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BK}$ d'après la relation de Chasles
$= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$ d'après (R_1)
$= \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC})$ d'après la relation de Chasles
$= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$
$= \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

donc $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$
(coordonnées de K)

$\boxed{K(\frac{1}{2};\frac{1}{2})}$ dans le repère $(A;\vec{AB},\vec{AC})$

(H_3) C' est le symétrique de C par rapport à A
soit que A est le milieu de $[CC']$
soit $\vec{CA} = \vec{AC}$ donc $\vec{AC'} = -\vec{AC}$

d'où $\vec{AC'} = 0\vec{AB} - 1\vec{AC}$ donc $\boxed{C'(0;-1)}$ dans le repère $(A;\vec{AB},\vec{AC})$
(coordonnées de C')

* **Recherche d'une équation de (A'K) sachant que $A'\binom{0}{2}$ et $K\binom{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$**

$\vec{A'K}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_K - x_{A'} \\ y_K - y_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(A'K) passe par $A'\binom{0}{2}$ et a pour vecteur directeur $\vec{A'K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$M\binom{x}{y} \in (A'K) \iff \vec{A'M}$ et $\vec{A'K}$ sont colinéaires

$\iff \begin{vmatrix} x & \frac{1}{2} \\ y-2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0$

$\iff -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(y-2) = 0$

$\iff \boxed{-3x - y + 2 = 0}$ équation de (A'K)

* **Recherche d'une équation de (C'K) sachant que $C'\binom{0}{-1}$ et $K\binom{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$**

$\vec{C'K}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_K - x_{C'} \\ y_K - y_{C'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Et comme je n'ai pas envie de m'embêter avec des dénominateurs qui risquent de me faire tromper dans les calculs, je vais remarquer que $2\vec{C'K}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (C'K) qui passe par $C'\binom{0}{-1}$

Suite de l'exercice 38.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C'K) \iff \overrightarrow{C'M}$ et $2\overrightarrow{C'K}$ sont colinéaires

$\iff \begin{vmatrix} x & 1 \\ y+1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\iff 3x - (y+1) = 0$

$\iff \boxed{3x - y - 1 = 0}$ une équation de $(C'K)$

C'est quand même beaucoup plus sympathique qu'au calcul précédent où j'avais gardé les dénominateurs !

2) (H_4) I est le point d'intersection de :

$\begin{cases} (A'K) \text{ qui a pour équation } -3x - y + 2 = 0 \\ (AB) \text{ qui a pour équation } y = 0 \text{ car c'est l'axe des abscisses} \end{cases}$

On a donc $y_I = 0$ et $-3x_I - 0 + 2 = 0$

soit $-3x_I = -2$

soit $x_I = \frac{2}{3}$

donc $\boxed{I\left(\frac{2}{3}\,;0\right)}$

(H_5) J est le point d'intersection de :

$\begin{cases} (C'K) \text{ qui a pour équation } 3x - y - 1 = 0 \\ (AB) \text{ qui a pour équation } y = 0 \end{cases}$

On a donc $y_J = 0$ et $3x_J - 0 - 1 = 0$ soit $3x_J = 1$

soit $x_J = \frac{1}{3}$

donc $\boxed{J\left(\frac{1}{3}\,;0\right)}$

3) $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont égaux, tous à $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Prouvons-le plus précisément par le calcul :

$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

$J\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\\0-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

$I\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}1-\frac{2}{3}\\0-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-0\\0-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times 1\\\frac{1}{3}\times 0\end{pmatrix}$ soit $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

Exercice 39

1) $d : 2x - y + 5 = 0$

$d' : 3x - 5y + 6 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\times(-5) - 3\times(-1) = -10 + 3 = -7 \neq 0$ donc d et d' sont sécantes.

$(S)\ \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 & L_1 \\ 3x - 5y + 6 = 0 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 7x + 19 = 0 & L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2 \\ 7y + 3 = 0 & L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -\frac{19}{7} \\ y = -\frac{3}{7} \end{cases}$

Le point d'intersection de d et de d' a pour coordonnées :

$\boxed{\left(-\frac{19}{7}\,;-\frac{3}{7}\right)}$

2) $d : 8x + 2y + 6 = 0 \iff 4x + y + 3 = 0$

$d' : 3x + \frac{3}{4}y - 5 = 0 \iff 12x + 3y - 20 = 0$

4	1	3
12	3	−20

proportionnalité — pas proportionnalité

En effet : $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 4\times 3 - 12\times 1 = 0$

et $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -20 \end{vmatrix} = 1\times(-20) - 3\times 3 = -20 - 9 = -29 \neq 0$

Les 2 droites sont donc strictement parallèles (c'est-à-dire parallèles et distinctes).

3) $d : x + 3y - 6 = 0$

$d' : \frac{1}{3}x + y - 2 = 0 \iff x + 3y - 6 = 0$

en multipliant les 2 membres par 3.

Les deux droites sont donc confondues.