1ère. 28 exercices sur les calculs de dérivées et leurs applications

Exercice 1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}\underbrace{x^3}+\frac{1}{2}\underbrace{x^2}+\underbrace{x}+1$

f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{3}\times\underbrace{3x^2}+\frac{1}{2}\times\underbrace{2x}+\underbrace{1}$

$$\boxed{f'(x) = x^2 + x + 1}$$

Exercice 2 : $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\underbrace{x^4}+4\underbrace{x^3}+5x+1$$

On demande le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1. Pour que celui-ci existe, f doit être dérivable en 1. Ce sera alors le nombre dérivé de f en 1, soit $f'(1)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\times\underbrace{4x^3}+4\times\underbrace{3x^2}+5$

$$\boxed{f'(x) = 12x^3 + 12x^2 + 5}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 12\times1^3 + 12\times1^2 + 5 \\ &= 12 + 12 + 5 \\ &= 29 \end{aligned}$$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 est $\boxed{29}$.

Exercice 3 : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \underbrace{x^3}+3x-10$

f est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{f'(x) = \underbrace{3x^2}+3}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $3x^2 \geq 0$

donc $3x^2+3 \geq 3$

Par conséquent, $f'(x)$ est strictement positif (puisque supérieur ou égal à 3) pour tout x réel.

→ f sera donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cela vient de cette propriété du cours : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée : Si f' est strictement positive sur I, sauf peut-être par quelques valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

Exercice 4. g définie par $g(x) = \frac{1}{3}\underbrace{x^3}-\underbrace{x}$ est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{3}\times\underbrace{3x^2}-\underbrace{1}$

soit $\boxed{g'(x) = x^2 - 1}$

or $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↗	$g(-1)$	↘	$g(1)$	↗	

D'après le tableau ci-contre, g est strictement décroissante sur $[-1;1]$

[Si vous ne calculez pas les valeurs exactes, indiquez simplement $g(-1)$ et $g(1)$

Exercice 5. La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 + x$.
u est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3x^2 + 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $3x^2 \geq 0$
donc $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$
donc $u'(x) > 0$
et u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$u'(x)$		+		
u		$u(-2)$	$u(0)$	

$\forall x \in [-2;0]$, on aura $u(-2) \leq u(x) \leq u(0)$

Calculons : $u(-2) = (-2)^3 + (-2) = -8 - 2 = -10$
$u(0) = 0^3 + 0 = 0$

Donc $\forall x \in [-2;0]$, $-10 \leq u(x) \leq 0$
soit $\boxed{u(x) \in [-10;0]}$

Exercice 6. La fonction k est définie par $k(x) = -x^2 + 2x$
k est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{k'(x) = -2x + 2}$

k' est une fonction affine de la forme $ax+b$ avec $a < 0$. Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $-2x + 2 = 0 \iff -2x = -2 \iff x = 1$.

D'où le tableau :

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$k'(x)$	$+\infty$	+	0	−	$-\infty$
k		$k(0)$	$k(1)$	$k(3)$	

$k(0) = -0^2 + 2 \times 0 = 0$ $\qquad$ $k(3) = -3^2 + 2 \times 3$
$= -9 + 6$
$k(1) = -1^2 + 2 \times 1 = 1$ $\qquad$ $k(3) = -3$

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
variations k / signe $k(x)$		0	1	−3	

$k(x)$ appartient à l'intervalle $[-3;1]$ lorsque x appartient à $[0;3]$

D'après les variations de la fonction k, lorsque $x \in [0;3]$
$k(x) \in [-3;1]$.

→ à vérifier en faisant tracer la courbe par la calculatrice.

Exercice 7. 1) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

f est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{4} \times 4x^3 + 3 \times 3x^2 - 2 \times 2x + 4$

$$\boxed{f'(x) = -x^3 + 9x^2 - 4x + 4}$$

2) $f(x) = (3x-1)(x+1)^2$

f est le produit de 3 fonctions polynômes : $x \mapsto 3x - 1$, $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x+1$. C'est donc aussi une fonction polynôme (si on développe l'expression, on obtient un polynôme de degré 3). Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1ère possibilité : On commence par développer entièrement l'expression de $f(x)$ avant de dériver.

Suite de l'exercice 7 - 2) ⚠ Il y a 3 facteurs. On ne peut pas "développer tout d'un coup". Je choisis de commencer par développer $(x+1)^2$ même si on pourrait faire un autre choix

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (3x-1)(x+1)^2$

$(a+b)^2$

$f(x) = (3x-1)(x^2+2x+1)$

$a^2 + 2ab + b^2$

$f(x) = 3x^3 - x^3 + 6x^2 - 2x + 3x - 1$

Penser à ordonner en même temps qu'on développe

$$\boxed{f(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 1}$$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2x + 1$

$$\boxed{f'(x) = 9x^2 + 10x + 1}$$

2ème possibilité : On ne développe que $(x+1)^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \underbrace{(3x-1)}_{u(x)}\underbrace{(x^2+2x+1)}_{v(x)}$

$u(x) = 3x - 1$ $u'(x) = 3$

$v(x) = x^2 + 2x + 1$ $v'(x) = 2x + 2$

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f l'est aussi et on a :

formule : $(uv)' = u'v + uv'$

$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$

$= 3(x^2 + 2x + 1) + (3x-1)(2x+2)$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 + 6x^2 + 6x - 2x - 2$

donc $\boxed{f'(x) = 9x^2 + 10x + 1}$

3ème possibilité (plus compliqué et avec la formule de la dérivée d'une fonction composée) ↳ pas au programme ?

$f(x) = \underbrace{(3x-1)}_{u(x)}\underbrace{(x+1)^2}_{v(x)}$ $u(x) = 3x-1$ $u'(x) = 3$

$v(x) = (x+1)^2 = u_1(v_1(x))$

avec $u_1 : x \mapsto x^2$ et $v_1 : x \mapsto x+1$

$u_1'(x) = 2x$ $v_1'(x) = 1$

$v'(x) = v_1'(x) \times u_1'(v_1(x))$

$= 1 \times 2(x+1)$

$= 2(x+1)$

$f'(x) = u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x)$

$= 3(x+1)^2 + 2(x+1)(3x-1)$

en factorisant par $x+1$

$= (x+1)(3(x+1) + 2(3x-1))$

$= (x+1)(3x+3+6x-2)$

$$\boxed{f'(x) = (x+1)(9x+1)}$$

L'intérêt est de trouver une forme factorisée ... qu'on peut aussi retrouver en factorisant la forme développée

$f'(x) = 9x^2 + 10x + 1$ $\Delta = 10^2 - 4 \times 9 \times 1 = 100 - 36 = 64 = 8^2$

$x_1 = \frac{-10-8}{18} = -1$ $x_2 = \frac{-10+8}{18} = -\frac{1}{9}$

$f'(x) = 9\left(x - \frac{1}{9}\right)(x+1)$ on retrouve $(9x+1)(x+1)$

Suite de l'exercice 7   3) $f(x) = (\sqrt{x}+1)^2$

f est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$ car elle est obtenue en élevant au carré (la fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$) la somme de la fonction racine carrée (définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$) et d'une fonction constante (définie sur $\mathbb{R}$).

* Idée n°1 : Dériver f en tant que produit :

$\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x) = \underbrace{(\sqrt{x}+1)}_{u(x)}\underbrace{(\sqrt{x}+1)}_{v(x)}$

$u'(x) = v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x)$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)$

$= \cancel{2} \times \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}}$

* Idée n°2 : Développer $f(x)$ avant de dériver.

$\forall x \in [0;+\infty[$ $f(x) = (\sqrt{x}+1)^2 = (\sqrt{x})^2 + 2 \times \sqrt{x} \times 1 + 1^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$f(x) = x + 2\sqrt{x} + 1$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 + \cancel{2} \times \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\boxed{f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}}$

On peut aussi laisser : $\boxed{f'(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

* Idée n°3 : Utiliser la formule de dérivation d'une fonction composée (qui est peut-être hors programme)

$\left(u(v(x))\right)' = v'(x) \times u'(v(x))$

Qu'on note couramment : $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$

le symbole $\circ$ ("rond") étant celui de la composition.

$\forall x \in [0;+\infty[$ $f(x) = u(v(x))$ avec : $u(x) = x^2$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = \sqrt{x}+1$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$

$= \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \times \cancel{2}(\sqrt{x}+1)$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}}$

4) $f(x) = \dfrac{3}{4x} - \dfrac{2x}{5}$ f est définie sur $\mathbb{R}^*$ car il y a une valeur interdite qui est 0.

Valeur interdite : $4x = 0 \iff x = 0$

f est la somme d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$: $x \mapsto \dfrac{3}{4x} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{x}$

fonction inverse

et d'une fonction (linéaire) définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

Suite de l'exercice 7 $x \mapsto \frac{2x}{5} = \frac{2}{5}x$

f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

* Idée n°1 : dériver terme à terme. $f(x) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{x} - \frac{2}{5} \times x$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{5}$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{3}{4x^2} - \frac{2}{5}}$$

→ sauf que cette forme n'est pas pratique pour la suite des problèmes (pour étudier le signe de $f'(x)$ par exemple.

→ Alors je vais réduire au même dénominateur.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = -\frac{3 \times 5}{4x^2 \times 5} - \frac{2 \times 4x^2}{5 \times 4x^2}$ ← je peux car $4x^2 \neq 0$ puisque $x \neq 0$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-15 - 8x^2}{20x^2}}$$

* Idée n°2 : D'abord réduire l'expression de $f(x)$ au même dénominateur, puis dériver comme un quotient.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{3 \times 5}{4x \times 5} - \frac{2x \times 4x}{5 \times 4x}$ → je peux car $4x \neq 0$ puisque $x \neq 0$

$$\boxed{f(x) = \frac{15 - 8x^2}{20x}}$$

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 15 - 8x^2$ $u'(x) = -16x$

$v(x) = 20x$ $v'(x) = 20$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$

$f'(x) = \frac{-16x \times 20x - 20(15 - 8x^2)}{(20x)^2}$

$f'(x) = \frac{-320x^2 - 300 + 160x^2}{400x^2}$

$f'(x) = \frac{-160x^2 - 300}{400x^2}$

$f'(x) = \frac{-\cancel{20} \times 8x^2 - \cancel{20} \times 15}{\cancel{20} \times 20x^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-8x^2 - 15}{20x^2}}$$

5) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$

Valeur interdite :

$(1-2x)^2 = 0 \iff 1 - 2x = 0$

$\iff 1 = 2x$

$\iff \frac{1}{2} = x$

La fonction $x \mapsto (1-2x)^2$ est une fonction polynôme qui s'annule si et seulement si $x = \frac{1}{2}$.

f est son inverse. Elle sera donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et dérivable sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f(x) = \frac{1}{v(x)}$

avec $v(x) = (1-2x)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times 2x + (2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$

et $v'(x) = -4 + 8x$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = \frac{-v'(x)}{(v(x))^2}$

Suite de l'exercice 5 $f'(x) = \dfrac{-(4+8x)}{((1-2x)^2)^2}$ $f'(x) = \dfrac{4-8x}{(1-2x)^4}$

$f'(x) = \dfrac{4(1-\cancel{2x})}{(1-2x)^3 \times (1-\cancel{2x})}$ ← Je peux car $1-2x \neq 0$ puisque $x \neq \frac{1}{2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^3}}$$

6) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{4-x}$ Valeur interdite : $4-x=0$ soit $4=x$

f est le quotient de 2 fonctions polynômes. Celle qui est au dénominateur s'annule pour $x=4$. f est donc définie sur $\mathbb{R}-\{4\}$ et dérivable sur chacun des 2 intervalles $]-\infty;4[$ et $]4;+\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{4\}$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2-2x+3 \\ u'(x) = 2x-2 \\ v(x) = 4-x \\ v'(x) = -1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{4\}$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{(v(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{(2x-2)(4-x) - (-1)(x^2-2x+3)}{(4-x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2+8x+\cancel{2x}-8+x^2-\cancel{2x}+3}{(4-x)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2+8x-5}{(4-x)^2}}$$

7) $f(x) = 2x-1+\dfrac{1}{3-x}$ Valeur interdite : $3-x=0$ soit $3=x$

f est la somme d'une fonction affine : $x \mapsto 2x+1$ et de l'inverse d'une autre fonction affine : $x \mapsto 3-x$ qui s'annule si et seulement si $x=3$.

f est donc définie sur $\mathbb{R}-\{3\}$ et dérivable sur $]-\infty;3[$ et sur $]3;+\infty[$

* Idée n°1 : dériver terme à terme, et réduire au même dénominateur seulement après le calcul de la dérivée.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{3\}$, $f(x) = 2x-1+\dfrac{1}{3-x} = 2x-1+\dfrac{1}{v(x)}$

avec $v(x) = 3-x$ et $v'(x) = -1$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f'(x) = 2 + \dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$

$$\boxed{f'(x) = 2 + \frac{1}{(3-x)^2}}$$

Cette expression peut suffire dans le cadre de cet exercice, mais si on devait faire l'étude du signe de $f'(x)$, mieux vaudrait réduire au même dénominateur :

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f'(x) = \dfrac{2 \times (3-x)^2}{1 \times (3-x)^2} + \dfrac{1}{(3-x)^2}$ ← j'ai le droit car $(3-x)^2 \neq 0$ puisque $x \neq 3$

$f'(x) = \dfrac{2(3-x)^2+1}{(3-x)^2}$ $f'(x) = \dfrac{2(9-6x+x^2)+1}{(3-x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{18-12x+2x^2+1}{(3-x)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2-12x+19}{(3-x)^2}}$$

Fin de l'exercice 7 - 7) * Idée n°2 : D'abord réduire l'expression de $f(x)$ au même dénominateur, puis dériver.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{3\}$, $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{3-x}$

$f(x) = \dfrac{2x \times (3-x)}{1 \times (3-x)} - \dfrac{3-x}{3-x} + \dfrac{1}{3-x}$ j'ai le droit car $3-x \neq 0$ puisque $x \neq 3$

$f(x) = \dfrac{6x - 2x^2 - (3-x) + 1}{3-x}$

$f(x) = \dfrac{6x - 2x^2 - 3 + x + 1}{3-x}$ $\quad \boxed{f(x) = \dfrac{-2x^2+7x-2}{3-x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{3\}$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = -2x^2+7x-2 \\ u'(x) = -4x+7 \\ v(x) = 3-x \\ v'(x) = -1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)\,u(x)}{(v(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{(-4x+7)(3-x) - (-1)(-2x^2+7x-2)}{(3-x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-12x + 21 + 4x^2 - \cancel{7x} - 2x^2 + \cancel{7x} - 2}{(3-x)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \dfrac{2x^2 - 12x + 19}{(3-x)^2}}$$

Exercice 8 f et g sont définies sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$\boxed{f(x) = \dfrac{4x+1}{x-2}}$ et $\boxed{g(x) = \dfrac{9}{x-2}}$

f est le quotient de 2 fonctions affines et son dénominateur s'annule si et seulement si $x=2$ → f est donc dérivable sur tous les intervalles ne contenant pas 2, donc en particulier sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

Même chose pour g qui est le quotient d'une fonction constante par une fonction affine qui s'annule si et seulement si $x=2$.

2) $\forall x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x+1 \\ u'(x) = 4 \\ v(x) = x-2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

donc $\forall x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)\,u(x)}{(v(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{4(x-2) - 1(4x+1)}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{4x - 8 - 4x - 1}{(x-2)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \dfrac{-9}{(x-2)^2}}$$

$\forall x \neq 2$, $g(x) = 9 \times \dfrac{1}{x-2} = 9 \times \dfrac{1}{v(x)}$

C'est pareil

avec $v(x) = x-2$ et $v'(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$, $g'(x) = 9 \times \dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2} = 9 \times \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

$$\boxed{g'(x) = \dfrac{-9}{(x-2)^2}}$$

→ f et g ont la même dérivée. $\begin{cases} \text{même ensemble "de dérivation"} \\ \text{même expression de la dérivée.} \end{cases}$

Fin de l'exercice 8. 3) $\forall x \neq 2$, $f(x) - g(x) = \dfrac{4x+1}{x-2} - \dfrac{9}{x-2}$

$$f(x) - g(x) = \frac{4x-8}{x-2}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{4(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}}$$

$$f(x) - g(x) = 4$$

f et g diffèrent à 1 constante près. C'est pourquoi elles ont la même dérivée.

(En fait, $\forall x \neq 2$, $f(x) = g(x) + 4$)

Exercice 9. 1) $f(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}$ $\qquad a = -1$

Valeur interdite : $1 - 2x = 0 \iff 1 = 2x \iff \frac{1}{2} = x$

f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et dérivable sur les intervalles : $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ car c'est un quotient de 2 fonctions polynôme, celle qui est au dénominateur s'annulant si et seulement si $x = \frac{1}{2}$.

$\forall x \neq \frac{1}{2}$ $\qquad f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x+3 & u'(x) = 1 \\ v(x) = 1-2x & v'(x) = -2 \end{cases}$

C'est plus rapide que d'écrire $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)\,u(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{1(1-2x) - (-2)(x+3)}{(1-2x)^2} = \frac{1-2x+2(x+3)}{(1-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-\cancel{2x}+\cancel{2x}+6}{(1-2x)^2} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{7}{(1-2x)^2}}$$

$\boxed{f'(-1)} = \dfrac{7}{(1-2\times(-1))^2} = \dfrac{7}{(1+2)^2} = \dfrac{7}{3^2} = \boxed{\dfrac{7}{9}}$ $\qquad \boxed{f(-1)} = \dfrac{-1+3}{1-2\times(-1)} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

Pour l'équation de la tangente, on a 2 possibilités :

* Idée 1 : Utiliser la formule du cours, de l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

ici : $y = \dfrac{7}{9}(x-(-1)) + \dfrac{2}{3}$

soit $y = \dfrac{7}{9}(x+1) + \dfrac{2}{3}$

soit $y = \dfrac{7}{9}x + \dfrac{7}{9} + \dfrac{2\times 3}{3\times 3}$

soit $\boxed{y = \dfrac{7}{9}x + \dfrac{13}{9}}$

* Idée n°2 : On sait que la tangente a pour coefficient directeur $f'(-1) = \frac{7}{9}$, et aussi qu'elle passe par le point de coordonnées $(-1 ; f(-1))$ soit $\left(-1 ; \frac{2}{3}\right)$

Son équation réduite est donc de la forme $y = \frac{7}{9}x + p$.
Comme le point $A\left(-1 ; \frac{2}{3}\right)$ lui appartient, on a :

$$\frac{2}{3} = \frac{7}{9}\times(-1) + p \iff \frac{2\times 3}{3\times 3} + \frac{7}{9} = p \iff \boxed{\frac{13}{9} = p}$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse -1 est donc :

$$\boxed{y = \frac{7}{9}x + \frac{13}{9}}$$

→ Ensuite tracer la courbe et la tangente à votre calculatrice pour le vérifier visuellement.

Suite de l'exercice 9. 2) $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$ $a = 4$

f est la somme d'une fonction polynôme : $x \mapsto x^2+1$ et d'une fonction rationnelle (une fonction rationnelle, c'est le quotient de 2 polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas.

En effet : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 > 0$

f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{v(x)}$ avec $\begin{cases} v(x) = x^2+1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - \dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$

$$\boxed{f'(x) = 2x + \frac{2x}{(x^2+1)^2}}$$

$f(4) = 4^2 + 1 - \dfrac{1}{4^2+1}$

$= 16 + 1 - \dfrac{1}{16+1}$

$= 17 - \dfrac{1}{17}$

$= \dfrac{17 \times 17}{1 \times 17} - \dfrac{1}{17}$

$$\boxed{f(4) = \frac{288}{17}}$$

$f'(4) = 2 \times 4 + \dfrac{2 \times 4}{(4^2+1)^2}$

$= 8 + \dfrac{8}{(16+1)^2}$

$= \dfrac{8 \times 17^2}{17^2} + \dfrac{8}{17^2}$

$= \dfrac{8 \times 289 + 8}{289}$

$$\boxed{f'(4) = \frac{2320}{289}}$$

* Méthode 1. Avec la formule du cours.

La tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 4 aura pour équation :

$$\boxed{y = f'(4)(x-4) + f(4)}$$

soit $y = \dfrac{2320}{289}(x-4) + \dfrac{288}{17}$

soit $y = \dfrac{2320x - 9280}{289} + \dfrac{288 \times 17}{17 \times 17}$

soit $$\boxed{y = \frac{2320}{289}x - \frac{4384}{289}}$$

* Méthode 2 : On sait que le point de la courbe représentative de f d'abscisse 4 est $A\left(4 ; \dfrac{288}{17}\right)$.
La tangente à la courbe en ce point $\begin{cases} \text{passe par } A \\ \text{a pour coefficient directeur } \boxed{\dfrac{2320}{289}} \end{cases}$ $f'(4) \to$

On recherche son équation réduite sous la forme :

$$y = \frac{2320}{289}x + p$$

$A\left(4 ; \dfrac{288}{17}\right)$ est sur la tangente donc : $\dfrac{288}{17} = \dfrac{2320}{289} \times 4 + p$

soit $\dfrac{288 \times 17}{17 \times 17} - \dfrac{2320}{289} = p$ soit $\boxed{p = \dfrac{2576}{289}}$

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 4 est donc :

$$\boxed{y = \frac{2320}{289}x + \frac{2576}{289}}$$

Suite de l'exercice 9. 3) $f(x) = (4x+8)\sqrt{x}$ $a=4$

f est le produit d'une fonction affine : $x \mapsto 4x+8$ (définie et dérivable sur IR) et de la fonction racine carrée.
Elle est donc, comme la fonction racine carrée :
- définie sur $[0;+\infty[$
- dérivable sur $]0;+\infty[$

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x+8 & u'(x) = 4 \\ v(x) = \sqrt{x} & v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$= 4\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(4x+8)$

C'est pareil !

Essayons de rendre la formule plus "sympathique" en réduisant au même dénominateur : $2\sqrt{x}$

$\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{4\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{1 \times 2\sqrt{x}} + \frac{4x+8}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{8x + 4x + 8}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{12x+8}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{\cancel{2}(6x+4)}{\cancel{2}\sqrt{x}}$

$\boxed{f'(x) = \frac{6x+4}{\sqrt{x}}}$

$\boxed{f(4)} = (4\times4+8)\sqrt{4} = (16+8)\times 2 = 24\times 2 = \boxed{48}$

$\boxed{f'(4)} = \frac{6\times4+4}{\sqrt{4}} = \frac{24+4}{2} = \frac{28}{2} = \boxed{14}$

* Méthode 1 : en utilisant la formule de l'équation de la tangente vue en cours :

Équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 4 :

$y = f'(4)(x-4) + f(4)$

soit $y = 14(x-4) + 48$

soit $y = 14x - 56 + 48$

soit $\boxed{y = 14x - 8}$

* Méthode 2 : Rechercher p dans $y = mx + p$ avec $m = 14$ et $(x;y) = (4;48)$

Exercice 10 : f est définie sur IR par $\boxed{f(x) = \frac{3x}{x^2+1}}$

1) f est le quotient d'une fonction linéaire : $x \mapsto 3x$, qui est définie et dérivable sur IR, par une fonction polynôme : $x \mapsto x^2+1$, qui est aussi définie et dérivable sur IR et qui, de plus, ne s'annule jamais, car $\forall x \in$ IR, $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 > 0$.

f est donc définie et dérivable sur IR.

2) $\forall x \in$ IR, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x & u'(x) = 3 \\ v(x) = x^2+1 & v'(x) = 2x \end{cases}$

Suite de l'exercice 10 :

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$

soit $f'(x) = \dfrac{3(x^2+1) - 2x \times 3x}{(x^2+1)^2}$

soit $f'(x) = \dfrac{3x^2+3-6x^2}{(x^2+1)^2}$

soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}}$

Pour établir le tableau de signes de $f'(x)$, je choisis de factoriser son numérateur $-3x^2+3$. On pourrait aussi utiliser $\Delta = b^2-4ac = 0^2 - 4\times(-3)\times 3 = 36 = 6^2$, et calculer les racines 1 et −1 du trinôme.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $-3x^2+3 = -3\underbrace{(x^2-1)}_{a^2-b^2} = -3\underbrace{(x+1)(x-1)}_{(a+b)(a-b)}$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}}$ → Remarquons que le dénominateur est toujours strictement positif.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, $x^2+1>0$

donc $(x^2+1)^2>0$

$f'(x)$ sera donc du signe de son numérateur.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	

Calculons : $f(-1) = \dfrac{3\times(-1)}{(-1)^2+1} = \dfrac{-3}{2}$ et $f(1) = \dfrac{3\times 1}{1^2+1} = \dfrac{3}{2}$

3) La formule générale de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

avec ici : $\boxed{f'(a) = \dfrac{-3a^2+3}{(a^2+1)^2}}$

et $\boxed{f(a) = \dfrac{3a}{a^2+1}}$

Ici, cela donne :

$$y = \frac{-3a^2+3}{(a^2+1)^2}(x-a) + \frac{3a}{a^2+1}.$$

On peut réduire les 2 termes au même dénominateur $(a^2+1)^2$. Cela donne :

$$y = \frac{(-3a^2+3)(x-a)}{(a^2+1)^2} + \frac{3a\times(a^2+1)}{(a^2+1)(a^2+1)}$$

soit $y = \dfrac{(-3a^2+3)x - a(-3a^2+3) + 3a^3+3a}{(a^2+1)^2}$

$$y = \frac{-3(a+1)(a-1)}{(a^2+1)^2}x + \frac{3a^3 \cancel{-3a} + 3a^3 \cancel{+3a}}{(a^2+1)^2}$$

$$\boxed{y = \underbrace{\frac{-3(a+1)(a-1)}{(a^2+1)^2}}_{\substack{f'(a)\\ \text{coefficient directeur}\\ \text{de la tangente}}} x + \underbrace{\frac{6a^3}{(a^2+1)^2}}_{\substack{\text{ordonnée à}\\ \text{l'origine de la}\\ \text{tangente}}}}$$

Exercice 11 : g est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 8}$

1) g est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}x^2 + \frac{5}{\cancel{2}} \times \cancel{2}x$$

soit $\boxed{g'(x) = x^2 + 5x}$

2) $g'(x) = 0 \iff x^2 + 5x = 0 \iff x(x+5) = 0$
$\iff x = 0$ ou $x + 5 = 0$
$\iff \underline{x = 0}$ ou $\underline{x = -5}$

La dérivée de g s'annule sur $\mathbb{R}$ en 2 valeurs : $x = 0$ et $x = -5$. Cela signifie qu'il existe 2 points de la courbe représentative de g, ses points d'abscisses 0 et -5, en lesquels la tangente à la courbe est horizontal. Calculons les ordonnées de ces 2 points (que nous nommerons A pour le point d'abscisse -5 et B pour le point d'abscisse 0)

<u>Ordonnée de A</u> : $f(-5) = \frac{(-5)^3}{3} + \frac{5}{2} \times (-5)^2 - 8$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{5}{2} \times 25 - 8$$

$$= -\frac{125 \times 2}{3 \times 2} + \frac{125 \times 3}{2 \times 3} - \frac{8 \times 6}{1 \times 6}$$

$$= -\frac{250}{6} + \frac{375}{6} - \frac{48}{6}$$

$$f(-5) = \frac{77}{6}$$

→ Donc A a pour coordonnées $\boxed{\left(-5 ; \frac{77}{6}\right)}$

<u>Ordonnée de B</u> : $f(0) = \frac{0^3}{3} + \frac{5}{2} \times 0^2 - 8 = \underline{-8}$

B a pour coordonnées $\underline{(0 ; -8)}$

Exercice 12 : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 6}$

f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times 4x^3 - 8 \times 2x$

$$\boxed{f'(x) = 8x^3 - 16x}$$

Cherchons une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse -1 :

$$f(-1) = 2 \times (-1)^4 - 8 \times (-1)^2 + 6$$
$$= 2 \times 1 - 8 \times 1 + 6$$
$$= 2 - 8 + 6$$

$$\boxed{f(-1) = 0}$$

$$f'(-1) = 8 \times (-1)^3 - 16 \times (-1)$$
$$= 8 \times (-1) + 16$$
$$= -8 + 16$$

$$\boxed{f'(-1) = 8}$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse -1 est :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

Suite de l'exercice 12 soit $y = 8(x+1) + 0$

soit $\boxed{y = 8x + 8}$

Pour savoir si cette tangente passe par $A(\underset{x_A}{0} ; \underset{y_A}{8})$,

on calcule : $8x_A + 8 = 8 \times 0 + 8 = 8 = y_A$ → Oui, la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse -1 passe bien par $A(0;8)$

Conseil : vérifiez tout cela graphiquement en faisant tracer par la calculatrice : * la courbe représentative de f.
* la tangente d'équation $y = 8x + 8$.

Exercice 13. $\boxed{f : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2}$

1) La courbe semble avoir une tangente parallèle à l'axe des abscisses en 2 points : un dont l'abscisse semble proche de $-2,6$ et un autre dont l'abscisse semble être 0.

2) f est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x$$

$\boxed{f'(x) = x^3 + 3x^2 + x}$ $\boxed{f'(x) = x(x^2 + 3x + 1)}$

en factorisant par x.

Je considère le trinôme : $x^2 + 3x + 1$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5$

Le trinôme admet 2 racines : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Cela signifie que $f'(x) = x(x^2 + 3x + 1)$ s'annule en 3 valeurs : $\begin{cases} 0 \\ \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2,61 \\ \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0,38 \end{cases}$

→ Contrairement aux apparences, ce n'est pas en 2 mais en 3 points que la courbe représentative de f admet des tangentes horizontales. On peut le visualiser sur le graphique en zoomant suffisamment dans la zone de l'origine du repère.

La courbe admet des tangentes horizontales en ses points d'abscisses : $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et 0.

Exercice 14. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $\boxed{f(x) = \dfrac{2x}{x+1}}$

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f.

1) f est le quotient : – d'une fonction linéaire : $x \mapsto 2x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
– par une fonction affine : $x \mapsto x+1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui s'annule si et seulement si $x+1 = 0$ soit $x = -1$

Suite de l'exercice 14. f est donc dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas -1, donc en particulier sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ou $\forall x \neq -1$ $\quad f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ v(x) = x+1 & v'(x) = 1 \end{cases}$

Donc $\forall x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2x \times 1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\cancel{2x} + 2 - \cancel{2x}}{(x+1)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}}$$

2) La droite d'équation $y = 4x$ a pour coefficient directeur 4. Chercher les points de $\mathcal{C}$ en lesquels sa tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$, c'est chercher les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 4$ → cela nous donne les abscisses de ces points. Et nous ensuite de calculer leurs ordonnées.

Résolvons donc l'équation $f'(x) = 4$ (E)

(E) $\iff \dfrac{2}{(x+1)^2} = 4$ avec $x \neq -1$ $\iff 2 = 4\underbrace{(x+1)^2}_{(a+b)^2}$ avec $x \neq -1$

(E) $\iff 2 = 4\underbrace{(x^2 + 2x + 1)}_{a^2+2ab+b^2}$ avec $x \neq -1$ $\iff 2 = 4x^2 + 8x + 4$ et $x \neq -1$

(E) $\iff 0 = 4x^2 + 8x + 2$ et $x \neq -1$ $\iff 0 = 2x^2 + 4x + 1$ et $x \neq -1$
en divisant les 2 membres par 2.
(ce n'était pas obligatoire)

Considérons le trinôme : $2x^2 + 4x + 1$.

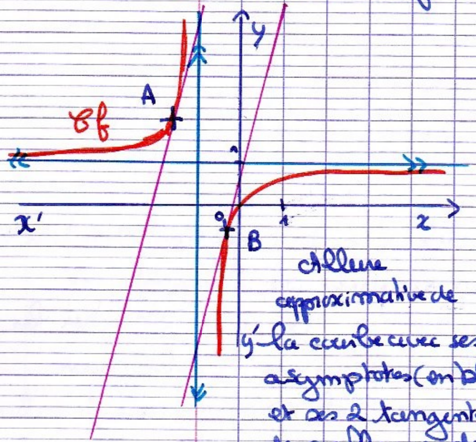
$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 1 = 16 - 8 = 8$ $\quad \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Le trinôme admet 2 racines : $x_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \approx -1{,}7$

et $x_2 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}29$

Ces 2 racines sont différentes de -1.

→ On a donc trouvé 2 abscisses, $\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$ de points en lesquels la courbe $\mathcal{C}$ admet des tangentes de coefficient directeur 4.
Nommons ces points respectivement A et B.



Allure approximative de la courbe avec ses asymptotes (en bleu) et ses 2 tangentes de coefficient directeur 4.

Calcul de l'ordonnée de A :

$f\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\cancel{2} \times \left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)}{\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} + 1}$

J'ai multiplié le numérateur et le dénominateur par 2

$= \dfrac{-2-\sqrt{2}}{\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2}{2}}$

$= \dfrac{-4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(4 + 2\sqrt{2}) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

$f\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2} + 2 \times 2}{2}$

$f\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}+4}{2}$

$$\boxed{f\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2}$$

$\approx 4{,}82$

donc $\boxed{A\left(\underbrace{\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}}_{\approx -1{,}7} ; \underbrace{2\sqrt{2}+2}_{\approx 4{,}82}\right)}$

Suite de l'exercice 14.

Calcul de l'ordonnée de B : $f\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\times\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)}{\frac{-2+\sqrt{2}}{2}+1}$

$\boxed{f\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{-2+\sqrt{2}}{\frac{-2+\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{-4+2\sqrt{2}}{-2+\sqrt{2}+2}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2

$= \frac{-4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(-4+2\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$= \frac{-4\sqrt{2}+4}{2} = \boxed{-2\sqrt{2}+2} \approx -0{,}83$

Les coordonnées de B sont $\boxed{\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\ ;\ -2\sqrt{2}+2\right)}$

$\approx -0{,}29 \qquad \approx -0{,}83$

3) Formule générale de l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse a ($a \neq -1$) :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

avec : $f(a) = \frac{2a}{a+1}$ et $f'(a) = \frac{2}{(a+1)^2}$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{y = \frac{2}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{2a}{a+1}}$$

On veut savoir s'il existe une valeur de a telle que la tangente passe par le point A (0 ; 1), c'est-à-dire telle que les coordonnées de A vérifient l'équation ci-dessus. Je remplace x par $x_A = 0$ dans le membre de droite et vois s'il est possible d'obtenir $y_A = 1$.

$\frac{2}{(a+1)^2}(0-a) + \frac{2a}{a+1} = \frac{-2a}{(a+1)^2} + \frac{2a \times (a+1)}{(a+1)\times(a+1)}$

J'ai le droit car $a \neq -1$ donc $a+1 \neq 0$

$= \frac{\cancel{-2a} + 2a^2 + \cancel{2a}}{(a+1)^2}$

$= \frac{2a^2}{(a+1)^2}$

Existe-t-il une ou des valeurs de a telle(s) que :

(E) $\frac{2a^2}{(a+1)^2} = 1$? On résout l'équation (E) dans $\mathbb{R} - \{-1\}$

(E) $\iff 2a^2 = (a+1)^2$ en multipliant les 2 membres par $(a+1)^2$ qui est non nul car $a \neq -1$

(E) $\iff 2a^2 = a^2 + 2a + 1$ $\quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$-2a^2 \qquad -2a^2$

(E) $\iff 0 = -a^2 + 2a + 1$

$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 1 = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

On trouve 2 racines : $a_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = \boxed{1+\sqrt{2}} \neq -1$

et $a_2 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = \boxed{1-\sqrt{2}} \neq -1$

On a trouvé 2 valeurs de a qui satisfont la condition : la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a passe par le point de coordonnées (0 ; 1)

→ Vous pouvez vous arrêter là. Moi, je vérifie que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses a_1 et a_2 passent bien par A (0 ; 1)

Suite de l'exercice 14. * Je cherche l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse $a_1 = 1+\sqrt{2}$.

Cette tangente a pour équation : $y = f'(a_1)(x - a_1) + f(a_1)$

$$f(a_1) = \frac{2a_1}{a_1+1} \quad \text{avec} \quad a_1 = 1+\sqrt{2}$$

soit $f(a_1) = \dfrac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}+1} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(2+2\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})} = \dfrac{\cancel{4}+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\cancel{4}}{4-2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}}$

$f'(a_1) = \dfrac{2}{(a_1+1)^2} = \dfrac{2}{(1+\sqrt{2}+1)^2} = \dfrac{2}{(2+\sqrt{2})^2}$

$= \dfrac{2}{4+4\sqrt{2}+2} = \dfrac{2}{6+4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1\times(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-4\times 2} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{1} = \boxed{3-2\sqrt{2}}$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse a_1 est :

$$y = \underbrace{(3-2\sqrt{2})}_{f'(a_1)}(x - \underbrace{(1+\sqrt{2})}_{a_1}) + \underbrace{\sqrt{2}}_{f(a_1)}$$

soit $y = (3-2\sqrt{2})x - (3-2\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

soit $y = (3-2\sqrt{2})x - [3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4] + \sqrt{2}$

soit $y = (3-2\sqrt{2})x - (-1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

soit $y = (3-2\sqrt{2})x + 1 - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}}$

soit $\boxed{y = (3-2\sqrt{2})x + 1}$

$A(0;1)$ appartient bien à cette tangente car :

$$(3-2\sqrt{2})\times\underbrace{0}_{x_A} + 1 = \underbrace{1}_{y_A}$$

* Je recherche l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse $a_2 = 1-\sqrt{2}$

$\boxed{f(a_2)} = \dfrac{2(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}+1} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{(2-2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{\cancel{4}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\cancel{4}}{4-2} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{2} = \boxed{-\sqrt{2}}$

$\boxed{f'(a_2)} = \dfrac{2}{(1-\sqrt{2}+1)^2} = \dfrac{2}{(2-\sqrt{2})^2} = \dfrac{2}{4-4\sqrt{2}+2}$

$= \dfrac{2}{6-4\sqrt{2}} = \dfrac{2\times(6+4\sqrt{2})}{(6-4\sqrt{2})\times(6+4\sqrt{2})} = \dfrac{12+8\sqrt{2}}{36-16\times 2}$

$= \dfrac{12+8\sqrt{2}}{4} = \boxed{3+2\sqrt{2}}$

La tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse a_2 a donc pour équation :

$$y = f'(a_2)(x - a_2) + f(a_2)$$

soit $y = (3+2\sqrt{2})(x-(1-\sqrt{2})) - \sqrt{2}$

soit $y = (3+2\sqrt{2})x - (3+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) - \sqrt{2}$

soit $y = (3+2\sqrt{2})x - (3+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\times 2) - \sqrt{2}$

soit $y = (3+2\sqrt{2})x - (-1-\sqrt{2}) - \sqrt{2}$

soit $y = (3+2\sqrt{2})x + 1 + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{2}}$

soit $\boxed{y = (3+2\sqrt{2})x + 1}$ ← Si je remplace x par 0, j'obtiens $y = 1$. Donc $A(0;1)$ appartient bien à cette tangente.

Exercice 15 : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1}$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 \times 2x + 3$ $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 4x + 3}$

Cherchons les éventuelles racines du trinôme : $3x^2 + 4x + 3$

$\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 3 = 16 - 36 < 0$ → le trinôme n'a pas de racine (dans $\mathbb{R}$)

$\mathcal{C}$ n'admet donc pas de tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3) Les droites parallèles à la droite d'équation $\boxed{y = 3x - 5}$ ont pour coefficient directeur 3 !

On cherche donc des valeurs de x telles que $\boxed{f'(x) = 3}$

$f'(x) = 3 \iff 3x^2 + 4x + 3 = 3 \iff 3x^2 + 4x = 0$

$\iff x(3x + 4) = 0$

$\iff x = 0$ ou $3x + 4 = 0$

$\iff x = 0$ ou $3x = -4$

$\iff \boxed{x = 0}$ ou $\boxed{x = -\frac{4}{3}}$

→ Il existe donc 2 points, que je vais nommer A et B, 2 points de $\mathcal{C}$, dont les abscisses sont $-\frac{4}{3}$ (pour A) et 0 (pour B) en lesquels $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur 3.

Calcul de l'ordonnée de A : $f(-\frac{4}{3})$

$f(-\frac{4}{3}) = (-\frac{4}{3})^3 + 2 \times (-\frac{4}{3})^2 + \cancel{3} \times (-\frac{4}{\cancel{3}}) + 1$

$f(-\frac{4}{3}) = -\frac{4^3}{3^3} + \frac{2 \times 4^2 \times 3}{3^2 \times 3} - \frac{4 \times 3^3}{1 \times 3^3} + \frac{3^3}{3^3}$

$= -\frac{64}{27} + \frac{96}{27} - \frac{108}{27} + \frac{27}{27}$

$\boxed{f(-\frac{4}{3}) = -\frac{49}{27}}$ donc $\boxed{A \left(-\frac{4}{3} ; -\frac{49}{27}\right)}$

Calcul de l'ordonnée de B : $f(0) = 0^3 + 2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1 = 1$

$\boxed{B(0;1)}$

Exercice 16 : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = -x^4 + 2x^2 + x}$

f est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4x^3 + 2 \times 2x + 1$ $\boxed{f'(x) = -4x^3 + 4x + 1}$

Je vérifie que A(-1;0) appartient bien à la courbe représentative de f, que je nomme $\mathcal{C}_f$.

$f(\underset{x_A}{-1}) = -(-1)^4 + 2 \times (-1)^2 + (-1) = -1 + 2 \times 1 - 1 = \underset{y_A}{0}$ ok

$f'(-1) = -4 \times (-1)^3 + 4 \times (-1) + 1 = -4 \times (-1) - 4 + 1$
$= \cancel{4} - \cancel{4} + 1 = 1$

On a donc : $\boxed{f(-1) = 0}$ et $\boxed{f'(-1) = 1}$

Une équation de T est donc : $y = 1(x - (-1)) + 0$

soit $\boxed{y = x + 1}$ ← coefficient directeur = 1 ← ordonnée à l'origine = 1

On veut savoir s'il existe un autre réel a que -1

Suite de l'exercice 16 tel que l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse a soit aussi $y = x+1$.

Formule générale de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

avec $f(a) = -a^4 + 2a^2 + a$

et $f'(a) = -4a^3 + 4a + 1$

Ce qui donne : $y = (-4a^3+4a+1)(x-a) - a^4 + 2a^2 + a$

soit $y = (-4a^3+4a+1)x + 4a^4 - 4a^2 \cancel{-a} - a^4 + 2a^2 \cancel{+a}$

soit $y = \underbrace{(-4a^3+4a+1)}_{\text{coefficient directeur} \to \text{qu'on voudrait égal à 1}} + \underbrace{3a^4 - 2a^2}_{\text{ordonnée à l'origine qu'on voudrait égal à 1 aussi}}$

On cherche donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} -4a^3 + 4a + 1 = 1 \quad (E_1) \\ 3a^4 - 2a^2 = 1 \quad (E_2) \end{cases}$$

$(E_1) \iff -4a^3 + 4a = 0 \iff -4a(a^2 - 1) = 0$

$\iff -4a(a+1)(a-1) = 0$

$\iff -4a = 0$ ou $a+1 = 0$ ou $a-1 = 0$

$\iff a = 0$ ou $a = -1$ ou $a = 1$

testons (E_2) avec ces 3 "candidats"

$a = 0 \to 3\times0^4 - 2\times0^2 = 0 \neq 1 \to$ ne convient pas

$a = -1 \to 3\times(-1)^4 - 2\times(-1)^2 = 3\times1 - 2\times1$

$= 3 - 2$

$= 1$

$\to$ Convient. Mais on le savait ! car T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1

$a = 1 \to 3\times1^4 - 2\times1^2 = 3 - 2 = 1$

$\to$ convient

T est donc aussi la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 1.

Critique : ma solution semble compliquée. J'aurais pu :

* Commencer par résoudre $f'(a) = 1$ afin de trouver les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 1 :

$f'(a) = 1 \iff -4a^3 + 4a + 1 = 1$

$\iff -4a^3 + 4a = 0$

$\iff -4a(a^2-1) = 0$

$\iff -4a(a+1)(a-1) = 0$

$\iff -4a = 0$ ou $a+1 = 0$ ou $a-1 = 0$

$\iff a = 0$ ou $a = -1$ ou $a = 1$

* Déterminer ensuite les équations réduites des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 1, ou même :

Calculer $f(0) = -0^4 + 2\times0^2 + 0 = 0$ Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 a pour ordonnée 0 $\to$ il ne peut pas appartenir à T qui a pour équation $y = x+1$ car $0+1 = 1 \neq 0$.

Suite de l'exercice 16 Reste à tester la valeur $a = 1$.

On calcule : $f(1) = -1^4 + 2\times1^2 + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$

L'équation réduite de la tangente à C_f en son point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

soit $y = 1\times(x-1) + 2$

soit $y = x - 1 + 2$

soit $\boxed{y = x+1}$ ← C'est l'équation réduite de T.

On a bien trouvé une autre abscisse que -1 et une seule, cette abscisse valant 1, telle que la tangente à C_f en son point d'abscisse 1 soit également la droite T d'équation réduite $y = x+1$.

Exercice 17 – f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4}$

1) f est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$; et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 - 3\times2x + 3$

soit $f'(x) = \boxed{3x^2 - 6x + 3}$

Pour trouver les tangentes à la courbe représentative de f (nommée $\mathcal{C}$) qui ont pour coefficient directeur 3, on résout :

$f'(x) = 3 \iff 3x^2 - 6x + 3 = 3 \iff 3x^2 - 6x = 0$

$\iff 3x(x-2) = 0 \iff 3x = 0$ ou $x - 2 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 2$

Il existe donc 2 points, que je nomme A et B, dont les abscisses sont respectivement 0 et 2, en lesquels $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur 3.

Calcul de l'ordonnée de A : $f(0) = 0^3 - 3\times0^2 + 3\times0 + 4 = 4$ $\boxed{A(0;4)}$

Calcul de l'ordonnée de B : $f(2) = 2^3 - 3\times2^2 + 3\times2 + 4$

$= 8 - 3\times4 + 6 + 4$

$= 8 - 12 + 10$

$f(2) = 6$ $\boxed{B(2;6)}$

Les points de $\mathcal{C}$ en lesquels elle admet une tangente de coefficient directeur 3 sont $\boxed{A(0;4)}$ et $\boxed{B(2;6)}$.

2) On cherche des réels a tels que la tangente à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse a passe par $A(0;4)$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse a, pour tout réel a, est : $\boxed{f'(a) = 3a^2 - 6a + 3}$

La tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse a a pour équation :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

soit $\boxed{y = (3a^2 - 6a + 3)(x - a) + a^3 - 3a^2 + 3a + 4}$

$A(0;4)$ appartiendra à cette tangente si et seulement si :

$4 = (3a^2 - 6a + 3)(0 - a) + a^3 - 3a^2 + 3a + 4$

Je nomme cette équation (E)

Suite de l'exercice 17 :

$(E) \iff \cancel{4} = -3a^3 + 6a^2 \cancel{-3a} + a^3 - 3a^2 + \cancel{3a} + \cancel{4}$

$(E) \iff 0 = -2a^3 + 3a^2$

$(E) \iff 0 = a^2(-2a+3)$

$(E) \iff 0 = a^2$ ou $0 = -2a+3$

$(E) \iff a = 0$ ou $2a = 3$

$(E) \iff a = 0$ ou $a = \frac{3}{2}$

Il existe bien 2 tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ qui passent par $A(0;4)$ → $\mathcal{T}_1$ la tangente à $\mathcal{C}$ en A
→ $\mathcal{T}_2$ la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

Exercice 18 : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 2}$

1) f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3\times 2x - 3$ soit $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x - 3}$

2) $f(0) = 0^3 - 3\times 0^2 - 3\times 0 + 2 = 2$

$f'(0) = 3\times 0^2 - 6\times 0 - 3 = -3$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0 a pour équation :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

soit $\boxed{y = -3x + 2}$

3) g est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{g(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 - x + 4}$

g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 4x^3 - \frac{1}{3}\times 3x^2 - 2\times 2x - 1$

soit $\boxed{g'(x) = 4x^3 - x^2 - 4x - 1}$

$g(0) = 0^4 - \frac{0^3}{3} - 2\times 0^2 - 0 + 4 = 4$

$g'(0) = 4\times 0^3 - 0^2 - 4\times 0 - 1 = -1$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de g en son point d'abscisse 0 est :

$y = g'(0)(x-0) + g(0)$

$y = -1 \times x + 4$

$\boxed{y = -x + 4}$

→ On remarque que quand la fonction polynôme se termine par $mx + p$, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction en son point d'abscisse 0 semble être $\boxed{y = mx + p}$

C'est ce que la question 4) va nous permettre de démontrer ... dans le cas particulier d'un polynôme de degré 3.

4) P est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$

P est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

Suite de l'exercice 18 : $P'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c$

soit $\boxed{P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$

$P(0) = a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = d$

$P'(0) = 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = c$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de P en son point d'abscisse 0 est :

$$y = P'(0)(x - 0) + P(0)$$

soit $\boxed{y = cx + d}$

Remarque : ce serait valable quel que soit le degré du polynôme, puisque les termes non constants s'annulent en 0

Propriété établie : Soit P une fonction polynôme dont les termes de degrés 1 et 0 sont $cx + d$. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de P en son point d'abscisse 0 est

$$y = cx + d$$

5) h est définie par $h(x) = \sqrt{x+1} + 2x + 1$

$x + 1 = 0 \iff x = -1$ h est donc définie sur $[-1 ; +\infty[$

$x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$ et dérivable sur $]-1 ; +\infty[$

$h(x) = u(v(x)) + 2x + 1$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} & u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v(x) = x + 1 & v'(x) = 1 \end{cases}$

$\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $h'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) + 2$

$$= 1 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 2$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 2}$$

$h(0) = \sqrt{0+1} + 2 \times 0 + 1 = \sqrt{1} + 1 = 2$

$h'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{0+1}} + 2 = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{2} = \dfrac{5}{2}$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de h en son point d'abscisse 0 est :

$$y = h'(0)(x - 0) + h(0)$$

$$\boxed{y = \frac{5}{2}x + 2}$$

En fait, je ne comprends pas bien la question... h n'est pas une fonction polynôme. Si on s'attendait à ce que l'équation réduite de la tangente à sa courbe représentative en son point d'abscisse 0 soit $y = 2x + 1$, c'est loupé en tout cas.

Exercice 19. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^3 + x^2 - x}$

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative.

1) f est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

Suite de l'exercice 19. $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 2x - 1}$

$f(1) = 1^3 + 1^2 - 1 = 1+1-1 = 1$

$f'(1) = 3\times1^2 + 2\times1 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$

L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

soit $y = 4(x-1) + 1$

soit $y = 4x - 4 + 1$

soit $\boxed{y = 4x - 3}$

2) g est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{g(x) = f(x) - (4x-3)}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + x^2 - x - (4x-3)$

$= x^3 + x^2 - x - 4x + 3$

$\boxed{g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3}$

a) g est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g'(x) = 3x^2 + 2x - 5}$

$\Delta = 2^2 - 4\times3\times(-5) = 4 + 60 = 64 = 8^2$

Le trinôme admet 2 racines : $x_1 = \frac{-2-8}{2\times3} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

et $x_2 = \frac{-2+8}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$

Signe du trinôme : "du signe de 3" (← coefficient du terme de degré 2) " en-dehors des racines".

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
g		↗	$\frac{256}{27}$	↘	0	↗	

$g\left(-\frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 5\times\left(-\frac{5}{3}\right) + 3$

$= -\frac{125}{27} + \frac{25\times3}{9\times3} + \frac{25\times9}{3\times9} + \frac{3\times27}{1\times27}$

$= -\frac{125}{27} + \frac{75}{27} + \frac{225}{27} + \frac{81}{27}$

$g\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{256}{27}$

$g(1) = 1^3 + 1^2 - 5\times1 + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$

2) b) $g(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 5\times(-3) + 3$

$= -27 + 9 + 15 + 3$

$\boxed{g(-3) = 0}$

$-3 = -\frac{9}{3} < -\frac{5}{3}$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{3}$		1		
variation : g / $g(x)$		↗	0	↗	$\frac{256}{27}$	↘	0	↗	
c) Signe de $g(x)$		−	0	+		+	0	+	

Suite de l'exercice 19. Le signe de $g(x)$ nous indique la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

* $\mathcal{C}$ et T ont 2 points communs : leurs points d'abscisses -3 et 1.

* $\mathcal{C}$ est en-dessous de T lorsque $g(x) < 0$, soit lorsque x appartient à l'intervalle $]-\infty ; -3]$

* $\mathcal{C}$ est au-dessus de T lorsque $g(x) > 0$, soit lorsque x appartient à $]-3 ; 1[$ ou à $]1 ; +\infty[$.

Exercice 20. $\boxed{f(x) = x^2 - x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ $\boxed{g(x) = \frac{1}{1+x}}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1) Pour savoir laquelle des 2 courbes est $\mathcal{C}_f$ (courbe représentative de f) et laquelle est $\mathcal{C}_g$ (courbe représentative de g), je vais calculer et comparer $f(1)$ et $g(1)$:

$$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 \qquad g(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) > g(1)$$

J'en déduis que $\mathcal{C}_f$, la parabole, est la courbe mauve. Et que $\mathcal{C}_g$, l'hyperbole, est la courbe bleue.

2) a) Sur ce bout de graphique, on semble deviner que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont en commun leur point d'abscisse 0.

b) Pour déterminer les abscisses des points communs à f et à g, on résout l'équation $f(x) = g(x)$ (E_1) → dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ car sinon $g(x)$ n'est pas défini.

$(E_1) \iff x^2 - x + 1 = \frac{1}{1+x} \iff (1+x)(x^2 - x + 1) = 1$

$\iff x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 = 1$

$\iff x^3 = 0 \iff x = 0 \qquad 0 \neq -1$ ok

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont donc bien un seul point en commun, leur point d'abscisse 0.

3) a) On devinait que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent la même tangente en leur point d'abscisse 0 → nommons-le A. Ce sera le cas si $f'(0) = g(0)$ b) Calculons :

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 2x - 1}$ donc $f'(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$

* g est l'inverse d'une fonction affine qui s'annule si et seulement si $x = -1$. Elle est donc dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas -1, donc en particulier sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a $g(x) = \frac{1}{v(x)}$ avec $\begin{cases} v(x) = 1 + x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a : $g'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$

$\boxed{g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}} \qquad g'(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1$

→ La conjecture est vérifiée : $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent la même tangente en leur point d'abscisse 0.

Exercice 21 1) $\boxed{f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4}$

f est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 3\times 2x$ $\boxed{f'(x) = -3x^2 + 6x}$

$f'(x) = -3x(x-2)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	

$f(0) = -0^3 + 3\times 0^2 - 4 = -4$

$f(2) = -2^3 + 3\times 2^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$

2) $\boxed{f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x - 5}$

f est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2}{\cancel{3}} \times \cancel{3}x^2 + \frac{5}{6}$ $\boxed{f'(x) = 2x^2 + \frac{5}{6}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $2x^2 \geqslant 0$ donc $2x^2 + \frac{5}{6} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) $\boxed{f(x) = 2x^4 - 3x^3 + \frac{x^2}{2} + 3}$

f est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 2\times 4x^3 - 3\times 3x^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}x$

soit $\boxed{f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + x}$

$f'(x) = x(\underbrace{8x^2 - 9x + 1}_{\text{trinôme}})$

$\Delta = (-9)^2 - 4\times 8\times 1 = 81 - 32 = 49 = 7^2$

racines : $x_1 = \frac{9-7}{2\times 8} = \frac{\cancel{2}\times 1}{\cancel{2}\times 8} = \boxed{\frac{1}{8}}$ $x_2 = \frac{9+7}{2\times 8} = \frac{16}{16} = \boxed{1}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{8}$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$8x^2-9x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	3	$\nearrow$	$\frac{6149}{2048}$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	

$f(0) = 2\times 0^4 - 3\times 0^3 + \frac{0^2}{2} + 3 = 3$

$f(1) = 2\times 1^4 - 3\times 1^3 + \frac{1^2}{2} + 3$

$f(1) = 2 - \cancel{3} + \frac{1}{2} + \cancel{3}$

$f(1) = 2{,}5$ ou $\frac{5}{2}$

$f\left(\frac{1}{8}\right) = 2\times\left(\frac{1}{8}\right)^4 - 3\times\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 3$

$= \frac{2\times 1}{8^3\times 2\times 4} - \frac{3\times 4}{8^3\times 4} + \frac{1\times 2\times 8}{2\times 8^2\times 2\times 8} + \frac{3\times 4\times 8^3}{1\times 4\times 8^3}$

$= \frac{1}{2048} - \frac{12}{2048} + \frac{16}{2048} + \frac{6144}{2048}$

$\boxed{f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{6149}{2048} \simeq 3{,}002}$

Suite de l'exercice 21. 4) $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{x^2}}$

Valeur interdite : $x^2 = 0 \iff x = 0$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est le quotient d'une fonction polynôme (qui est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$) par la fonction carré, qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule si et seulement si $x=0$.
→ f est donc dérivable sur tout intervalle ne contenant pas 0, en particulier sur $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$ et sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2+2x+4 & u'(x) = 2x+2 \\ v(x) = x^2 & v'(x) = 2x \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)\,u(x)}{(v(x))^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\,x^2 - 2x\,(x^2+2x+4)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2\cancel{x^3} + 2x^2 - 2\cancel{x^3} - 4x^2 - 8x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2-8x}{x^4} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{-2x-8}{x^3}}$$

Remarque : $x^3 = x \times x \times x$ est toujours du signe de x d'après la règle des signes → s'annule en

$-2x-8 = 0 \iff -2x = 8 \iff x = -4$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$-2x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
f		↘	$\frac{3}{4}$	↗	‖	↘	

$\boxed{f(-4)} = \dfrac{(-4)^2 + 2\times(-4)+4}{(-4)^2} = \dfrac{16-8+4}{16}$
$= \dfrac{12}{16} = \dfrac{4\times 3}{4\times 4} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

5) $\boxed{f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{x-1}}$ Valeur interdite : $x-1=0$ ou $x=1$

f est la somme d'une fonction affine et de l'inverse d'une fonction affine qui s'annule en $x=1$. f est donc définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et dérivable sur tout intervalle ne contenant pas 1, donc sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ en particulier.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{v(x)}$

avec $v(x) = x-1$ et $v'(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $f'(x) = -1 - \dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Suite de l'exercice 21.

$$f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2-2x+1)+1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x-1+1}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x(-x+2)}{(x-1)^2}}$$

Remarquons que $(x-1)^2$ est toujours positif et ne s'annule que pour $x=1$

Recherche des zéros : x s'annule pour $x=0$

$-x+2=0 \iff -x=-2 \iff x=2$

La valeur interdite est toujours 1 car $(x-1)^2=0 \iff x-1=0 \iff x=1$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		−	0	+		+		+	
$-x+2$		+		+		+	0	−	
$(x-1)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	
f		↘	2	↗	‖	↗	−2	↘	

$f(0) = 1 - 0 - \frac{1}{0-1} = 1+1 = 2$

$f(2) = 1 - 2 - \frac{1}{2-1} = -1 - \frac{1}{1} = -2$

6) $$\boxed{f(x) = \frac{2x^2-4x+4}{x^2-2x+6}}$$

Recherche des valeurs "interdites" (ici : qui annulent le dénominateur)

On considère le trinôme x^2-2x+6.

$\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times6 = 4-24 < 0$

x^2-2x+6 ne s'annule pas. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$

f est le quotient de 2 fonctions polynômes et son dénominateur ne s'annule pour aucune valeur de x réelle : f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x^2-4x+4 & u'(x) = 4x-4 \\ v(x) = x^2-2x+6 & v'(x) = 2x-2 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$

$= \frac{(4x-4)(x^2-2x+6)-(2x^2-4x+4)(2x-2)}{(x^2-2x+6)^2}$ (étape E)

⚠

en développant le numérateur

$= \frac{4x^3-4x^2-8x^2+8x+24x-24-[4x^3-8x^2-4x^2+8x+8x-8]}{(x^2-2x+6)^2}$

$= \frac{4x^3-12x^2+32x-24-[4x^3-12x^2+16x-8]}{(x^2-2x+6)^2}$

$= \frac{\cancel{4x^3}-\cancel{12x^2}+32x-24-\cancel{4x^3}+\cancel{12x^2}-16x+8}{(x^2-2x+6)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{16x-16}{(x^2-2x+6)^2}}$$

A l'étape E, on pouvait aussi penser à factoriser le numérateur par $2x-2$. Personnellement, j'ai remarqué que je fais moins d'erreurs de calcul quand je factorise que quand je développe.

Suite de l'exercice 21 Je reprends à l'étape 5 : (en factorisant le numérateur)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2(2x-2)(x^2-2x+6)-(2x^2-4x+4)(2x-2)}{(x^2-2x+6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\left[2(x^2-2x+6)-(2x^2-4x+4)\right]}{(x^2-2x+6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(\cancel{2x^2}-\cancel{4x}+12-\cancel{2x^2}+\cancel{4x}-4)}{(x^2-2x+6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\times 8}{(x^2-2x+6)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{16x-16}{(x^2-2x+6)^2}}$$

ou

$$\boxed{f'(x) = \frac{16(x-1)}{(x^2-2x+6)^2}}$$

__Recherche du zéro__ : $16x-16=0 \iff 16x=16 \iff x=1$
ou $16(x-1)=0 \iff x-1=0 \iff x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$16x-16$		$-$	0	$+$	
$(x^2-2x+6)^2$		$+$	$(+)$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	

$$f(1) = \frac{2\times 1^2-4\times 1+4}{1^2-2\times 1+6} = \frac{2-4+4}{1-2+6} = \frac{2}{5}$$

__Remarque__ : comme x^2-2x+6 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $(x^2-2x+6)^2$ non plus. Il est donc toujours strictement positif.

7) $\boxed{f(x) = (3-x)\sqrt{x}}$ f est le produit de la fonction affine $x \mapsto 3-x$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction racine carrée, qui est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$

→ f est donc définie sur $[0;+\infty[= \mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = u(x)\times v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = 3-x \\ u'(x) = -1 \\ v(x) = \sqrt{x} \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x)$$

$$f'(x) = -1\times\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\times(3-x)$$

$$f'(x) = -\sqrt{x} + \frac{3-x}{2\sqrt{x}}$$

Pour l'étude du signe, une réduction au même dénominateur $2\sqrt{x}$ s'impose.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{-\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{1\times 2\sqrt{x}} + \frac{3-x}{2\sqrt{x}}$$

J'ai le droit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $2\sqrt{x}$ car $2\sqrt{x} \neq 0$ puisque $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{-2x+3-x}{2\sqrt{x}} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{-3x+3}{2\sqrt{x}}}$$

__Recherche du "zéro"__ : $-3x+3=0 \iff -3x=-3 \iff x=1$

$$f(1) = (3-1)\sqrt{1} = 2\times 1 = 2$$

Suite de l'exercice 21.

x	0		1	
$-3x-3$		$+$	0	$-$
$2\sqrt{x}$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$
f	$\|\|$	↗	2	↘

Exercice 22.

Je lis les variations de f sur le graphique →

x	0		1		$+\infty$
f	$\|\|$	↗	1	↘	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

La seule des 3 courbes proposées qui soit représentative d'une fonction :
* qui soit positive pour $x \in]0;1[$
* qui s'annule pour $x=1$
* qui soit négative pour $x>1$

est C_1.

Exercice 23 : même démarche : je déduis des variations des 3 fonctions le signe de leur dérivée.

Courbe 1

J'appelle f_1 la fonction représentée.

x		-1		2	
f_1	↘	$f_1(-1)$	↗	$f_1(2)$	↘
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

C'est la courbe b qui convient

Courbe 2

J'appelle la fonction f_2

x		-1		2	
f_2	↘	$f_2(-1)$	↗		↗
$f_2'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

car tangente horizontale

→ C'est la courbe c qui convient

Courbe 3

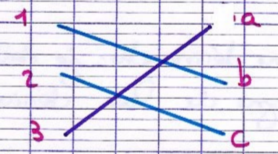
J'appelle la fonction f_3

x		-1		2	
f_3	↗	1	↘	$f_3(2)$	↗
$f_3'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

→ C'est la courbe a qui convient

On a donc :

Courbe f Courbe f'



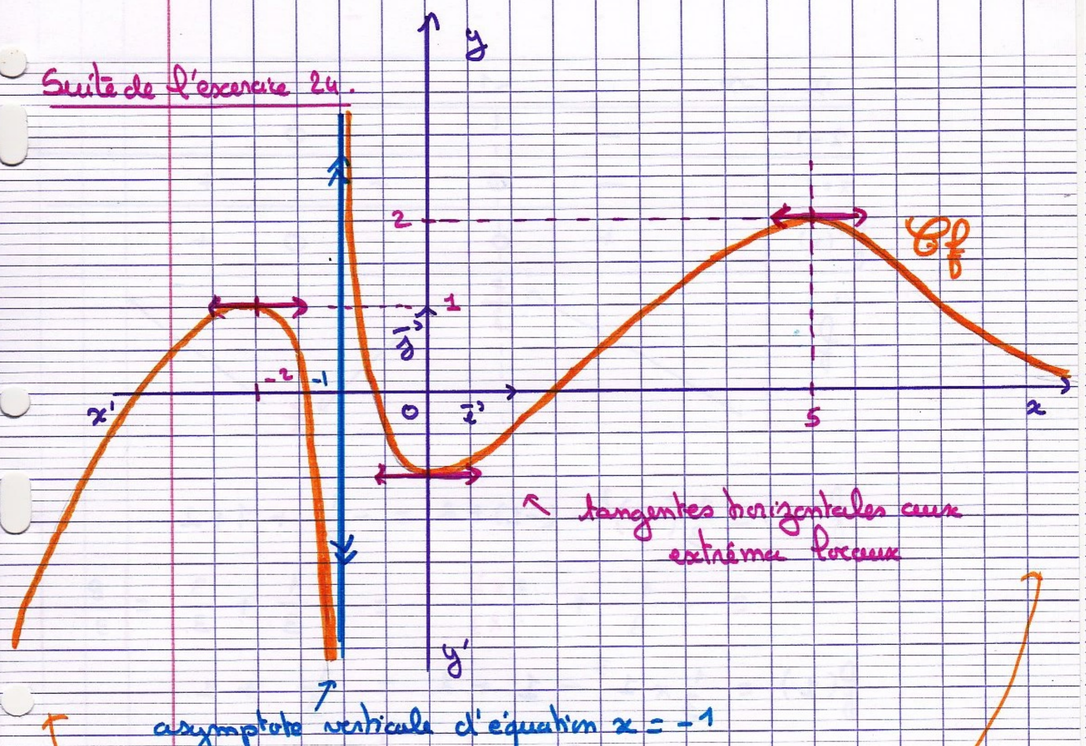
Exercice 24.

1) f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$
et dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$
(ou sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas -1)

2) f possède : * 2 maxima locaux :
- l'un qui est de 1 et atteint pour $x=-2$
- l'autre qui est de 2 et atteint pour $x=5$

* 1 minimum local de -1 pour $x=0$.

Suite de l'exercice 24.



On ne nous donne pas d'indications sur les limites en $+\infty$ et $-\infty$. J'ai choisi une limite de $-\infty$ en $-\infty$ et une limite de 0 en $+\infty$, mais on peut faire d'autres choix.

Exercice 25. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2}$

1) f est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 1$$

soit $\boxed{f'(x) = x^2 - 1}$ ou $\boxed{f'(x) = (x-1)(x+1)}$

$a^2 - b^2$ $(a-b)(a+b)$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$\frac{8}{3}$	↘	$\frac{4}{3}$	↗	

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) + 2 = -\frac{1}{3} + 1 + 2$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{3 \times 3}{1 \times 3} = -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

$$f(1) = \frac{1}{3} \times 1^3 - 1 + 2 = \frac{1}{3} + 1$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Sur $[0;1]$

x	0	1
f	2 ↘	$\frac{4}{3}$

→ f est strictement décroissante.

$0 \leq x \leq 1$

implique

$\boxed{f(0) \geq f(x) \geq f(1)}$

Rappel : une fonction strictement décroissante sur un intervalle est une fonction qui inverse l'ordre sur cet intervalle.

Je calcule : $f(0) = \frac{1}{3} \times 0^3 - 0 + 2$ $\boxed{f(0) = 2}$

Donc $x \in [0;1] \boxed{\Rightarrow} \boxed{\frac{4}{3} \leq f(x) \leq 2}$

Je ne peux pas mettre $\Leftrightarrow$ car f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$: il peut exister des valeurs de x en-dehors de $[0;1]$ telles que $\frac{4}{3} \leq f(x) \leq 2$

Suite de l'exercice 25 : $x \in [0;3]$

x	0	1	3
f	2 ↘	$\frac{4}{3}$	↗ 8

Je calcule :

$f(3) = \frac{1}{3} \times 3^3 - 3 + 2$

$= 3^2 - 1$

$= 9 - 1$

$\boxed{f(3) = 8}$

D'après le tableau de variations :

$x \in [0;3] \boxed{\Longrightarrow} \frac{4}{3} \leq f(x) \leq 8$ ... puisque $2 < 8$ c'est donc 8 le maximum de f sur $[0;3]$

implique

$x \in [-3;0]$

x	-3	-1	0
f	-4 ↗	$\frac{8}{3}$	↘ 2

On calcule : $\boxed{f(-3)} = \frac{1}{3} \times (-3)^3 - (-3) + 2$

$= -\frac{3^3}{3} + 3 + 2$

$= -3^2 + 5 = -9 + 5 = \boxed{-4}$

et $-4 < 2$

D'après le tableau de variations : $x \in [-3;0] \boxed{\Longrightarrow} \boxed{-4 \leq f(x) \leq \frac{8}{3}}$

implique

$x \in [-3;3]$

x	-3	-1	1	3
f	-4 ↗	$\frac{8}{3}$ ↘	$\frac{4}{3}$ ↗	8

D'après le tableau de variations : $x \in [-3;3]$ implique

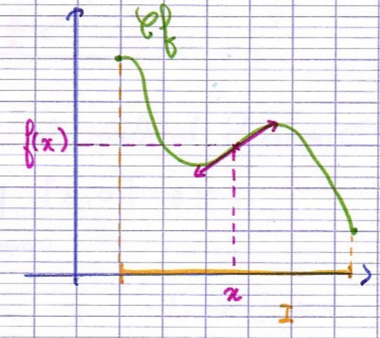
$\boxed{-4 \leq f(x) \leq 8}$

Exercice 26

1) "Il existe un nombre x appartenant à I tel que $f'(x) > 0$" → cette phrase ne permet pas de prouver que f est strictement croissante sur I.

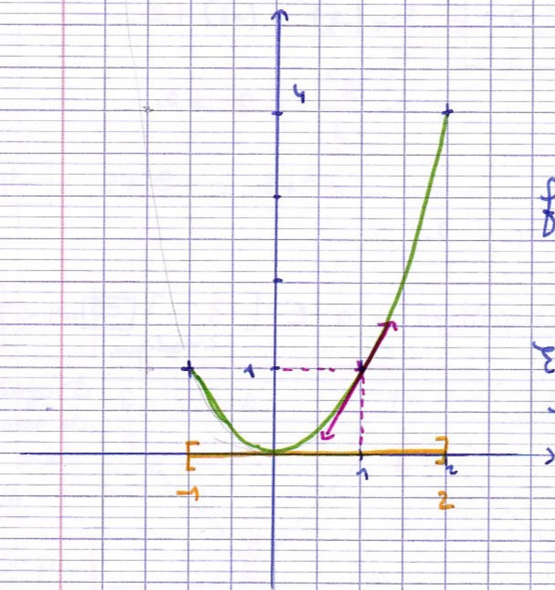
Contre-exemple graphique :

$f'(x) > 0$ car le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse x est strictement positif.



Cependant, f n'est pas strictement croissante sur I.

Contre-exemple numérique : avec f = la fonction carré, sur l'intervalle $[-1;2]$



$f : x \mapsto x^2$

$I = [-1;2]$

$1 \in I$

$f'(1) = 2 \times 1 = 2$

$f'(1) > 0$

Et pourtant, f n'est pas strictement croissante sur $[-1;2]$.

Suite de l'exercice 26

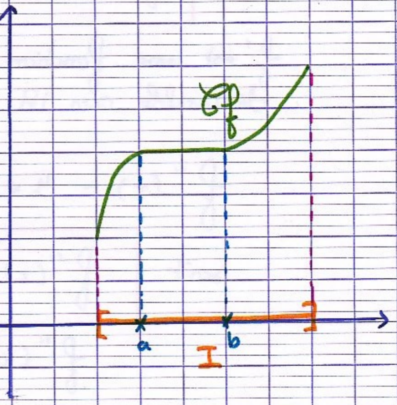
2) VRAI → D'après la propriété du cours : " f est une fonction dérivable sur un intervalle I et sa dérivée est f'.
* Si f' est strictement positive sur I (ce qui signifie : si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$), alors f est strictement croissante sur I.

3) " Pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ " → cette condition ne suffit pas pour que f soit strictement croissante sur I.

Contre-exemple graphique :

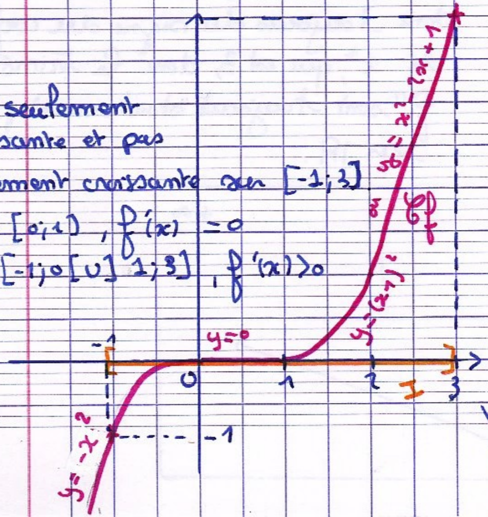
Ici, $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
$\underbrace{[a;b] \subset I}_{\text{est inclus dans}}$

et pour tout $x \in [a;b]$, $f'(x) = 0$



f est seulement croissante et pas strictement croissante sur I car il existe un intervalle inclus dans I sur lequel f est constante.
Pour tous x_1 et $x_2 \in [a;b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ et pas $f(x_1) < f(x_2)$

f est seulement croissante et pas strictement croissante sur $[-1;3]$
$\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = 0$
$\forall x \in [-1;0[\cup]1;3]$, $f'(x) > 0$



Contre-exemple numérique

$$f : \begin{cases} x \longmapsto -x^2 \text{ si } x \in]-\infty;0] \\ x \longmapsto 0 \text{ si } x \in [0;1] \\ x \longmapsto (x-1)^2 \text{ si } x \in [1;+\infty[\end{cases}$$

$I = [-1;3]$

$\forall x \in [-1;0]$, $f'(x) = \underbrace{-2x}_{\substack{>0 \\ \text{car } x<0}}$
$\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = 0$
$\forall x \in [1;3]$, $f'(x) = 2x - 2 > 0$

Exercice 27. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5}$

f est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 4x^3 - 2 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 2$$

$$\boxed{f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2}$$

f' est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f''(x) = 4 \times 3x^2 - 6 \times 2x + 4$$

soit $\boxed{f''(x) = 12x^2 - 12x + 4}$

$$f''(x) = 4\underbrace{(3x^2 - 3x + 1)}_{\text{trinôme dont je vais étudier le signe.}}$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 9 - 12 < 3$ → le trinôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Il est donc toujours du signe du coefficient de x^2, qui est 3, donc le trinôme et f'' sont toujours strictement positifs sur $\mathbb{R}$.

2)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$		+	
f'			

Suite de l'exercice 27

3) $f'(1) = 4\times1^3 - 6\times1^2 + 4\times1 - 2$
$= 4 - 6 + 4 - 2$
$= 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	+	
f		↘	4	↗	

De la stricte croissance de f' sur $\mathbb{R}$ et du fait que $f'(1)=0$, on déduit que $\forall x<1, f'(x)<0$ et $\forall x>1, f'(x)>0$

4)

$f(1) = 1^4 - 2\times1^3 + 2\times1^2 - 2\times1 + 5$
$= 1 - \cancel{2} + \cancel{2} - 2 + 5$

$\boxed{f(1) = 4}$

→ f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$.
Elle admet en 1 un minimum local qui est 4,
puis elle est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

Exercice 28 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^4 - 8x^2 + 2}$

f est une fonction polynôme. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 4x^3 - 8\times2x$ soit $\boxed{f'(x) = 4x^3 - 16x}$

$f'(x) = 4x(x^2-4) = \boxed{4x(x+2)(x-2)}$

$4x$ s'annule pour $x=0$, $x+2$ pour $x=-2$ et $x-2$ pour $x=2$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	+		+	
$x+2$		$-$	0	+		+		+	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	+	
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
f		↘	$\boxed{-14}$	↗	$\boxed{2}$	↘	$\boxed{-14}$	↗	

$f(-2) = (-2)^4 - 8\times(-2)^2 + 2 = 16 - 8\times4 + 2 = 16 - 32 + 2 = \boxed{-14}$
$f(0) = 0^4 - 8\times0^2 + 2 = \boxed{2}$
$f(2) = 2^4 - 8\times2^2 + 2 = 16 - 8\times4 + 2 = \boxed{-14}$

2) f admet 2 minima locaux égaux à -14 en $x=-2$ et $x=2$
et 1 maximum local égal à 2 en $x=0$.

Rappel : f admet un minimum ou un maximum local lorsque sa dérivée s'annule et change de signe.

3) $x \in [-2;1]$

x	-2		0		1
f	-14	↗	2	↘	$f(1)$

On sait que $f(1)$ est plus grand que -14 car f est strictement décroissante sur $[0;2]$ et $f(2) = -14$

Donc $\forall x \in [-2;1]$, $\boxed{-14 \leq f(x) \leq 2}$

Fin de l'exercice 28 3) b) $0 \leq x \leq 3$

x	0	2	3
f	2 ↘	-14 ↗	11

Cette fois, je ne peux pas "économiser" le calcul de $f(3)$

$f(3) = 3^4 - 8 \times 3^2 + 2$
$= 81 - 8 \times 9 + 2$
$= 81 - 72 + 2$
$\boxed{f(3) = 11}$

Si $0 \leq x \leq 3$ alors $\boxed{-14 \leq f(x) \leq 11}$

3) c) $x \in [-2;2]$

x	-2	0	2
f	-14 ↗	2 ↘	-14

$\forall x \in [-2;2]$,

$\boxed{-14 \leq f(x) \leq 2}$