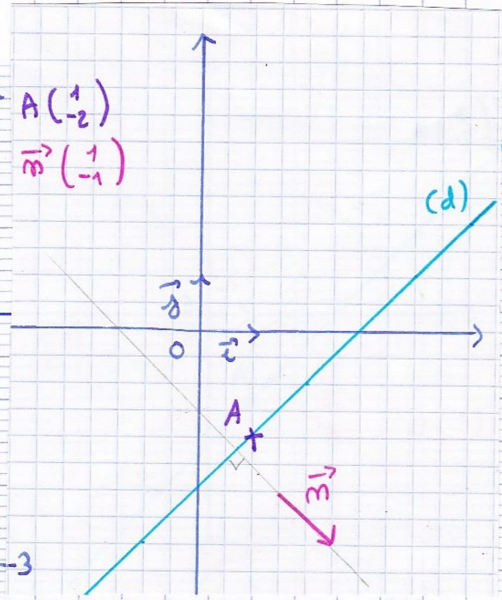
1ère S - Produit scalaire - 26 exercices sur les équations de droites et de cercles - Corrigés

Exercice 1. 1) (d) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ($\leftarrow a$, $\leftarrow b$) donc elle admet une équation cartésienne de la forme :

$x - y + c = 0$

$ax + by + c = 0$

$A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$



On cherche c sachant que $A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \in (d)$. On a donc :

$x_A - y_A + c = 0$

soit $1 - (-2) + c = 0$

soit $1 + 2 + c = 0 \iff c = -3$

→ (d) a pour équation cartésienne $\boxed{x - y - 3 = 0}$

Autre rédaction possible : $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (d) \iff \vec{AM}.\vec{n} = 0$

$\vec{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{AM}.\vec{n} = 0 \iff (x-1)\times 1 + (y+2)\times(-1) = 0$

$\iff x - 1 - y - 2 = 0$

$\iff \boxed{x - y - 3 = 0}$ équation cartésienne de (d)

2) (d) passe par $A\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

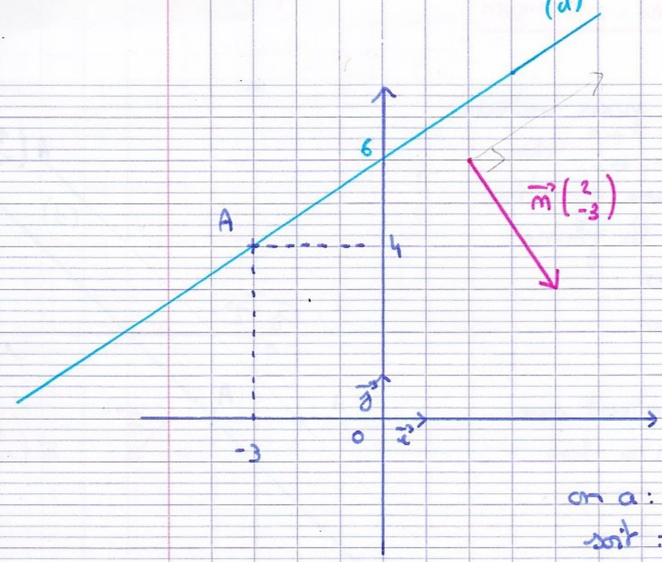
Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point quelconque du plan. $\vec{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-4\end{pmatrix}$.

$M \in (d) \iff \vec{AM}.\vec{n} = 0 \iff (x+3)\times 2 + (y-4)\times(-3) = 0$

$\iff 2x + 6 - 3y + 12 = 0$

$\iff \boxed{2x - 3y + 18 = 0}$

équation cartésienne de (d).



Autre rédaction possible :

Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d), (d) admet une équation cartésienne de la forme :

$2x - 3y + c = 0$.

Comme $A\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \in (d)$,

on a : $2\times(-3) - 3\times 4 + c = 0$

soit : $-6 - 12 + c = 0$

soit : $c = 18$

Une équation cartésienne de (d) est donc : $\boxed{2x - 3y + 18 = 0}$

Exercice 2 : $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

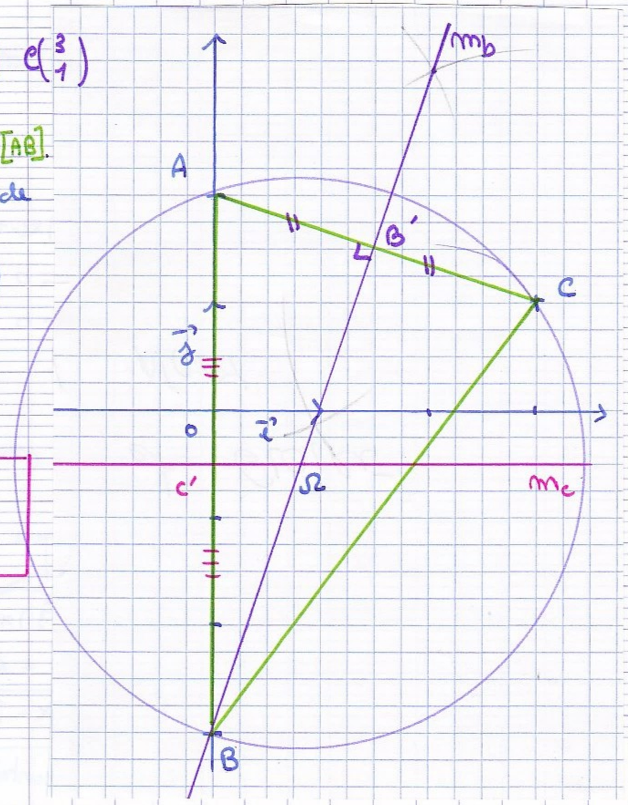
1) Soit C' le milieu de [AB]. Calculons les coordonnées de C' :

$C'\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$C'\left(\frac{0+0}{2} ; \frac{2+(-3)}{2}\right)$

$\boxed{C'\left(0 ; -\frac{1}{2}\right)}$

La médiatrice du segment [AB], que je nomme m_c, est la



Suite de l'exercice 2, question 1. perpendiculaire à la droite (AB) passant par C'.

On aura donc : $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in m_c \iff \overrightarrow{C'M}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-0\\-3-2\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{C'M}\begin{pmatrix}x_M - x_{C'}\\y_M - y_{C'}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C'M}\begin{pmatrix}x-0\\y+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{C'M}\begin{pmatrix}x\\y+\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'M} = 0 \iff 0\times x + (-5)\times(y+\frac{1}{2}) = 0$

$\iff -5y - \frac{5}{2} = 0$

$\iff -5y = \frac{5}{2}$ $\times(-\frac{1}{5})$

$\iff \boxed{y = -\frac{1}{2}}$ équation réduite de m_c

$y = -\frac{1}{2} \iff y + \frac{1}{2} = 0 \iff \boxed{2y + 1 = 0}$

équation cartésienne de m_c, la médiatrice de [AB].

2) Calculons les coordonnées du milieu de [AC] que nous nommerons B'.

$B'\left(\frac{x_A + x_C}{2};\frac{y_A + y_C}{2}\right)$ $B'\left(\frac{0+3}{2};\frac{2+1}{2}\right)$ $B'\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartiendra à m_b, la médiatrice de [AC] si et seulement si $\overrightarrow{MB'}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-0\\1-2\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}}$ $\boxed{\overrightarrow{MB'}\begin{pmatrix}x-\frac{3}{2}\\y-\frac{3}{2}\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{MB'}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \iff (x-\frac{3}{2})\times 3 + (y-\frac{3}{2})\times(-1) = 0$

$\iff 3x - \frac{9}{2} - y + \frac{3}{2} = 0$

$\iff 3x - y - \frac{6}{2} = 0$

$\iff \boxed{3x - y - 3 = 0}$

Équation cartésienne de m_b, la médiatrice du segment [AC].

3) Le centre du cercle circonscrit d'un triangle est le point de concours de ses médiatrices. Celui du triangle ABC, que je nomme Ω, est donc le point d'intersection de la médiatrice m_c de [AB] et de la médiatrice m_b de [AC]. Ses coordonnées vérifient donc le système :

$$(S)\ \begin{cases} y = -\frac{1}{2} & \leftarrow \text{équation réduite de } m_c \\ 3x - y - 3 = 0 & \leftarrow \text{équation cartésienne de } m_b \end{cases}$$

On sait donc que $\boxed{y_\Omega = -\frac{1}{2}}$ et que :

$3x_\Omega - (-\frac{1}{2}) - 3 = 0 \iff 3x_\Omega + \frac{1}{2} - \frac{6}{2} = 0$

$\iff 3x_\Omega - \frac{5}{2} = 0$

$\iff 3x_\Omega = +\frac{5}{2}$

$\iff \boxed{x_\Omega = \frac{5}{6}}$

Les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC sont donc : $\boxed{\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{6}\right)}$

$\Omega\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{6}\right)$

Exercice 3. Pour pouvoir écrire cet algorithme, on a besoin de faire un calcul préalable.

Les variables dont nous aurons besoin :

xA et yA qui seront les coordonnées du point A.

xN et yN qui seront les coordonnées du vecteur $\vec{n}$.

a, b et c qui seront les coefficients a, b et c dans l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de la droite (d).

→ mais comme on aura $a = x_N$ et $b = yN$, finalement, il est inutile de déclarer xN et yN.

On déclarera donc x_A, yA, a, b et c du type NOMBRE.

Calcul préalable : calculer c en fonction de xA, yA, a et b.

$M\binom{x}{y} \in (d)$, d étant la droite $\begin{cases} \text{- qui passe par A.} \\ \text{- de vecteur normal } \vec{n}. \end{cases}$

si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - xA \\ y - yA \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b = 0$$

$$\iff ax - ax_A + by - by_A = 0$$

$$\iff ax + by + \underbrace{(-ax_A - by_A)}_{c} = 0$$

Voici l'expression de c dont nous avions besoin pour écrire l'algorithme.

AlgoBox : Exercice3

Cet algorithme donne une équation cartésienne d'une droite (d) passant par un point A et dont un vecteur n lui est normal, quand on fourint les coordonnées de A et de n.

Code de l'algorithme

```
FONCTIONS_UTILISEES
VARIABLES
  xA EST_DU_TYPE NOMBRE
  yA EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Quelles sont les coordonnées de A ?"
  LIRE xA
  LIRE yA
  AFFICHER "Quelles sont les coordonnées du vecteur n ?"
  LIRE a
  LIRE b
  c PREND_LA_VALEUR -a*xA-b*yA
  AFFICHER "Une équation cartésienne de la droite (d) de vecteur normal n("
  AFFICHER a
  AFFICHER ","
  AFFICHER b
  AFFICHER ") et passant par A("
  AFFICHER xA
  AFFICHER ","
  AFFICHER yA
  AFFICHER ") est :"
  AFFICHER a
  AFFICHER "x+"
  AFFICHER b
  AFFICHER "y+"
  AFFICHER c
  AFFICHER "=0"
FIN_ALGORITHME
```

Résultats

```
***Algorithme lancé***
Quelles sont les coordonnées de A ?
Entrer xA : -3
Entrer yA : 4
Quelles sont les coordonnées du vecteur n ?
Entrer a : 2
Entrer b : -3
Une équation cartésienne de la droite (d) de vecteur normal n(2,-3) et passant par A(-3,4)
2x+-3y+18=0
***Algorithme terminé***
```

Généré par AlgoBox

Dans cet exemple, j'ai testé l'algorithme sur la question 2) de l'exercice 1.

Pour répondre à l'exercice, on peut simplement écrire :

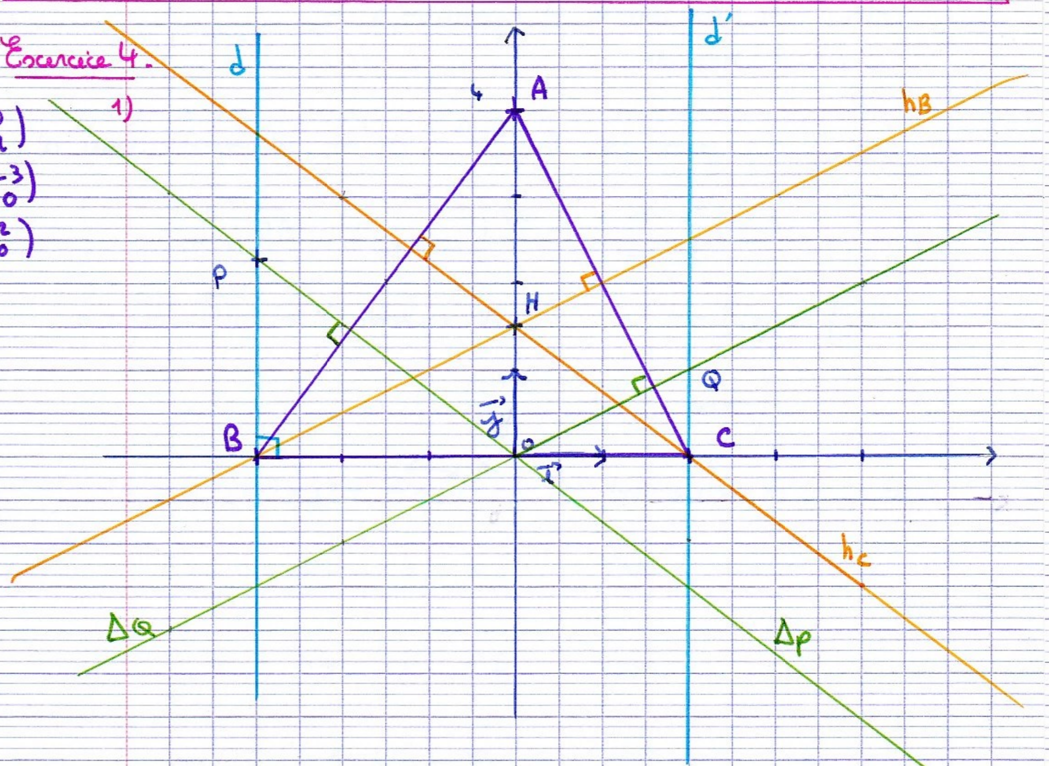
- * xA, yA, a, b et c sont du type NOMBRE.
- * On demande à l'utilisateur d'entrer les valeurs de : xA, yA, a et b.
- * On met dans c la valeur $-a \times xA - b \times yA$
- * On affiche : " Une équation cartésienne de la droite passant par A et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$ est :

$$a x + b y + c = 0 \text{ "}$$

Exercice 4.

$A\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

1)



2) Comme on sait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes, pour trouver les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC, il suffit de trouver celles du point de concours de 2 hauteurs : choisissons la hauteur issue de A et celle issue de B, que je nomme h_b.

(BC) est l'axe des abscisses puisque B et C sont 2 points distincts d'ordonnée 0. Le repère étant orthonormal, toute perpendiculaire à l'axe des abscisses sera parallèle à l'axe des ordonnées, et aura une équation réduite de la forme : $x = c$.

La hauteur issue de A du triangle ABC est la perpendiculaire à (BC) passant par A(0;4). Il s'agit donc de la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire de l'axe des ordonnées.

$x_A = 0$

h_b → passe par $B\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ et est perpendiculaire à (AC).

$\vec{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2-0\\0-4\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à h_B si et seulement si $\vec{BM} \cdot \vec{AC} = 0$

(avec $\vec{BM}\begin{pmatrix}x+3\\y\end{pmatrix}$)

soit si et seulement si $(x+3) \times 2 + y \times (-4) = 0$

soit $2x + 6 - 4y = 0$

soit $2x - 4y + 6 = 0$

soit $\boxed{x - 2y + 3 = 0}$

équation cartésienne de h_B

Suite de l'exercice 4, question 2. Les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC vérifient donc le système :

$$(S)\ \begin{cases} x = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Lorsque $x = 0$, $x - 2y + 3$ vaut $-2y + 3$.

$-2y + 3 = 0 \iff -2y = -3$

$\iff y = \frac{3}{2}$

Les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC sont donc : $\boxed{\left(0 ; \frac{3}{2}\right)}$ → il s'agit bien du point H

À remarquer : en rédigeant, je n'ai pas nommé H l'orthocentre du triangle ABC avant d'avoir prouvé qu'il s'agit bien de lui !

3) P est → sur la droite d, perpendiculaire à (BC) passant par O → je la nomme Δ_P.

d, puisqu'elle est perpendiculaire à (BC), a une équation réduite de la forme $x = c$.

Comme elle passe par $B(\underset{x_B}{-3} ; 0)$, on en déduit que l'équation réduite de (d) est $\boxed{x = -3}$

Δ_P → passe par O(0;0) donc a une équation réduite de la forme : $y = mx$ (elle passe par O donc son ordonnée à l'origine est nulle ... sauf s'il s'agit de l'axe des ordonnées, mais ce n'est pas le cas puisqu'elle passe par P qui n'est pas sur l'axe des ordonnées) → euh, on s'en fiche, en fait :

$M\binom{x}{y} \in \Delta_P \iff \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ avec $\overrightarrow{OM}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{-3-0}{0-4}$

$\overrightarrow{AB}\binom{-3}{-4}$

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff x \times (-3) + y \times (-4) = 0$

$\iff -3x - 4y = 0$

$\iff \boxed{3x + 4y = 0}$ équation cartésienne de Δ_P.

Les coordonnées de P vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x = -3 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

si $x = -3$, $3x + 4y = 3 \times (-3) + 4y = -9 + 4y$

$-9 + 4y = 0 \iff 4y = 9 \iff y = \frac{9}{4}$ ou 2,25

Les coordonnées de P sont donc : $\boxed{\left(-3 ; \frac{9}{4}\right)}$

Q → appartient à d', la perpendiculaire à (BC) passant par $C\binom{2}{0}$

d' a donc pour équation réduite $\boxed{x = 2}$

→ appartient à Δ_Q, la perpendiculaire à (AC) passant par O.

$M\binom{x}{y} \in \Delta_Q \iff \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ avec $\overrightarrow{OM}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{2}{-4}$

$\iff 2x - 4y = 0 \iff \boxed{x - 2y = 0}$ équation cartésienne de Δ_Q.

Les coordonnées de Q vérifient donc le système : $\begin{cases} x = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

si $x = 2$, alors $x - 2y = 2 - 2y$. Or $2 - 2y = 0 \iff 2 = 2y \iff 1 = y$

Les coordonnées de Q sont donc $\boxed{(2 ; 1)}$

Corrigés.

Exercice 4 (suite). Question 4) On a donc : $H(0;\frac{3}{2})$, $P(-3;\frac{9}{4})$, $Q(2;1)$.

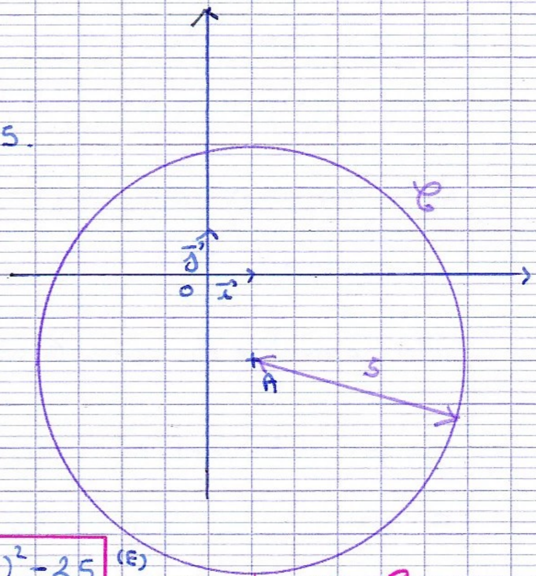
$$\overrightarrow{HQ}\begin{pmatrix} x_Q-x_H \\ y_Q-y_H \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{HQ}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{HQ}\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} x_Q-x_P \\ y_Q-y_P \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 2+3 \\ 1-\frac{9}{4} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{HQ};\overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{vmatrix} = 2\times\left(-\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\times 5$$
$$= -\frac{5\times\cancel{2}}{2\times\cancel{2}} + \frac{5}{2}$$
$$= 0$$

$\overrightarrow{HQ}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont donc colinéaires. Les points P, Q et H sont donc alignés.

Exercice 5. 1) $\mathcal{C}$ a pour centre $A\binom{1}{-2}$ et pour rayon 5.



$M\binom{x}{y}$ appartiendra à $\mathcal{C}$ si et seulement si $AM=5$ ou encore $AM^2=25$

Or $AM = \sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}$

$= \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$

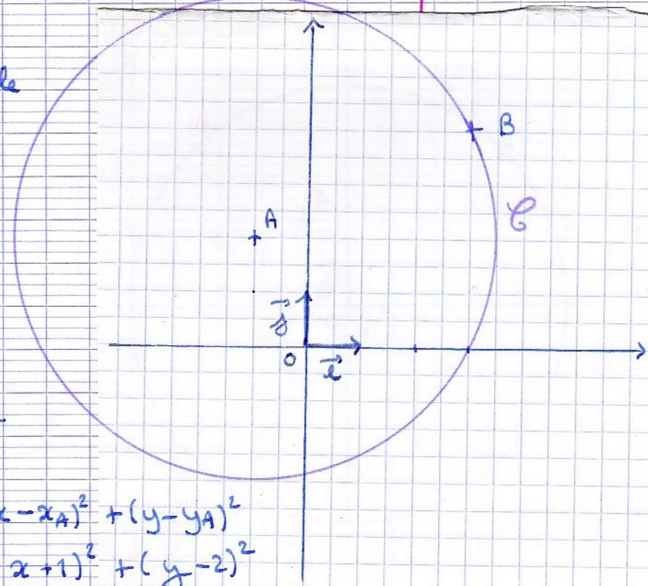
$AM^2=25 \iff \boxed{(x-1)^2+(y+2)^2=25}$ (E) une équation de $\mathcal{C}$

On peut, si on le désire, écrire une équation équivalente à (E) sous forme développée :

(E) $\iff x^2-2x+1+y^2+4y+4=25$

$\iff \boxed{x^2+y^2-2x+4y-20=0}$ une autre équation de $\mathcal{C}$

2) $\mathcal{C}$ est le cercle
- de centre $A\binom{-1}{2}$
- passant par $B\binom{3}{4}$



Il s'agit donc de l'ensemble des points M du plan tels que $AM=AB$ ou encore $AM^2=AB^2$

$\forall M\binom{x}{y}$, $AM^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$

$AM^2 = (x+1)^2+(y-2)^2$

$AB^2 = (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2 = (3+1)^2+(4-2)^2 = 4^2+2^2$

$= 16+4 = 20$

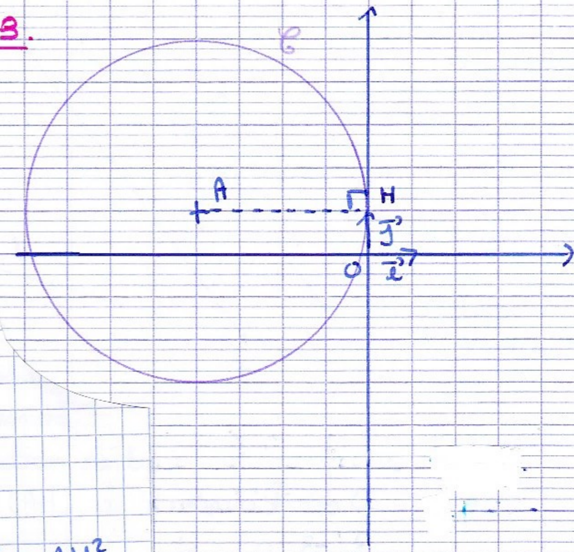
Une équation du cercle $\mathcal{C}$ est donc : $\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2=20}$ (E)

(E) $\iff x^2+2x+1+y^2-4y+4-20=0$

(E) $\iff \boxed{x^2+y^2+2x-4y-15=0}$

3) Le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à l'axe des ordonnées et a pour centre $A\binom{-4}{1}$.

Suite de l'exercice 5, question 3.



L'axe des ordonnées est tangent au cercle $\mathscr{C}$.
Soit H son point commun avec $\mathscr{C}$.

H est le point de l'axe des ordonnées qui a la même ordonnée que A.
Donc $\boxed{H(0;1)}$.

$M\binom{x}{y} \in \mathscr{C} \iff AM = AH \iff AM^2 = AH^2$

$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x+4)^2 + (y-1)^2$

$AH^2 = (x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 = (0+4)^2 + (1-1)^2 = 16$

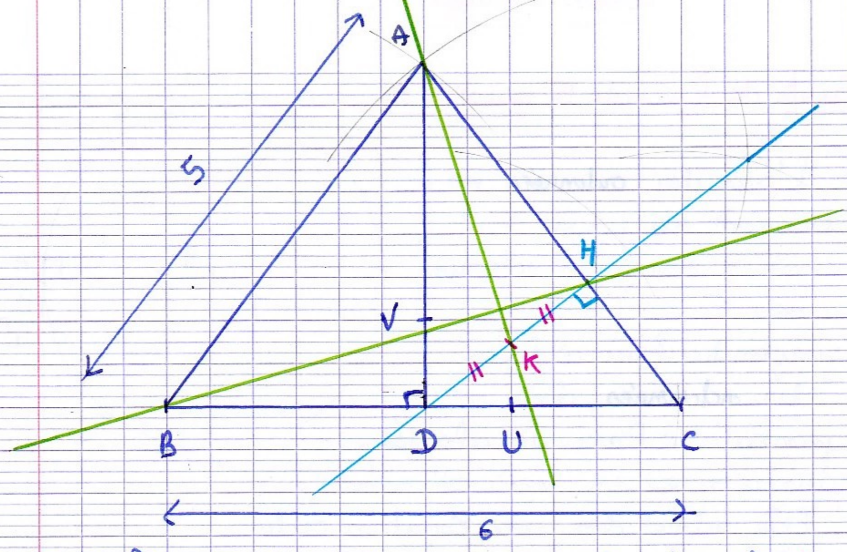
Une équation de $\mathscr{C}$ est donc $\boxed{(x+4)^2 + (y-1)^2 = 16}$ (E)

$(E) \iff x^2 + 8x + \cancel{16} + y^2 - 2y + 1 - \cancel{16} = 0$

$(E) \iff \boxed{x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0}$

Exercice 6.

1) $DU = DV = 1$ et, de plus, $(DU) \perp (DV)$ puisque $(DV) = (DA)$ et $(DU) = (BC)$ et qu'on sait que $(DA) \perp (BC)$ car (DA) est la hauteur issue de A du triangle ABC. Elle a été définie comme étant la médiane issue de A de ABC, mais ABC est isocèle en A, donc médiane, hauteur, bissectrice issue de A et médiatrice de [BC] sont la même droite $\to$ (D, U, V) est bien un repère orthonormé.
On peut le noter aussi : $(D; \vec{DU}, \vec{DV})$



2) D est l'origine du repère, donc ses coordonnées sont $(0;0)$.
$B(-3;0)$ et $C(3;0)$.

fausse piste

$(DH) \perp (HC)$ donc $\vec{DH} \cdot \vec{CH} = 0$. Notons $\binom{x}{y}$ les coordonnées de H.

$\vec{DH}\binom{x}{y}$ et $\vec{CH}\binom{x-3}{y}$

$\vec{DH} \cdot \vec{CH} = 0 \iff x(x-3) + y^2 = 0$ $\to$ ceci ne nous permet pas de trouver les coordonnées de H !

On va donc partir du fait que $(DH) \perp (AC)$ donc $\vec{DH} \cdot \vec{AC} = 0$.

Problème : on ne connaît pas l'ordonnée de A.

Solution : on applique le théorème de Pythagore dans le triangle DAC rectangle en D.

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ soit $5^2 = AD^2 + 3^2$
soit $25 = AD^2 + 9$
soit $25 - 9 = AD^2$
soit $AD^2 = 16$ et donc $AD = 4$ puisque $AD > 0$.

Suite de l'exercice 6 : On a donc $A\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

et donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-0\\0-4\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}}$

Notons momentanément $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de H (et de $\overrightarrow{DH}$) :

$\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC} = 0 \iff x \times 3 + y \times (-4) = 0$

$\iff \boxed{3x - 4y = 0}$ premier indice

On n'a pas encore tenu compte du fait que H appartient à la droite (AC). Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont donc colinéaires. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x\\y-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ colinéaires $\iff \begin{vmatrix}3 & x\\ -4 & y-4\end{vmatrix} = 0$

$\iff 3(y-4) - (-4) \times x = 0$

$\iff 3y - 12 + 4x = 0$

$\iff \boxed{4x + 3y - 12 = 0}$

deuxième indice

Pour trouver les coordonnées de H, nous résolvons le système :

$$(S) \left\{\begin{array}{llll} 3x & -4y & = 0 & L_1 \\ 4x & +3y & = 12 & L_2 \end{array}\right.$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{lll} 25x & = 48 & L_1 \leftarrow 3L_1 + 4L_2 \\ & & L_2 \leftarrow 4L_1 - 3L_2 \\ -25y & = -36 & \end{array}\right.$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{48}{25} = 1,92 \\ y = \dfrac{36}{25} = 1,44 \end{array}\right.$$

$\boxed{H\left(\frac{48}{25} ; \frac{36}{25}\right)}$

$\boxed{H(1,92 ; 1,44)}$

$D(0;0)$ $H\left(\frac{48}{25} ; \frac{36}{25}\right)$ K est le milieu de [DH]

donc : $K\left(\frac{x_D + x_H}{2} ; \frac{y_D + y_H}{2}\right)$ $K\left(\frac{0 + \frac{48}{25}}{2} ; \frac{0 + \frac{36}{25}}{2}\right)$

$\boxed{K\left(\frac{24}{25} ; \frac{18}{25}\right)}$ ou encore $\boxed{K(0,96 ; 0,72)}$

3) $A(0;4)$ $K\left(\frac{24}{25} ; \frac{18}{25}\right)$

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}x_K - x_A\\ y_K - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{24}{25} - 0\\ \frac{18}{25} - \frac{4 \times 25}{1 \times 25}\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{24}{25}\\ -\frac{82}{25}\end{pmatrix}}$

$B(-3;0)$ $H\left(\frac{48}{25} ; \frac{36}{25}\right)$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}x_H - x_B\\ y_H - y_B\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{48}{25} - \left(-\frac{3 \times 25}{1 \times 25}\right)\\ \frac{36}{25} - 0\end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{123}{25}\\ \frac{36}{25}\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BH} = \frac{24}{25} \times \frac{123}{25} + \left(-\frac{82}{25} \times \frac{36}{25}\right)$

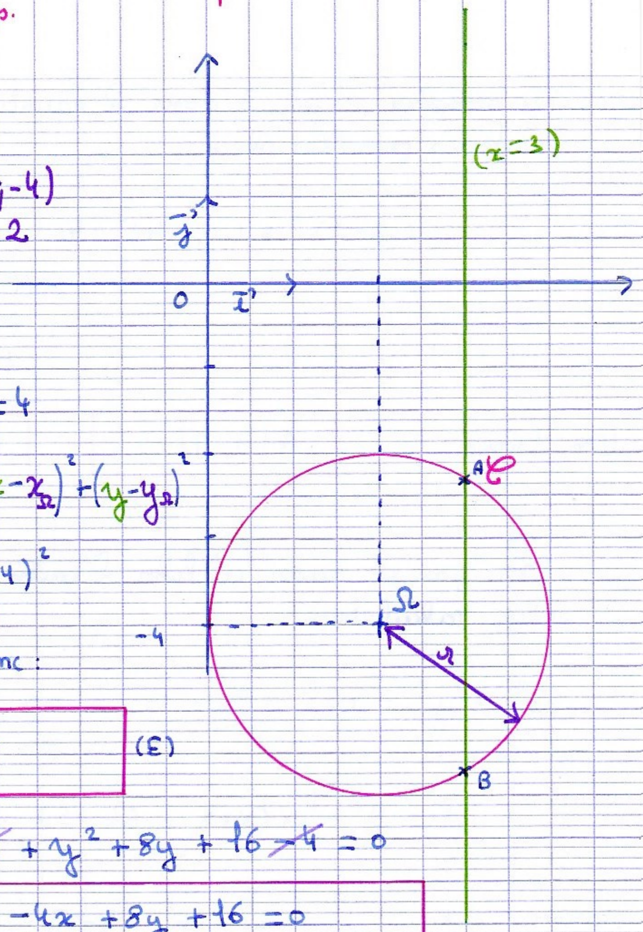
$= \frac{2952}{25^2} - \frac{2952}{25^2}$

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BH} = 0$

$\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont donc orthogonaux. Comme ces 2 vecteurs sont non nuls, cela signifie que les droites (AK) et (BH) sont perpendiculaires.

Exercice 7 : 1)

$\mathcal{C}$ a pour centre : $\Omega(2;-4)$
et pour rayon : $r = 2$



$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = 2$ ou $\Omega M^2 = 4$

Soit $M\binom{x}{y}$. $\Omega M^2 = (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2$

$\Omega M^2 = (x-2)^2 + (y+4)^2$

Une équation de $\mathcal{C}$ est donc :

$$\boxed{(x-2)^2 + (y+4)^2 = 4} \quad (E)$$

$(E) \iff x^2 - 4x \cancel{+4} + y^2 + 8y + 16 \cancel{-4} = 0$

$(E) \iff \boxed{x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0}$

Voici une autre équation de $\mathcal{C}$.

2) Les points de $\mathcal{C}$ qui ont pour abscisse 3 sont les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite d'équation $x = 3$. Je les nomme A et B, A étant celui qui a la plus grande ordonnée.
(sauf que c'est un peu prématuré : je n'ai pas encore prouvé qu'il y a 2 points d'intersection entre le cercle et la droite).

$M\binom{x}{y}$ appartiendra à $\mathcal{C}$ si et seulement si : $\begin{cases} x = 3 \\ \text{et} \\ (x-2)^2 + (y+4)^2 = 4 \end{cases}$

Je remplace x par 3 dans l'équation de $\mathcal{C}$ pour trouver les valeurs possibles de y :

$(3-2)^2 + (y+4)^2 = 4 \iff 1 + (y+4)^2 = 4$
$\iff (y+4)^2 = 3$
$\iff y+4 = \sqrt{3}$ ou $y+4 = -\sqrt{3}$
$\iff \underline{y = \sqrt{3}-4}$ ou $\underline{y = -\sqrt{3}-4}$

On trouve : $\boxed{A(3;\ \sqrt{3}-4)}$ $\boxed{B(3;\ -\sqrt{3}-4)}$

On pouvait aussi utiliser l'autre équation de $\mathcal{C}$, mais c'était plus calculatoire :

$3^2 + y^2 - 4\times3 + 8y + 16 = 0 \iff 9 + y^2 - 12 + 8y + 16 = 0$
$\iff y^2 + 8y + 13 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4\times1\times13 = 64 - 52 = \underbrace{12}_{\Delta} = (\sqrt{12})^2 = (\sqrt{4\times3})^2 = (\underbrace{2\sqrt{3}}_{\sqrt{\Delta}})^2$

racines : $x_1 = \dfrac{-8-2\sqrt{3}}{2\times1} = \underbrace{-4-\sqrt{3}}_{y_B}$ $\quad x_2 = \dfrac{-8+2\sqrt{3}}{2\times1} = \underbrace{-4+\sqrt{3}}_{y_A}$

Exercice 8. 1) $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0 \quad (E_1)$

$x^2 - x$ est le début de quelle identité remarquable ?

$x^2 - 2\times x\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$

Et $y^2 - 3y$?

Suite de l'exercice 8. $y^2 - 2 \times y \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$a^2 - 2ab + b^2$

$(E_1) \iff x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2 \times y \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$

Pour que ce soit bien égal, j'ôte à la fin le $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ et le $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ que j'avais ajoutés

$(E_1) \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 5 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$

$(E_1) \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{2} + \frac{10}{4}$

$(E_1) \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{2} + \frac{5}{2}$

$(E_1) \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{2}$

$(E_1) \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{15}{2}}\right)^2$

coordonnées du centre — rayon

(E_1) est bien l'équation d'un cercle

- Dont le centre a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$
- Dont le rayon est : $\sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{2}}$

2) $(x-2)(x+5) + (y-1)(y-4) = 0 \quad (E_2)$

$(E_2) \iff x^2 + 5x - 2x - 10 + y^2 - 4y - y + 4 = 0$

$(E_2) \iff x^2 + 3x + y^2 - 5y - 6 = 0$

$(E_2) \iff x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - 2 \times y \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6$

$a^2 + 2ab + b^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2$

$(E_2) \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 6 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$

$(E_2) \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{12}{2} + \frac{34}{4}$

$(E_2) \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{12}{2} + \frac{17}{2}$

$(E_2) \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{2}$

$(E_2) \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{58}}{2}\right)^2$

On a écrit (E_2) sous la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$ où $(x_\Omega ; y_\Omega)$ sont les coordonnées du centre du cercle et r son rayon.

(E_2) est l'équation d'un cercle :

- Dont le centre a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right)$
- Dont le rayon est $\frac{\sqrt{58}}{2}$.

Note : $\sqrt{\frac{29}{2}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{29} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$

3) (E_3) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 1 = 0$ $\quad :3$

$(E_3) \iff x^2 + y^2 - 2x - 3y - \frac{1}{3} = 0$

$(E_3) \iff x^2 - 2\times x \times 1 + 1^2 + y^2 - 2\times y \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0$

$(E_3) \iff (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1 + \frac{9}{4} + \frac{1}{3}$

$1 + \frac{9}{4} + \frac{1}{3} = \frac{12}{12} + \frac{9\times 3}{4\times 3} + \frac{1\times 4}{3\times 4} = \frac{12}{12} + \frac{27}{12} + \frac{4}{12} = \frac{43}{12}$

$\sqrt{\frac{43}{12}} = \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{43}\times\sqrt{12}}{\sqrt{12}\times\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{516}}{12}$

$(E_3) \iff (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{516}}{12}\right)^2$

(E_3) est l'équation d'un cercle
- de centre de coordonnées $\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$
- de rayon $\frac{\sqrt{516}}{12}$

Exercice 9. $\mathscr{C}$ est un cercle $\begin{cases} \text{de centre } I(1;-2) \\ \text{de rayon } 2\sqrt{2} \end{cases}$

1) $\mathscr{C}$ a donc pour équation : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$ (E)

$(E) \iff \boxed{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8}$

$(E) \iff x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 8$

$(E) \iff \boxed{x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0}$

équations de $\mathscr{C}$

2) Recherchons les coordonnées de A et B, les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, qui a pour équation $y = 0$.

Dans $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$, je remplace y par 0.

J'obtiens : $(x-1)^2 + (0+2)^2 = 8$

soit $(x-1)^2 + 4 = 8 \iff (x-1)^2 = 4$

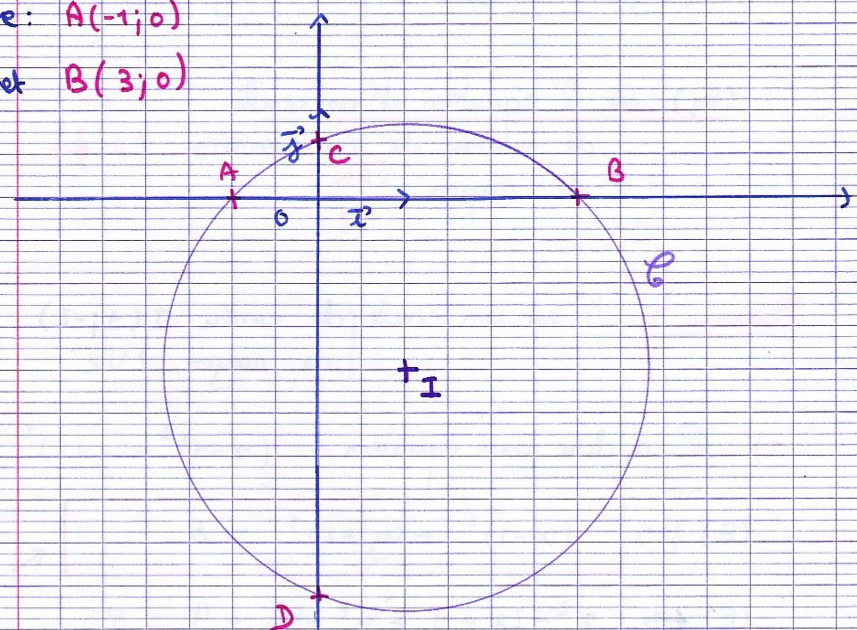
$\iff x - 1 = 2$ ou $x - 1 = -2$

$\iff x = 3$ ou $x = -1$

abscisse de B — abscisse de A

On trouve : $A(-1;0)$

et $B(3;0)$



Ce qui me permet de tracer le cercle avec précision.

Suite de l'exercice 9, question 2. Cherchons maintenant les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées, qui a pour équation $x = 0$.

Je remplace x par 0 dans l'une des équations de $\mathscr{C}$:

$$(0-1)^2 + (y+2)^2 = 8 \iff 1 + (y+2)^2 = 8$$
$$\iff (y+2)^2 = 7$$
$$\iff y+2 = \sqrt{7} \text{ ou } y+2 = -\sqrt{7}$$
$$\iff \boxed{y = \sqrt{7} - 2} \text{ ou } \boxed{y = -\sqrt{7} - 2}$$

ordonnée de C $\approx 0,65$ — ordonnée de D $\approx -4,65$

On trouve donc : $C(0 ; \sqrt{7}-2)$ et $D(0 ; -\sqrt{7}-2)$.

3) On a donc : $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\\sqrt{7}-2\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{7}-2\end{pmatrix}$

Remarque : $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ et $\vec{OD}$ ont les mêmes coordonnées que A, B, C et D puisque O(0 ; 0)

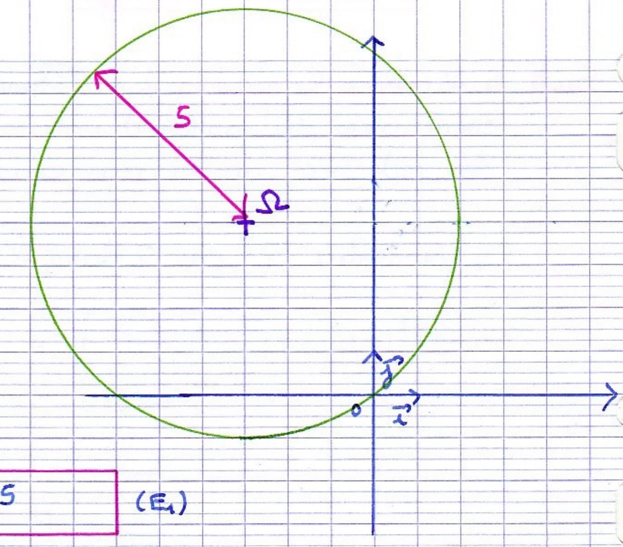
$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = -1\times 3 + 0\times 0 = -3$

$$\vec{OC}\cdot\vec{OD} = 0\times 0 + (\sqrt{7}-2)(-\sqrt{7}-2)$$
$$= (-2+\sqrt{7})(-2-\sqrt{7})$$
$$= (-2)^2 - (\sqrt{7})^2$$
$$= 4 - 7$$
$$= -3$$

Rappel : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

→ On a bien $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \vec{OC}\cdot\vec{OD}$ C.Q.F.D

Exercice 10 : 1) $\mathscr{C}$ a pour centre $\Omega(-3 ; 4)$ et pour rayon 5.



Une équation de $\mathscr{C}$ est donc :

$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$

soit

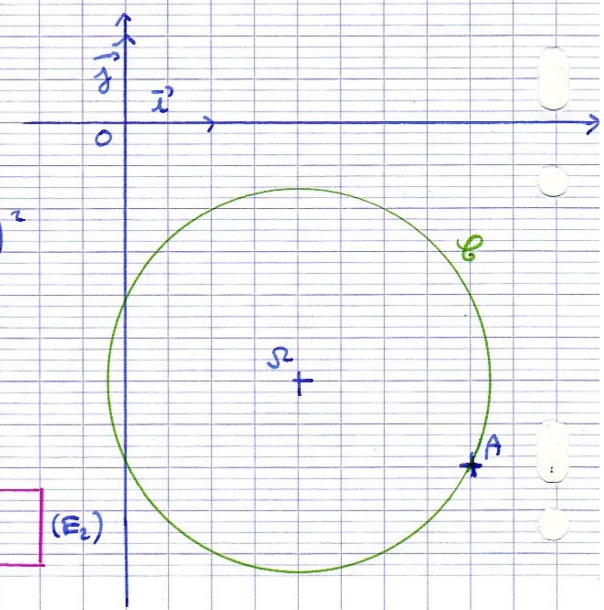
$$\boxed{(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25} \quad (E_1)$$

$(E_1) \iff x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 25 = 0$

$(E_1) \iff \boxed{x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0}$

autre équation possible pour $\mathscr{C}$.

2) $\mathscr{C}$ a pour centre $\Omega(2 ; -3)$ et passe par $A(4 ; -4)$.



$$\Omega A^2 = (4-2)^2 + (-4-(-3))^2$$
$$= 2^2 + (-1)^2$$
$$= 4 + 1$$
$$\Omega A^2 = 5$$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc :

$$\boxed{(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5} \quad (E_2)$$

Suite de l'exercice 10, question 2.

$(E_2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 5 = 0$

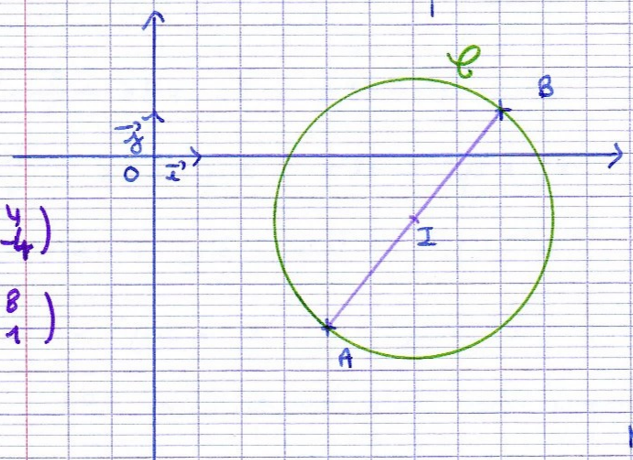
$(E_2) \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0}$

Voici une autre équation de $\mathcal{C}$.

3)

$A\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$



1ère idée : $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[AB]$. $\mathcal{C}$ est donc l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Si $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x-4\\y+4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}x-8\\y-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-8) + (y+4)(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 4x + 32 + y^2 - y + 4y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 12x + 3y + 28 = 0}$

2ème idée. Nommons I le milieu de $[AB]$. $I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$I\left(\frac{4+8}{2} ; \frac{-4+1}{2}\right)$ $\boxed{I\left(6 ; -\frac{3}{2}\right)}$

On calcule le diamètre, puis le rayon du cercle :

diamètre : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8-4)^2 + (1+4)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25}$

$AB = \sqrt{41}$. Donc le rayon du cercle est : $\frac{\sqrt{41}}{2}$

Le cercle $\mathcal{C}$ aura donc pour équation :

$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2$

soit $\boxed{(x - 6)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}}$ (E_3)

$(E_3) \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = \frac{41}{4}$

$(E_3) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x + 3y + 36 + \frac{9}{4} - \frac{41}{4} = 0$

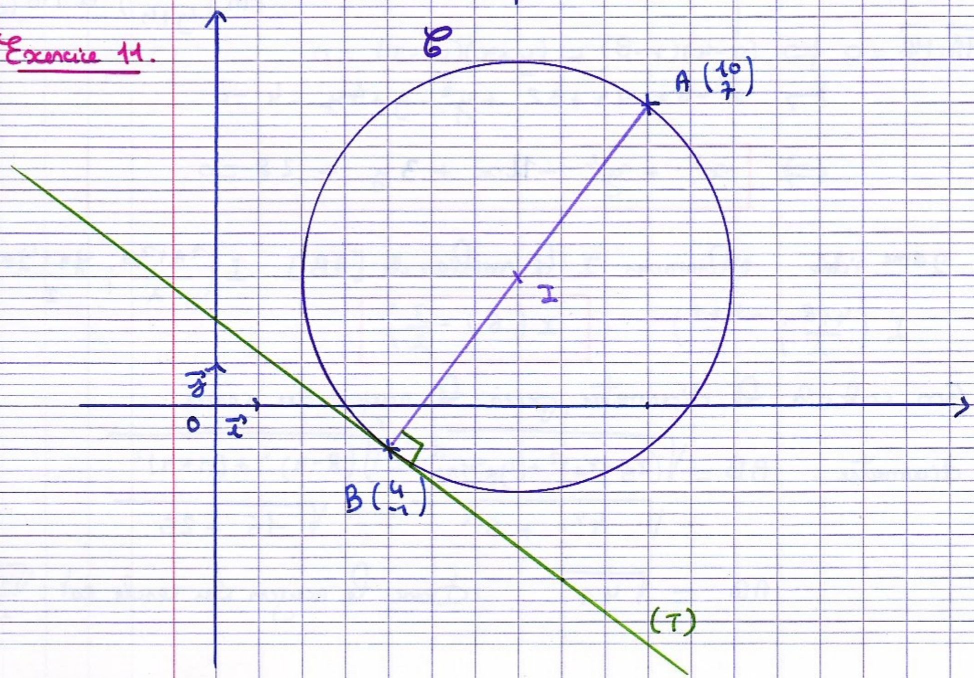
$(E_3) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x + 3y + 36 - \frac{32}{4} = 0$

$(E_3) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x + 3y + 36 - 8 = 0$

$(E_3) \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 12x + 3y + 28 = 0}$

On retrouve bien l'équation de l'idée n°1.

Exercice 11.



Suite de l'exercice 11 **Question 1.** $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartiendra à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\vec{MA}.\vec{MB}=0$ avec $\vec{MA}\begin{pmatrix}x-10\\y-7\end{pmatrix}$ et $\vec{MB}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\end{pmatrix}$

$\vec{MA}.\vec{MB}=0 \iff (x-10)(x-4)+(y-7)(y+1)=0$

$\iff x^2-4x-10x+40+y^2+y-7y-7=0$

$\iff \boxed{x^2+y^2-14x-6y+33=0}$

C'est la méthode la plus rapide pour obtenir <u>une équation de $\mathcal{C}$</u>.

On peut aussi passer par son centre (que je nomme I) et son rayon.

I est le milieu de [AB] donc $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

soit $I\left(\frac{10+4}{2};\frac{7+(-1)}{2}\right)$ $\boxed{I\ (7;3)}$

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-10)^2+(-1-7)^2}$

$=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

Donc le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est de $\frac{10}{2}=5$.

Une équation de $\mathcal{C}$ est donc : $\boxed{(x-7)^2+(y-3)^2=25}$ (E_1) 5^2

On peut vérifier que cette équation est bien équivalente à celle trouvée plus haut :

$(E_1)\iff x^2-14x+49+y^2-6y+9-25=0$

$(E_1)\iff \boxed{x^2+y^2-14x-6y+33=0}$ ok !

2) La tangente (T) au cercle $\mathcal{C}$ en B est l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MB}.\vec{AB}=0$ (puisqu'il s'agit de la droite perpendiculaire à (AB) passant par B).

$\vec{MB}\begin{pmatrix}x_M-x_B\\y_M-y_B\end{pmatrix}$ $\vec{MB}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\end{pmatrix}$ en notant $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de M.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}4-10\\-1-7\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$

$\vec{MB}.\vec{AB}=0 \iff (x-4)\times(-6)+(y+1)\times(-8)=0$

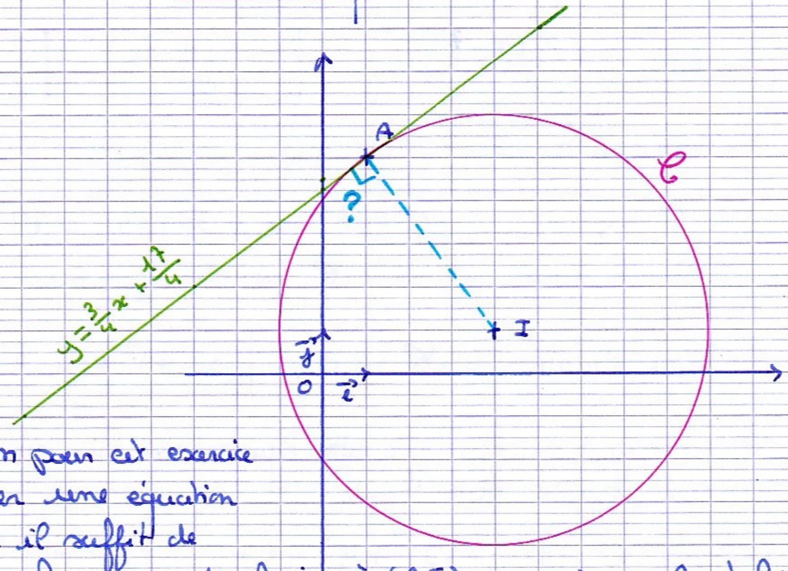
$\iff -6x+24-8y-8=0$

$\iff -6x-8y+16=0$

$:(-2)$ $\iff \boxed{3x+4y+8=0}$ $:(-2)$

Voici <u>une équation cartésienne de (T)</u>

Exercice 12 :



Nul besoin pour cet exercice de calculer une équation du cercle : il suffit de prouver que la perpendiculaire à (AI) passant par A est bien la droite d'équation $y=\frac{3}{4}x+\frac{17}{4}$.

Suite de l'exercice 12. Nommons (T) la tangente en $A\binom{1}{5}$ au cercle $\mathscr{C}$ de centre $I\binom{4}{1}$ passant par A.

(T) est l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AM}\cdot\vec{AI}=0$.

$M\binom{x}{y}$ $\quad \vec{AM}\binom{x-1}{y-5}$ $\quad \vec{AI}\binom{4-1}{1-5}$ $\quad \vec{AI}\binom{3}{-4}$

$$\begin{aligned}
\vec{AM}\cdot\vec{AI}=0 &\iff (x-1)\times 3+(y-5)\times(-4)=0\\
&\iff 3x-3-4y+20=0\\
&\iff 3x-4y+17=0\\
&\iff 3x+17=4y\\
&\iff \boxed{\tfrac{3}{4}x+\tfrac{17}{4}=y}
\end{aligned}$$

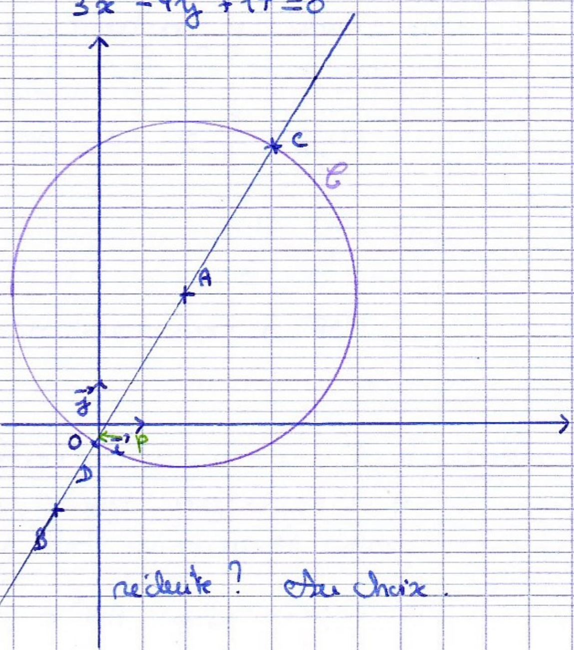
C.Q.F.D

On trouve bien pour la tangente en A à $\mathscr{C}$ l'équation réduite donnée par l'énoncé.

Remarque : 2 lignes plus haut, on avait l'une de ses équations cartésiennes : $3x-4y+17=0$

Exercice 13. Hypothèses :
- Le repère est orthonormé.
- A (2;3) B(-1;-2)

Je nomme $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 4, puis C et D les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite (AB).



L'énoncé demande une équation de la droite (AB) ... Cartésienne ou réduite ? Au choix.

Recherche d'une équation réduite de la droite (AB) :

A (2;3) B(-1;-2) A et B n'ont pas la même abscisse ($2\neq -1$), la droite (AB) admet donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$, où m est le coefficient directeur ou la pente de la droite, et p son ordonnée à l'origine, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection entre la droite (AB) et l'axe des ordonnées.

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

← différence des ordonnées "de combien on monte/descend"
← différence des abscisses "de combien on avance/recule horizontalement".

$$m=\frac{-2-3}{-1-2}$$

$$m=\frac{-5}{-3} \qquad m=\frac{5}{3}$$

On cherche p sachant que A (2;3) appartient à la droite : (on pouvait choisir B aussi)

$$y_A=\frac{5}{3}x_A+p \quad \text{soit} \quad 3=\frac{5}{3}\times 2+p$$

$$\text{soit} \quad \frac{9}{3}-\frac{10}{3}=p \qquad p=-\frac{1}{3}$$

→ (AB) a pour équation réduite $\boxed{y=\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}}$

Recherche d'une équation du cercle $\mathscr{C}$: $\mathscr{C}$ a pour centre A (2;3) et pour rayon 4, donc $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $AM=4$ ou $AM^2=16$

Si $M\binom{x}{y}$, alors $AM^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$

Suite de l'exercice 13 - Question 1 $AM^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$

Une équation de $\mathcal{C}$ est donc $\boxed{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16}$

Vous pouvez gagner du temps en écrivant directement l'équation à partir de la formule du cours :

$$\boxed{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2}$$

Équation d'un cercle de centre $I(x_I ; y_I)$ et de rayon R.

2) Sachant que la droite (AB) a pour équation $\boxed{y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}}$ et que le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $\boxed{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16}$, nous trouverons les coordonnées de leurs éventuels points d'intersection en résolvant le système :

$$(S) \begin{cases} y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} & (1) \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 & (2) \end{cases}$$

Je résous par substitution en remplaçant dans (2) y par son expression en fonction de x dans (1).

J'obtiens l'équation (E_1) $\boxed{(x-2)^2 + (\underbrace{\tfrac{5}{3}x - \tfrac{1}{3}}_{y} - 3)^2 = 16}$

$(E_1) \iff (x-2)^2 + \left(\frac{5}{3}x - \frac{1}{3} - \frac{3\times 3}{1\times 3}\right)^2 = 16$

$(E_1) \iff (x-2)^2 + \left(\frac{5x-10}{3}\right)^2 = 16$

$(E_1) \iff (x-2)^2 + \left[\frac{5}{3}(x-2)\right]^2 = 16$

J'ai constaté que c'était factorisable. On aurait pu essayer en développant.

Rappel : la puissance se distribue sur la multiplication et la division

$(E_1) \iff (x-2)^2 \times 1 + \frac{25}{9}(x-2)^2 = 16$

Je factorise par $(x-2)^2$

$(E_1) \iff (x-2)^2 \left[1 + \frac{25}{9}\right] = 16$

$(E_1) \iff (x-2)^2 \left[\frac{9}{9} + \frac{25}{9}\right] = 16$

$(E_1) \iff \frac{34}{9}(x-2)^2 = 16$

$(E_1) \iff (x-2)^2 = 16 \times \frac{9}{34}$

$(E_1) \iff (x-2)^2 = \frac{\cancel{2} \times 8 \times 9}{\cancel{2} \times 17}$

$(E_1) \iff (x-2)^2 = \frac{72}{17} \iff x-2 = \sqrt{\frac{72}{17}}$ ou $x - 2 = -\sqrt{\frac{72}{17}}$

Calculons à part : $\sqrt{\frac{72}{17}} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{2\times 4\times 9}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{4}\times\sqrt{9}\times\sqrt{17}}{\sqrt{17}\times\sqrt{17}}$

$= \frac{\sqrt{2}\times 2\times 3\times\sqrt{17}}{17} = \boxed{\frac{6\sqrt{34}}{17}}$

$(E_1) \iff x - 2 = \frac{6\sqrt{34}}{17}$ ou $x - 2 = -\frac{6\sqrt{34}}{17}$

$(E_1) \iff x = \frac{6\sqrt{34}}{17} + 2$ ou $x = -\frac{6\sqrt{34}}{17} + 2$

Suite de l'exercice 13. Question 2

$(E_1) \Leftrightarrow x = \dfrac{6\sqrt{34}}{17} + \dfrac{2\times 17}{1\times 17}$ ou $x = -\dfrac{6\sqrt{34}}{17} + \dfrac{2\times 17}{1\times 17}$

$(E_1) \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{6\sqrt{34}+34}{17}}$ ou $\boxed{x = \dfrac{-6\sqrt{34}+34}{17}}$

Je nomme x_1 et x_2 ces solutions.

On a $x_1 \approx 4{,}06$ et $x_2 \approx -0{,}06$

Pas besoin de l'écrire sur la copie, mais c'est utile pour vérifier sur le graphique.

Et si on avait développé au lieu de factoriser dans la résolution de (E_1) ?

$(E_1)\quad (x-2)^2 + \left(\dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3} - 3\right)^2 = 16$

$(E_1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + \left(\dfrac{5}{3}x - \dfrac{10}{3}\right)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + \left(\dfrac{5}{3}x\right)^2 - 2\times\dfrac{5}{3}x\times\dfrac{10}{3} + \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + \dfrac{25}{9}x^2 - \dfrac{100}{9}x + \dfrac{100}{9} = 16$

On réduit tous les termes sur 9 pour pouvoir ensuite multiplier les 2 membres par 9 :

$(E_1) \Leftrightarrow \dfrac{9x^2}{\cancel{9}} - \dfrac{36x}{\cancel{9}} + \dfrac{36}{\cancel{9}} + \dfrac{25x^2}{\cancel{9}} - \dfrac{100x}{\cancel{9}} + \dfrac{100}{\cancel{9}} = \dfrac{144}{\cancel{9}}$

$(E_1) \Leftrightarrow 34x^2 - 136x + 136 = 144$

$(E_1) \Leftrightarrow 34x^2 - 136x - 8 = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow 17x^2 - 68x - 4 = 0$ En divisant les 2 membres par 2.

$\Delta = (-68)^2 - 4\times 17\times(-4) = 4624 + 272$
$= 4896 = 4\times 1224 = 4\times 4\times 306 = 4\times 4\times 9\times 34$

donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4\times 4\times 9\times 34} = \sqrt{4}\times\sqrt{4}\times\sqrt{9}\times\sqrt{34}$
$= 2\times 2\times 3\times\sqrt{34} = 12\sqrt{34}$

On a 2 racines : $x_1 = \dfrac{68+12\sqrt{34}}{2\times 17} = \dfrac{\cancel{2}(34+6\sqrt{34})}{\cancel{2}\times 17}$

$x_1 = \dfrac{34+6\sqrt{34}}{17}$

et $x_2 = \dfrac{68-12\sqrt{34}}{2\times 17} = \dfrac{34-6\sqrt{34}}{17}$

On retrouve bien les valeurs x_1 et x_2 de l'autre résolution.

x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection entre la droite (AB) et le cercle $\mathcal{C}$.

Pour calculer les ordonnées respectives y_1 et y_2 de ces 2 points, on peut utiliser au choix l'équation de la droite (AB) ou celle du cercle $\mathcal{C}$.

* En utilisant l'équation de la droite (AB) : $\boxed{y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}}$

Nommons P_1 et P_2 les points d'intersection de la droite et du cercle. On a : $P_1(x_1 ; y_1)$ et $P_2(x_2 ; y_2)$

Suite de l'exercice 13. Question 2.

$y_1 = \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}$

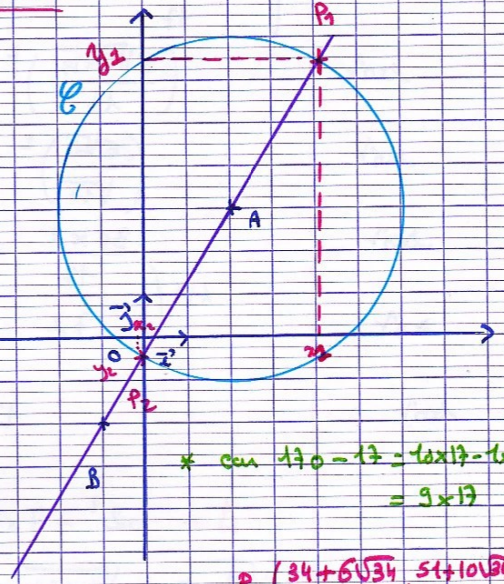
$= \frac{5}{3} \times \frac{34+6\sqrt{34}}{17} - \frac{1}{3}$

$= \frac{170 + 30\sqrt{34} - 1\times 17}{3\times 17}$ *

$= \frac{9\times 17 + 30\sqrt{34}}{3\times 17}$

$= \frac{\cancel{3}\times 3\times 17 + \cancel{3}\times 10\sqrt{34}}{\cancel{3}\times 17}$

$\boxed{y_1 = \frac{51 + 10\sqrt{34}}{17}} \simeq 6{,}43$



* car $170 - 17 = 10\times 17 - 1\times 17$
$= 9\times 17$

$P_1\left(\frac{34+6\sqrt{34}}{17} ; \frac{51+10\sqrt{34}}{17}\right)$

$y_2 = \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}\times\frac{34-6\sqrt{34}}{17} - \frac{1}{3}$

$= \frac{170 - 30\sqrt{34} - 17}{3\times 17} = \frac{\cancel{3}\times 3\times 17 - \cancel{3}\times 10\sqrt{34}}{\cancel{3}\times 17}$

$\boxed{y_2 = \frac{51 - 10\sqrt{34}}{17}} \simeq -0{,}43$ $\quad P_2\left(\frac{34-6\sqrt{34}}{17} ; \frac{51-10\sqrt{34}}{17}\right)$

Et si on avait plutôt utilisé l'équation de $\mathcal{C}$ pour trouver y_1 et y_2 ?

$\mathcal{C}$ a pour équation $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

$P_1(x_1 ; y_1) \in \mathcal{C}$ donc $(x_1-2)^2 + (y_1-3)^2 = 16$

Soit $\left(\frac{34+6\sqrt{34}}{17} - 2\right)^2 + (y_1 - 3)^2 = 16$

Soit $\left(\frac{34+6\sqrt{34}-34}{17}\right)^2 + (y_1-3)^2 = 16$

soit $\left(\frac{6\sqrt{2\times 17}}{17}\right)^2 + y_1^2 - 6y_1 + 9 = 16$

soit $\left(\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)^2 + y_1^2 - 6y_1 + 9 - 16 = 0$

soit $\frac{36\times 2}{17} + y_1^2 - 6y_1 - 7 = 0$ $\quad \times 17$

soit $72 + 17y_1^2 - 102y_1 - 119 = 0$

soit $17y_1^2 - 102y_1 - 47 = 0$

$\Delta = 102^2 + 4\times 17\times 47 = 13600 = \left(10\sqrt{136}\right)^2$

$\sqrt{\Delta} = 10\sqrt{4\times 34} = 20\sqrt{34}$

On trouve 2 racines :

$y_{1-1} = \frac{102 - 20\sqrt{34}}{2\times 17} = \frac{51-10\sqrt{34}}{17}$ ← on trouve l'ordonnée de P_2

et $y_{1-2} = \frac{51+10\sqrt{34}}{17}$ ← On trouve l'ordonnée de P_1

→ Le souci ici c'est qu'il faut départager entre les 2 racines trouvées pour savoir laquelle est l'ordonnée de P_1 et pour cela utiliser quand même l'équation de (AB)
→ du coup il restait quand même beaucoup plus simple d'utiliser l'équation de (AB) directement pour trouver les coordonnées de P_1 et de P_2.

Les coordonnées des points d'intersection entre (AB) et $\mathcal{C}$ sont donc :

$\boxed{\left(\frac{34+6\sqrt{34}}{17} ; \frac{51+10\sqrt{34}}{17}\right)}$ P_1

et $\boxed{\left(\frac{34-6\sqrt{34}}{17} ; \frac{51-10\sqrt{34}}{17}\right)}$ P_2

Exercice 14 : 1) $(x-3)^2+(y-5)^2=12$ est de la forme
$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$
avec $x_I=3$ $y_I=5$ et $R=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$

Cette équation est donc celle du cercle qui a pour centre le point de coordonnées $(3;5)$ et pour rayon $2\sqrt{3}$.

2) $(x+2)^2+y^2=4$ est de la forme $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$
avec $x_I=-2$; $y_I=0$ et $R=2$.

Cette équation est celle du cercle de centre le point de coordonnées $(-2;0)$ et de rayon 2.

3) $x^2+y^2-4x+y-5 \iff x^2-4x+\underbrace{4}_{b^2}+y^2+2x\frac{1}{2}y+\underbrace{\frac{1}{4}}_{b^2}\underbrace{-4}_{-b^2}\underbrace{-\frac{1}{4}}_{-b^2}-5=0$

Il s'agit de détection des "débuts d'identités remarquables" de la forme $a^2+2ab+b^2$ ou $a^2-2ab+b^2$

$\iff (x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=9+\frac{1}{4}$

$\iff (x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{36}{4}+\frac{1}{4}$

$\iff (x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{37}{4}$

Cette équation est de la forme $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$

avec $x_I=2$; $y_I=-\frac{1}{2}$ et $R=\frac{\sqrt{37}}{2}$.

C'est donc l'équation d'un cercle de centre de coordonnées $\boxed{\left(2;-\frac{1}{2}\right)}$ et de rayon $\boxed{\frac{\sqrt{37}}{2}}$.

4) $y^2=4-x^2 \iff x^2+y^2=4$ est de la forme $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$
avec $I(0;0)$ et $R=2$.
C'est l'équation du cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 2.

Exercice 15 : ⚠ Ici, on ne sait pas si on a affaire à une équation de droite, de cercle ou d'autre chose.

1) $x^2+y^2-3y=0$ (E_1) On essaie de l'écrire sous la forme d'une équation de cercle.

$(E_1) \iff x^2+y^2-3y^{*}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0$

$(E_1) \iff x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

C'est de la forme $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$

avec $x_I=0$ $y_I=\frac{3}{2}$ et $R=\frac{3}{2}$

Il s'agit donc du cercle de centre le point de coordonnées $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$

* car j'ai remarqué que $3y=2\times \underset{a}{y}\times \underset{b}{\frac{3}{2}}$

2) $x^2+y^2-4x+8=0$ (E_2)

$(E_2) \iff x^2+y^2-4x+4-4+8=0$

$(E_2) \iff x^2+(y-2)^2=-4$

nombre négatif

Cette équation nous dit que le carré de la distance d'un point $M(x;y)$ au point de coordonnées $(0;2)$ doit être de -4. C'est impossible car le carré d'une distance ne peut

Suite de l'exercice 15. 2) pas être négatif. Aucun point du plan ne satisfait aux conditions. L'ensemble E recherché est donc l'ensemble vide. $E = \emptyset$.

On peut aussi constater simplement :

$$\underbrace{x^2 + (y-2)^2}_{\text{somme de 2 carrés}} = \underset{\uparrow \text{ nombre négatif}}{-4} \qquad S = \emptyset$$

3) $2x - 5y + 3 = 0 \quad (E_3)$

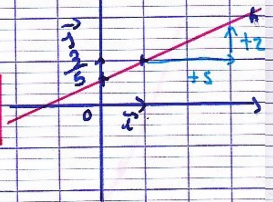
(E_3) est l'équation cartésienne d'une droite car elle est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$

signifie que le couple $(a;b)$ n'est pas égal au couple $(0;0)$ donc que au moins a ou b est non nul.

On peut préciser le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette droite en écrivant l'équation sous sa forme réduite.

$2x - 5y + 3 = 0 \iff -5y = -2x - 3$

$\iff \boxed{y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}}$



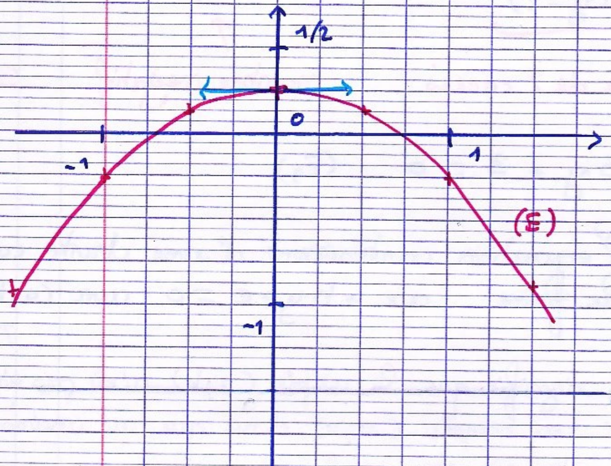
(E) est la droite de coefficient directeur $\frac{2}{5} = 0,4$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{3}{5} = 0,6$.

4) (E_4) $2x^2 + 4y - 1 = 0 \iff 4y = -2x^2 + 1$

$\iff y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

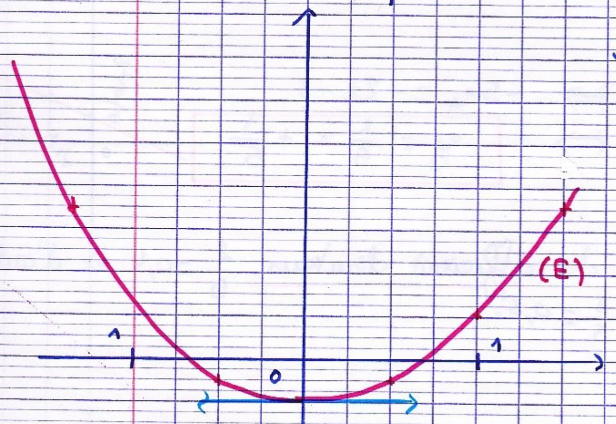
$f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ est une fonction trinôme.

Sa courbe représentative est donc une parabole



5) (E_5) $2x^2 - 4y - 1 \iff -4y = -2x^2 + 1 \iff \boxed{y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}}$

On obtient l'équation de la symétrique de la parabole ci-dessus par rapport à l'axe des abscisses.



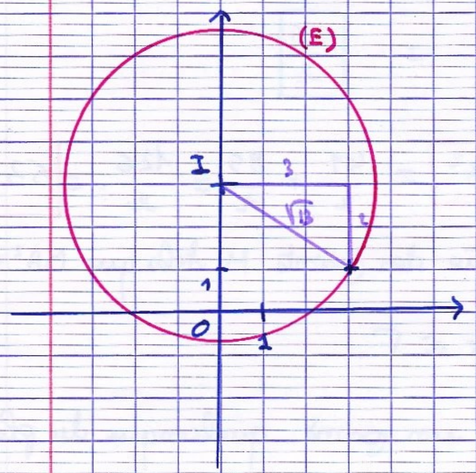
Suite de l'exercice 15. 6) (E_6) $x^2+y^2-6y-4=0$

$(E_6) \iff x^2+y^2-6y+9-9-4=0$

$\iff x^2+(y-3)^2=13$

Cette équation est de la forme $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$ avec $x_I=0$, $y_I=3$ et $R=\sqrt{13}$

Il s'agit donc de l'équation du cercle de centre $I(0;3)$ et de rayon $\sqrt{13}$.



car $3^2+2^2=9+4=13$

Exercice 16. Hypothèses : $A\binom{2}{0}$ $B\binom{-3}{1}$ $C\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$

Γ = l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=63$

1) $CA^2=(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2$

$=\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+\left(0-\frac{9}{2}\right)^2$

$=\left(\frac{4}{2}-\frac{5}{2}\right)+\frac{81}{4}$

$CA^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{81}{4}=\frac{1}{4}+\frac{81}{4}=\frac{82}{4}=\boxed{\frac{41}{2}}$

$CB^2=(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2$

$=\left(-3-\frac{5}{2}\right)^2+\left(1-\frac{9}{2}\right)^2$

$=\left(-\frac{6}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{2}-\frac{9}{2}\right)^2$

$=\left(-\frac{11}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2$

$=\frac{121}{4}+\frac{49}{4}$

$=\frac{170}{4}=\boxed{\frac{85}{2}}$

Donc $\boxed{CA^2+CB^2}=\frac{41}{2}+\frac{85}{2}=\frac{126}{2}=\boxed{63}$

C fait bien partie des points M tels que $MA^2+MB^2=63$.

Donc C appartient à Γ.

2) Soit $M(x;y)$ un point quelconque du plan.

$MA^2+MB^2=\underbrace{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}_{MA^2}+\underbrace{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}_{MB^2}$

$=(x-2)^2+y^2+(x+3)^2+(y-1)^2$

$=x^2-4x+4+y^2+x^2+6x+9+y^2-2y+1$

$=2x^2+2x+2y^2-2y+14$

Suite de l'exercice 16, question 2.

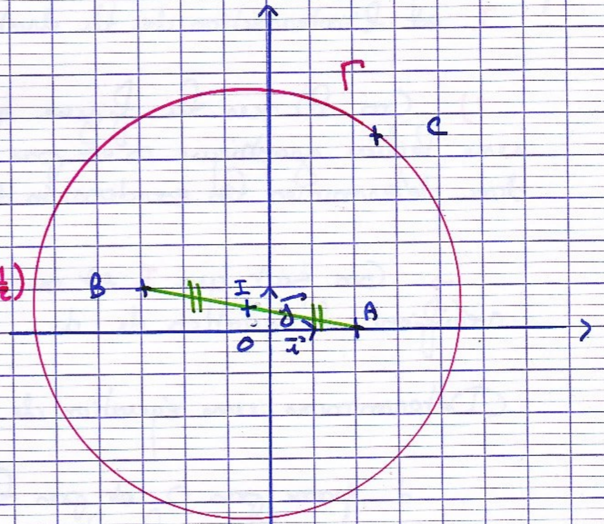
$$MA^2 + MB^2 = 63 \iff 2x^2 + 2x + 2y^2 - 2y + 14 = 63$$
$$\iff x^2 + x + y^2 - y + 7 = \frac{63}{2}$$
$$\iff x^2 + x + \underline{\frac{1}{4}} + y^2 - y + \underline{\frac{1}{4}} - \underline{\frac{2}{4}} + 7 = \frac{63}{2}$$
$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = -7 + \frac{63}{2} + \frac{1}{2}$$
$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = -7 + \frac{64}{2}$$
$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 25$$

Cette équation est de la forme $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2$

avec $x_I = -\frac{1}{2}$; $y_I = \frac{1}{2}$ et $R = 5$

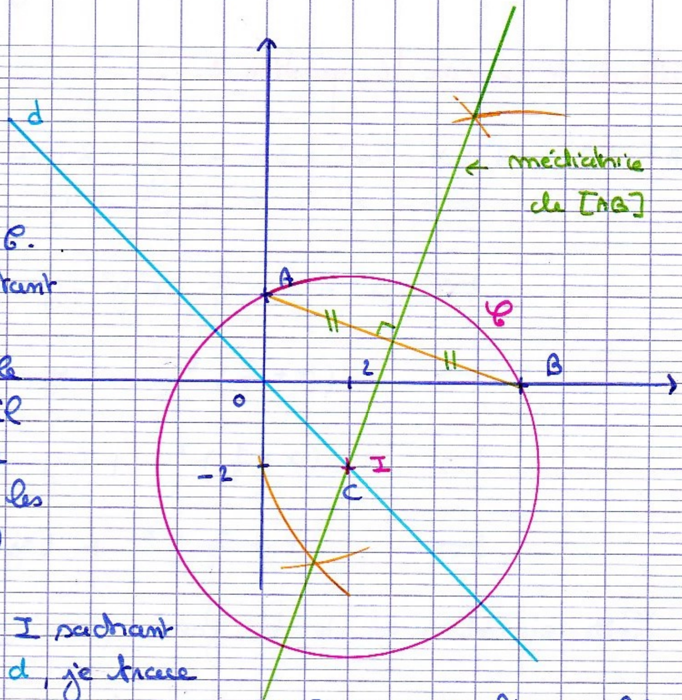
Γ est le cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon 5

Ou encore le cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et passant par C.



Remarque : I est le milieu de [AB]

Exercice 17. 1)



Soit I le centre du cercle 𝒞.
I est équidistant de A et de B (puisque c'est le centre du cercle, il est à la même distance de tous les points du cercle)

Pour trouver I sachant qu'il est sur d, je trace la médiatrice du segment [AB], qui est l'ensemble des points équidistants de A et de B.
I est l'intersection de la droite d et de cette médiatrice.

2) On lit sur la figure que I (2 ; -2). Mais une lecture graphique n'est pas une preuve ! Il nous faut donc déterminer les coordonnées de I par le calcul.

→ On sait que I est sur d donc que ses coordonnées vérifient l'équation de d. Mais quelle est cette équation ?

Déterminons une équation de d.

d passe par O et par le point de coordonnées (2 ; -2) d'après la figure. Nous ne savons pas encore que c'est I, nommons-le C.

Corrigés

Suite de l'exercice 17, question 2 : d passe par : $\begin{cases} O(0;0) \\ C(2;-2) \end{cases}$

$x_O \neq x_C$ donc d admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m est son coefficient directeur et p son ordonnée à l'origine.

Comme d passe par $O(0;0)$, son ordonnée à l'origine est 0 : $p = 0$.

$$m = \frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \frac{-2-0}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$$

d a donc pour équation réduite $\boxed{y = -x}$

Il s'agit de la 2ème bissectrice.

Cherchons une équation de la médiatrice de [AB], que nous nommons m.

m est l'ensemble des points $M(x;y)$ équidistants de $A(0;2)$ et de $B(6;0)$

$M(x;y) \in m \iff MA = MB$

$\iff MA^2 = MB^2$ (puisque MA et MB sont des longueurs)

$\iff (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = (x-x_B)^2 + (y-y_B)^2$

$\iff (x-0)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + (y-0)^2$

$\iff \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 12x + 36 + \cancel{y^2}$

$\iff -4y + 4 = -12x + 36$

$\iff -y + 1 = -3x + 9$

$\iff -y = -3x + 8$

$MA^2 = MB^2 \iff \boxed{y = 3x - 8}$ équation de M.

I est l'intersection de d d'équation $y = -x$ et de m d'équation $y = 3x - 8$

On a donc $y_I = -x_I = 3x_I - 8$

donc $-x_I = 3x_I - 8 \iff -4x_I = -8 \iff x_I = 2$

D'où $y_I = -x_I = -2$ → donc $\boxed{I(2;-2)}$

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(2;-2)$ et de rayon IA.

Calculons : $IA^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2$

$= (0-2)^2 + (2-(-2))^2$

$= (-2)^2 + 4^2$

$= 4 + 16$

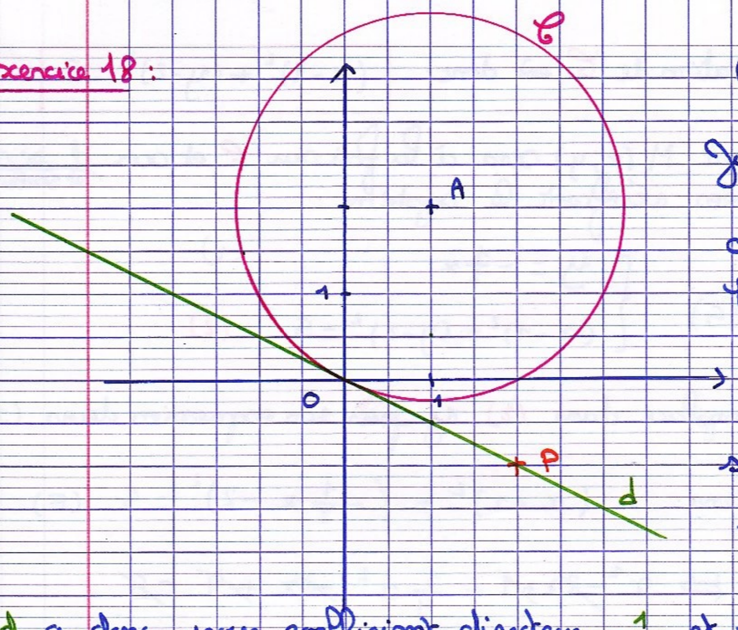
$= 20$

Une équation du cercle $\mathscr{C}$ est donc :

$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = IA^2$

soit $\boxed{(x-2)^2 + (y+2)^2 = 20}$

Exercice 18 :



$A(1;2)$

Je nomme $\mathscr{C}$ le cercle de centre A passant par O et d la droite d'équation $x + 2y = 0$ soit $2y = -x$ soit $y = -\frac{1}{2}x$

d a donc pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ et pour ordonnée à l'origine 0 (zéro) donc elle passe par le point O.

O est donc un point commun à d et à $\mathscr{C}$.

Pour montrer que d est tangente à $\mathscr{C}$, on peut :

* Méthode 1 : Prouver que O est le seul point commun à d et à $\mathscr{C}$

* Méthode 2 : Prouver que (OA) et d sont perpendiculaires.

* Méthode 1 : Cherchons une équation de $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ a pour centre $A(1;2)$ et pour rayon OA.

$OA^2 = (x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 = (1-0)^2 + (2-0)^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc : $\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5}$

Un point $M(x;y)$ sera à la fois sur $\mathscr{C}$ et sur d si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$(S)\quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x & (1) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Je remplace dans (2) y par son expression dans (1).

J'obtiens : $(x-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}x - 2\right)^2 = 5 \quad (E)$

$(E) \iff x^2 \cancel{-2x} \cancel{+1} + \frac{1}{4}x^2 \cancel{+2x} \cancel{+4} \cancel{=5}$

$(E) \iff \frac{5}{4}x^2 = 0$

$(E) \iff x^2 = 0 \iff \underline{x = 0}$

Et en remplaçant x par 0 dans (1), on trouve :

$\underline{y} = -\frac{1}{2} \times 0 \; \underline{= 0}$

Le point de coordonnées (0 ; 0) est donc le seul point commun à $\mathscr{C}$ et à d donc d est tangente à $\mathscr{C}$ en O.

* Méthode 2 : Je veux prouver que $(OA) \perp d$.

J'ai besoin de déterminer un autre point de d, par exemple un point P d'abscisse 2.

$P(x_P ; y_P)$ tel que $x_P = 2$ est sur d d'équation $y = -\frac{1}{2}x$.

Donc $y_P = -\frac{1}{2}x_P = -\frac{1}{2}\times 2 = -1$

J'ai donc $P(2 ; -1)$ qui appartient à d et est différent de O.

On aura $(OA) \perp (d)$ si et seulement si $(OA) \perp (OP)$
soit $\vec{OA}.\vec{OP} = 0$

Or $\vec{OA}(x_A - x_0 ; y_A - y_0)$ $\vec{OA}(1 ; 2)$
et $\vec{OP}(x_P - x_0 ; y_P - y_0)$ $\vec{OP}(2 ; -1)$

$\vec{OA}.\vec{OP} = 1\times 2 + 2\times(-1) = 2 - 2 = 0$

On a donc bien $(OA) \perp d$. Comme $\mathcal{C}$ a pour centre A et passe par O et comme d passe par O et est perpendiculaire au rayon (OA) de $\mathcal{C}$, on en déduit que d est la tangente à $\mathcal{C}$ en O.

Exercice 19. $\mathcal{C}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$
et d est la droite d'équation $x + 3y - 6 = 0$

1) Pour faire la figure, j'ai besoin de transformer les équations de $\mathcal{C}$ et de d.

$x^2+y^2-4x+4y-2=0 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 - 8 - 2 = 0$
$\iff (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$

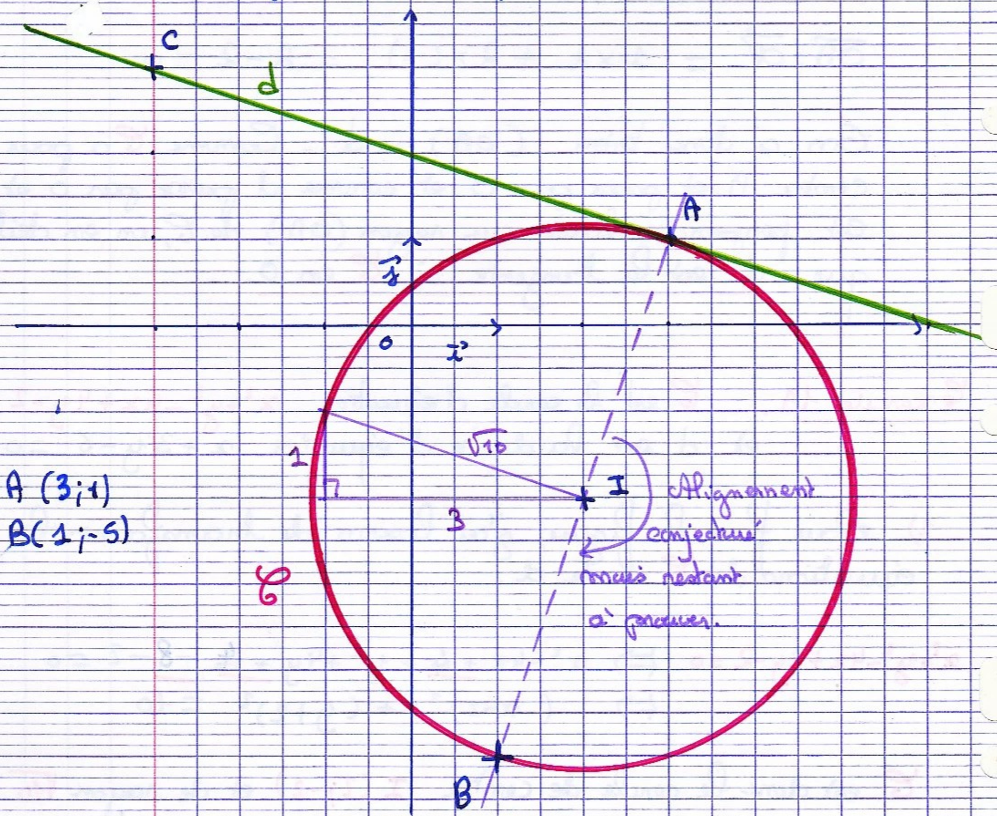
$\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre $I(2 ; -2)$ et de rayon $\sqrt{10}$.
avec $10 = 9 + 1 = 3^2 + 1^2$

$x + 3y - 6 = 0$ si $x = 3$: $3 + 3y - 6 = 0$
soit $3y - 3 = 0$
soit $3y = 3$
soit $y = 1$

→ d passe par le point de coordonnées $(3 ; 1)$

si $x = -3$: $-3 + 3y - 6 = 0$
soit $3y - 9 = 0$
soit $3y = 9$
soit $y = 3$

→ d passe par le point de coordonnées $(-3 ; 3)$



A (3 ; 1)
B (1 ; -5)

Suite de l'exercice 19. 2) Vérifions que $A(3;1)$ et $B(1;-5)$ appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2-4x+4y-2=0$

Pour A : $x_A^2+y_A^2-4x_A+4y_A-2 = 3^2+1^2-4\times3+4\times1-2$
$= 9+1-12+4-2$
$=0 \rightarrow A \in \mathcal{C}$

Pour B : $x_B^2+y_B^2-4x_B+4y_B-2 = 1^2+(-5)^2-4\times1+4\times(-5)-2$
$= 1+25-4-20-2$
$=0 \rightarrow B \in \mathcal{C}$

3) On a vu au 1) que $\mathcal{C}$ a pour centre $I(2;-2)$.

Pour savoir si d est tangente à $\mathcal{C}$ en A dont on sait qu'il est sur $\mathcal{C}$:

* Vérifions d'abord que $A \in d$:

d a pour équation $x+3y-6=0$

$x_A+3y_A-6 = 3+3\times1-6 = 3+3-6=0$
$\rightarrow$ Oui, $A \in d$.

* Déterminons les coordonnées d'un point de d distinct de A : D'après 1) nous avons le point de coordonnées $(-3;3)$ $\rightarrow$ Nommons-le C.

* Prouvons que (AC) et (IA) sont perpendiculaires en calculant : $\vec{AI}\cdot\vec{AC}$

$\vec{AI}\begin{pmatrix} x_I-x_A \\ y_I-y_A \end{pmatrix}$ $\vec{AI}\begin{pmatrix} 2-3 \\ -2-1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{AI}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix} -3-3 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$\vec{AI}\cdot\vec{AC} = -1\times(-6)+(-3)\times2 = 6-6=0$

Comme $\vec{AI}$ et $\vec{AC}$ sont 2 vecteurs non nuls, le fait que $\vec{AI}\cdot\vec{AC}=0$ nous prouve que (AI) et (AC) sont perpendiculaires. d = (AC) est la perpendiculaire au rayon (IA) du cercle passant par A. Il s'agit donc de la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.

Autre preuve possible : une fois prouvé que $x^2+y^2-4x+4y-2=0$ est bien l'équation d'un cercle*, ce que nous avons fait au 1), prouvons que $\mathcal{C}$ et d n'ont qu'un seul point commun qui est A en résolvant le système :

* on peut aussi admettre une formulation de l'énoncé

$$(S)\begin{cases} x^2+y^2-4x+4y-2=0 & \leftarrow \text{équation de } \mathcal{C} \\ x+3y-6=0 & \leftarrow \text{équation de d} \end{cases}$$

Équation de d $\iff \boxed{x=-3y+6}$

Remplaçons x par son expression en fonction de y dans l'équation de $\mathcal{C}$:

$(-3y+6)^2+y^2-4(-3y+6)+4y-2=0 \quad (E)$

(E) $\iff 9y^2-36y+36+y^2+12y-24+4y-2=0$

(E) $\iff 10y^2-20y+10=0$

(E) $\iff y^2-2y+1=0$

Suite de l'exercice 19, question 3.

$(E) \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y-1=0 \Leftrightarrow \boxed{y=1}$

Pour trouver x, je reprends son expression $\boxed{x=-3y+6}$ et j'y remplace y par 1 : $x = -3\times 1 + 6 = -3+6$

$\boxed{x=3}$

Le système S formé par les équations du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite d a donc un unique couple solution : $(3;1)$.
Il s'agit des coordonnées du point A.
Cela nous prouve que <u>d est la tangente à $\mathscr{C}$ en A</u>.

4) Pour savoir si la tangente à $\mathscr{C}$ en B est parallèle à d, on pourrait en calculer une équation en considérant qu'il s'agit de l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\vec{IB}\cdot\vec{BM}=0$, puis comparer son équation avec celle de d.

Mais, je trouve plus rapide de prouver que I est le milieu de [AB] : (Ce qu'on conjecture d'après la figure)
$I(2;-2)$ et le milieu de [AB] a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{3+1}{2};\frac{1+(-5)}{2}\right) = (2;-2)$$

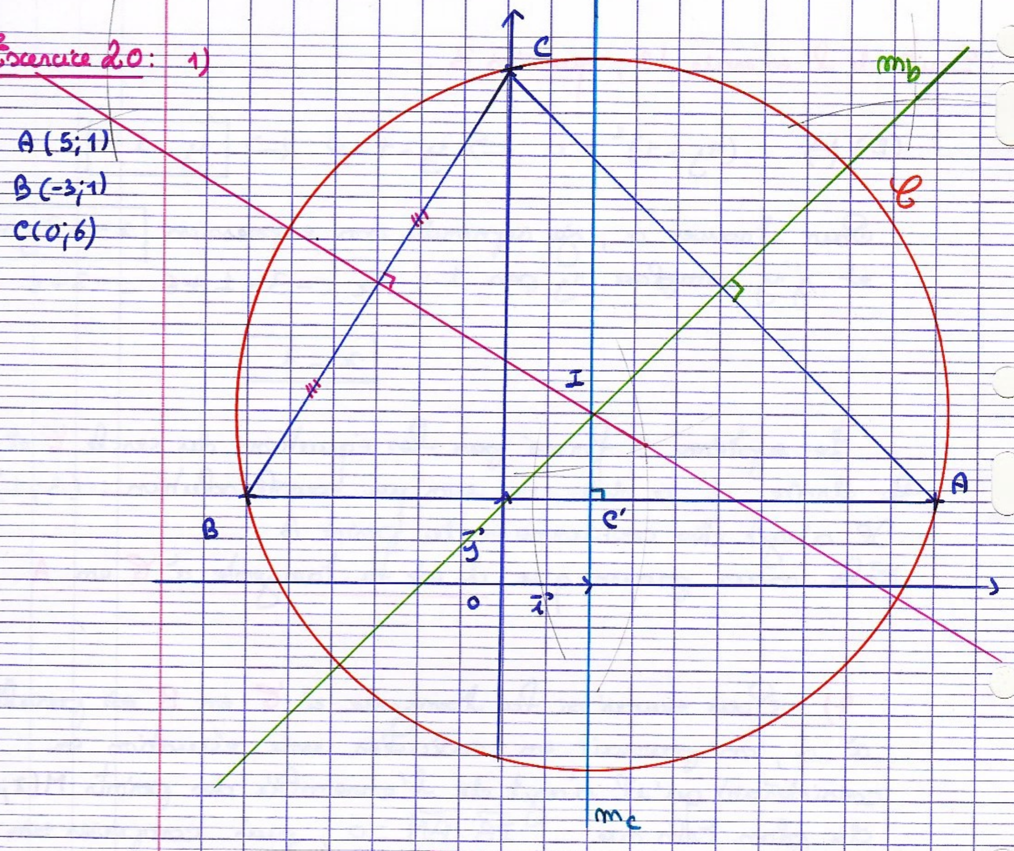
donc I est le milieu de [AB]. A, I et B sont alignés. [AB] est donc un diamètre de $\mathscr{C}$. Les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et en B sont donc parallèles puisque toutes deux perpendiculaires à $(AB) = (IA) = (IB)$.

<u>La tangente à $\mathscr{C}$ en B est donc bien parallèle à d.</u>

C.Q.F.D

Exercice 20 : 1)

A(5;1)
B(-3;1)
C(0;6)



Partie A.

2) Cherchons une équation de m_c, la médiatrice de [AB].

Méthode 1 : <u>La médiatrice est l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment.</u>

m_c est donc l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $MA = MB$ ou encore $MA^2 = MB^2$

Soient $M(x;y)$, $A(5;1)$ et $B(-3;1)$.

Suite de l'exercice 20 question 2 :

$MA^2 = MB^2 \iff (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 = (x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2$

$\iff (5 - x)^2 + \cancel{(1-y)^2} = (-3-x)^2 + \cancel{(1-y)^2}$

$\iff 25 - 10x + \cancel{x^2} = 9 + 6x + \cancel{x^2}$

$\iff -16x = -16$

$\iff \boxed{x = 1}$ Équation de la médiatrice de [AB]

Méthode 2 : La médiatrice d'un segment est la droite qui lui est perpendiculaire et qui passe par son milieu.

m_c est donc l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\vec{MC'} \cdot \vec{AB} = 0$, où C' est le milieu de [AB]

Calculons les coordonnées du milieu C' de [AB] :

$C'\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ $C'\left(\frac{5+(-3)}{2} ; \frac{1+1}{2}\right)$

$\boxed{C'(1;1)}$

$\vec{MC'}(x_{C'} - x_M ; y_{C'} - y_M)$ $\boxed{\vec{MC'}(1-x ; 1-y)}$

$\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ $\vec{AB}(-3-5 ; 1-1)$ $\boxed{\vec{AB}(-8;0)}$

$\vec{MC'} \cdot \vec{AB} = 0 \iff (1-x)\times(-8) + (1-y)\times 0 = 0$

$\iff (1-x)\times(-8) = 0$

$\iff 1 - x = 0$ $:(-8)$

$\iff \boxed{1 = x}$

équation de m_c

Cherchons maintenant une équation de m_b, la médiatrice de [AC]

Méthode 1 : m_b est l'ensemble des points équidistants de A et de C.

Soit $M(x;y)$ un point du plan. $M \in m_b \iff MA = MC \iff MA^2 = MC^2$

$MA^2 = (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2$

$MC^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = x^2 + (y-6)^2$

$MA^2 = MC^2 \iff (x-5)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y-6)^2$

$\iff \cancel{x^2} - 10x + 25 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 12y + 36$

$\iff -10x - 2y + 26 = -12y + 36$

$\iff -10x + 10y - 10 = 0$

$\iff \boxed{x - y + 1 = 0}$ $:(-10)$

équation cartésienne de m_b

$\iff \boxed{x + 1 = y}$ $+y$ équation réduite de m_b

Suite de l'exercice 20 - Partie A.

3) I est le point de concours des médiatrices des côtés du triangle ABC. Il est donc le point d'intersection de m_c, la médiatrice de [AC], et de m_b, la médiatrice de [AB]

m_c a pour équation $x = 1$, donc l'abscisse de I est 1.
m_b a pour équation $y = x + 1$, donc l'ordonnée de I est : $y_I = x_I + 1 = 1 + 1 = 2$

Les coordonnées de I sont $\boxed{(1;2)}$

4) $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan situés à la même distance de son centre I que A, B, ou C.

On a donc le choix entre A, B et C pour le calcul. Je choisis C :

$\mathscr{C}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $IC = IM$ ou encore $IC^2 = IM^2$

$\boxed{IC^2} = (x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2 = (0-1)^2 + (6-2)^2$
$= 1 + 16 = \boxed{17}$

$\boxed{IM^2} = (x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2 = \boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2}$

$\boxed{IC^2} = \boxed{IM^2} \iff \boxed{\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \boxed{17}}$ une équation de $\mathscr{C}$

$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 17$

$\iff \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0}$ une autre équation de $\mathscr{C}$

Partie B

5) $\mathscr{C}$ a une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Remarque : si ce que l'on a calculé à la partie A est correct, on devrait trouver : $a = -2$, $b = -4$ et $c = -12$

* $A(5;1) \in \mathscr{C}$ donc $x_A^2 + y_A^2 + a x_A + b y_A + c = 0$

soit $5^2 + 1^2 + 5a + b + c = 0$

soit $5a + b + c = -26$ (1)

* $B(-3;1) \in \mathscr{C}$ donc $x_B^2 + y_B^2 + a x_B + b y_B + c = 0$

soit $(-3)^2 + 1^2 - 3a + b + c = 0$

soit $-3a + b + c = -10$ (2)

* $C(0;6) \in \mathscr{C}$ donc $x_C^2 + y_C^2 + a x_C + b y_C + c = 0$

soit $0^2 + 6^2 + 0 + 6b + c = 0$

soit $6b + c = -36$ (3)

6) Soustrayons (2) à (1) :

$5a + b + c = -26$ (1)
$-(-3a + b + c = -10)$ (2)
$8a = -16$ (1)-(2)

soit $\boxed{a = -2}$

7) On sait que $-3a + b + c = -10$ (2)

soit, comme $a = -2$, que $6 + b + c = -10$

soit $b + c = -16$ (2')

Suite de l'exercice 20, partie B, question 7.

On résout donc le système (S) $\begin{cases} b + c = -16 & (2') \\ 6b + c = -36 & (3) \end{cases}$

(S) $\iff \begin{cases} 5b = -20 & \leftarrow (2') - (3) \\ 6b + c = -36 & \leftarrow (3) \end{cases}$ (S) $\iff \begin{cases} \boxed{b = \boxed{-4}} \\ 6 \times \boxed{(-4)} + c = -36 & (3') \end{cases}$

(3') $\iff -24 + c = -36 \iff \boxed{c = -12}$

On a trouvé : $\boxed{a = -2}$ $\boxed{b = -4}$ et $\boxed{c = -12}$

8) $\mathcal{C}$ a donc pour équation : $\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0}$

C'est bien ce que nous avons trouvé à la partie A.

9) On calcule : $x_A^2 + y_A^2 - 2x_A - 4y_A - 12 = 5^2 + 1^2 - 2\times5 - 4\times1 - 12$
$= 25 + 1 - 10 - 4 - 12$
$= 26 \quad - 26$
$= 0$

→ Les coordonnées de A vérifient bien l'équation trouvée pour $\mathcal{C}$.

$x_B^2 + y_B^2 - 2x_B - 2y_B - 12 = (-3)^2 + 1^2 - 2\times(-3) - 2\times1 - 12$
$= 9 + 1 + 6 - 2 - 12$
$= 16 \quad - 16$
$= 0$

→ Les coordonnées de B vérifient bien l'équation trouvée pour $\mathcal{C}$.

$x_C^2 + y_C^2 - 2x_C - 4y_C - 12 = 0^2 + 6^2 - 2\times0 - 4\times6 - 12$
$= 36 \quad - 24 - 12$
$= 36 \quad - 36$
$= 0$

→ Les coordonnées de C vérifient bien l'équation trouvée pour $\mathcal{C}$.

10) Trouvons les coordonnées du centre de $\mathcal{C}$ ainsi que son rayon à partir de son équation :

(E) $\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0}$

(E) $\iff \underbrace{x^2 - 2x + 1}\, + \underbrace{y^2 - 4y + 4}\, \underbrace{-12 - 1 - 4}_{\times(-1)} = 0$

(E) $\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$

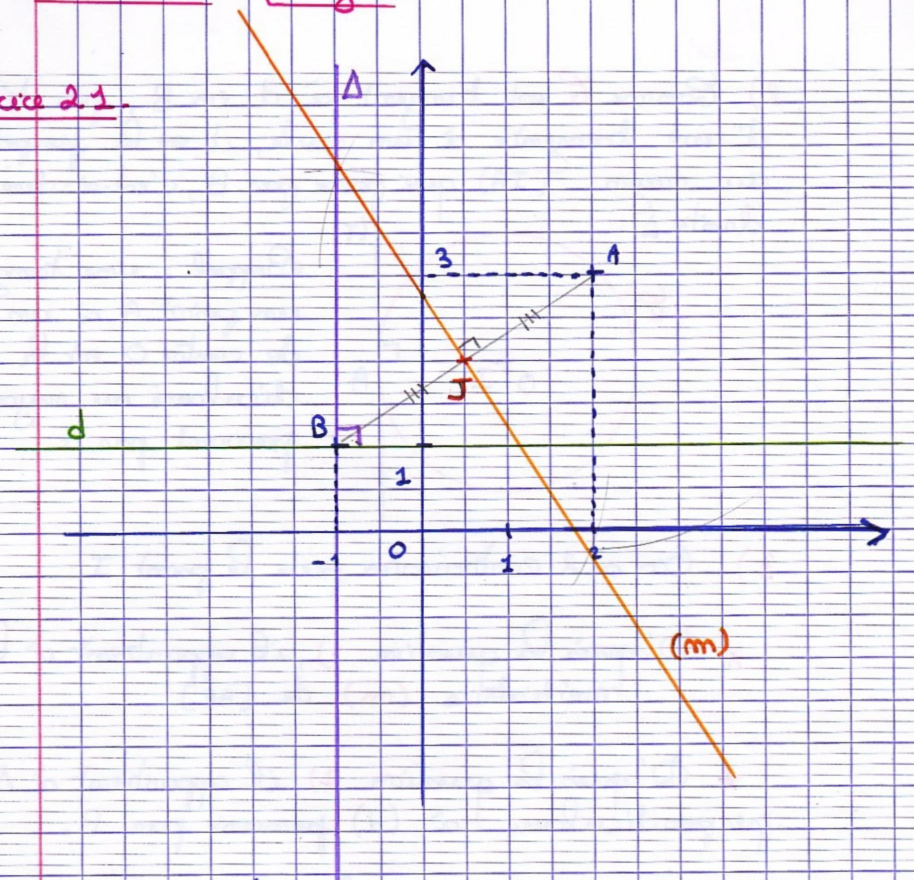
L'équation est de la forme : $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2$

avec $x_I = 1$, $y_I = 2$ et $R = \sqrt{17}$

Le cercle $\mathcal{C}$ a donc pour $\boxed{\text{centre } I(1;2)}$

et pour $\boxed{\text{rayon } \sqrt{17}}$.

Exercice 21.



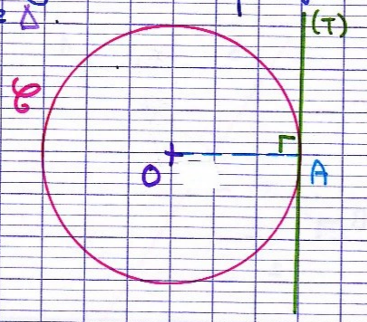
1) On recherche un cercle $\mathscr{C}$ de centre I.

* passant par A (2;3)
* tangent en B (-1;1) à d d'équation $y=1$

→ $\mathscr{C}$ passe donc par A et par B.
Tous les points d'un cercle sont équidistants de son centre. A et B sont donc équidistants de I.

Or l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est la médiatrice de ce segment. Le centre I du cercle $\mathscr{C}$ se situe donc sur la médiatrice du segment [AB] que je nomme (m).

2) Comme $\mathscr{C}$ est tangent à d en B, par définition d'une tangente à un cercle, d est la perpendiculaire au rayon (IB) qui passe par B, c'est-à-dire la droite Δ.



Rappel : une tangente en un point A à un cercle de centre O est la perpendiculaire au rayon (OA) passant par A.

3) On a 2 contraintes pour le point I :

* D'après la question 1), il appartient à la médiatrice (m) de [AB]
* D'après la question 2), il appartient à Δ, la perpendiculaire à (d) passant par B.

Pour qu'il existe, il faut et il suffit que (m) et Δ aient des points en commun.

Or, dans notre repère, Δ est parallèle à l'axe des ordonnées, puisque le repère est orthonormé et que Δ est perpendiculaire à (d) qui est parallèle à l'axe des abscisses par hypothèse.

D'autre part (m) est perpendiculaire à (AB) car elle est la médiatrice du segment [AB]. (AB) n'est pas parallèle à l'un des axes du repère puisque A et B n'ont ni la même abscisse, ni la même ordonnée :

A(2;3) B(-1;1) $2 \neq -1$ et $3 \neq 1$

Suite de l'exercice 21, question 3.

(m) n'est donc pas non plus parallèle à l'un des 2 axes. Elle est donc sécante avec chacun des 2 axes, et avec toute parallèle à l'un des 2 axes. Elle est donc sécante avec Δ en particulier.

Δ et (m) ont donc un unique point commun, qui est leur point d'intersection. Si le centre I de $\mathcal{C}$ existe, il est donc ce point d'intersection.

Remarque : je prouve ici l'existence et l'unicité d'un point commun à Δ et à (m). Mais ce point est-il nécessairement le centre du cercle $\mathcal{C}$ et cela prouve-t-il l'existence de $\mathcal{C}$? Non, on n'aura prouvé son existence qu'après avoir calculé l'une de ses équations, prouvé qu'il s'agit de l'équation d'un cercle et que ce cercle satisfait bien aux contraintes. Je trouve donc qu'il y a un problème dans la question 3), dans son énoncé.

4) Cherchons une équation de (m), la médiatrice de [AB].

Méthode 1 : (m) est l'ensemble des points $M(x;y)$ équidistants de A et de B.

$MA = MB \iff MA^2 = MB^2 \iff (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 = (x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2$

$\iff (2-x)^2 + (3-y)^2 = (-1-x)^2 + (1-y)^2$

$\iff 4 - 4x + \cancel{x^2} + 9 - 6y + \cancel{y^2} = 1 + 2x + \cancel{x^2} + 1 - 2y + \cancel{y^2}$

$\iff -6x - 4y + 11 = 0$

$\iff \boxed{6x + 4y - 11 = 0}$ équation cartésienne de (m)

Pour trouver l'équation réduite de (m) – ce que j'aime bien faire pour vérifier sur le graphique si j'ai bien le bon coefficient directeur et la bonne ordonnée à l'origine –, on peut continuer à calculer :

$MA = MB \iff 4y = -6x + 11$

$\iff y = -\frac{6}{4}x + \frac{11}{4}$

$\iff \boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{4}}$ équation réduite de (m)

Le coefficient directeur de (m) est donc : $-\frac{3}{2} = -1{,}5$

Et son ordonnée à l'origine est $\frac{11}{4} = 2{,}75$ ok avec le graphique.

Méthode 2 : (m) est la perpendiculaire à (AB) qui passe par le milieu de [AB].

Soit J le milieu de [AB]

$J\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ $J\left(\frac{2+(-1)}{2} ; \frac{3+1}{2}\right)$ $J\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$

La médiatrice (m) de [AB] est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{MJ}\left(x_J - x_M ; y_J - y_M\right)$ $\overrightarrow{MJ}\left(\frac{1}{2} - x ; 2 - y\right)$

$\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A ; y_B - y_A\right)$ $\overrightarrow{AB}(-1-2 ; 1-3)$ $\overrightarrow{AB}(-3 ; -2)$

$\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff \left(\frac{1}{2} - x\right) \times (-3) + (2-y) \times (-2) = 0$

$\iff -\frac{3}{2} + 3x - 4 + 2y = 0$

Suite de l'exercice 21, question 4)

$\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff 3x + 2y - \frac{3}{2} - \frac{8}{2} = 0$

$\iff 3x + 2y - \frac{11}{2} = 0$

$\overset{\times 2}{\iff} \boxed{6x + 4y - 11 = 0}$

équation cartésienne de la médiatrice (m) de [AB].

5) Δ a pour équation $\boxed{x = -1}$ car c'est la parallèle à l'axe des ordonnées qui passe par $B(-1;1)$

$x_B = -1$

Le point I, intersection de (m) et de Δ, sera donc tel que $\begin{cases} x_I = -1 & \text{équation de } \Delta \\ 6x_I + 4y_I - 11 = 0 & \text{équation de (m)} \end{cases}$

On aura donc : $6 \times (-1) + 4y_I - 11 = 0$

soit $-6 + 4y - 11 = 0 \iff 4y = 17 \iff y = \frac{17}{4}$ ou 4,25

On a donc $\boxed{I\left(-1; \frac{17}{4}\right)}$

Cherchons maintenant une équation du cercle de centre I passant par A. Je nomme provisoirement ce cercle $\mathscr{C}'$ car je n'ai pas encore prouvé qu'il s'agit de $\mathscr{C}$.

Calculons $IA^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2$

$= (2+1)^2 + \left(3 - \frac{17}{4}\right)^2$

$IA^2 = 3^2 + \left(\frac{12}{4} - \frac{17}{4}\right)^2$

$= 9 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2$

$= \frac{9 \times 16}{1 \times 16} + \frac{25}{16}$

$= \frac{144}{16} + \frac{25}{16}$

$= \frac{169}{16}$ donc $IA = \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{16}} = \frac{13}{4}$

Une équation de $\mathscr{C}'$ est donc : $(x+1)^2 + \left(y - \frac{17}{4}\right)^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2$

$\mathscr{C}'$ est donc le cercle de centre $I\left(-1; \frac{17}{4}\right)$ et de rayon $\frac{13}{4}$.

Pour vérifier qu'il s'agit de $\mathscr{C}$: je vérifie :

* Que $IB = \frac{13}{4}$. En effet $IB^2 = (x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2$

$= (-1-(-1))^2 + \left(1 - \frac{17}{4}\right)^2$

$= 0 + \left(\frac{4}{4} - \frac{17}{4}\right)^2$

$= \left(-\frac{13}{4}\right)^2$

$= \frac{169}{16}$

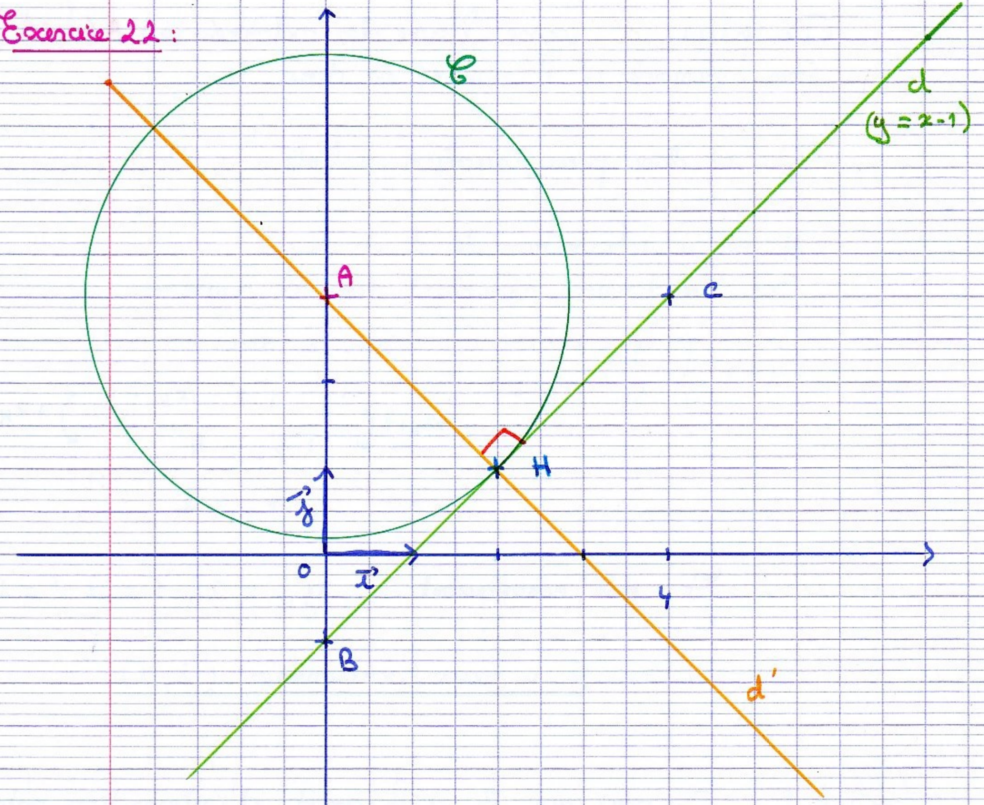
Donc $IB = \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{13}{4}$

* Que (IB) est bien perpendiculaire à (d) :

$x_B = x_I = -1$ et $y_B \neq y_I$

donc (IB) a pour équation $x = -1$. Il s'agit de Δ dont on a vu qu'elle est bien perpendiculaire à (d) puisqu'il s'agit de la perpendiculaire à (d) passant par B. → Là, on a prouvé l'existence de $\mathscr{C}$ et de son centre I.

Exercice 22 :



1) On sait que d est la tangente en H au cercle $\mathscr{C}$ de centre A. (AH) est donc perpendiculaire à d.
Pour placer H, je trace d', la perpendiculaire à d passant par A. H est le point d'intersection de d et d'.

2) **Méthode 1** : Dans un repère orthonormé, si deux droites sont perpendiculaires entre elles et pas parallèles aux axes, le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1.

On sait que d a pour équation réduite $y = 1x - 1$
Donc son coefficient directeur est 1.
Celui de d', qui lui est perpendiculaire, sera donc -1.

De plus, d' coupe l'axe des ordonnées en $A(0;3)$.
Son ordonnée à l'origine est donc 3.

d' a donc pour équation réduite $y = -x + 3$.

H est l'intersection de d et de d'.
Ses coordonnées vérifient donc le système :

$$(S) \begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

On a donc :

$x_H - 1 = -x_H + 3$ $\quad +x_H+1$

soit $2x_H = 4$ $\quad :2$

soit $x_H = 2$

Et par conséquent : $y_H = x_H - 1 = 2 - 1 = 1$

Donc H a pour coordonnées $(2;1)$.

Méthode 2 : Je sais que B est le point d'intersection entre d d'équation $y = x - 1$ et l'axe des ordonnées.

ordonnée à l'origine de d $= -1$

J'en déduis que $B(0;-1)$

Pour mes futurs calculs, j'ai besoin d'un autre point de d. Je choisis C d'abscisse $x_C = 4$.

$C \in d$ donc
$$\begin{aligned} y_C &= x_C - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc $C(4;3)$

Suite de l'exercice 22 : Suite de la question 2.

Je cherche les coordonnées du point H tel que
* $(AH) \perp (BC) \iff \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$
* $H \in d$ d'équation $y = x - 1$ donc $y_H = x_H - 1$.

$\vec{AH}\begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix}$ $\vec{AH}\begin{pmatrix} x_H - 0 \\ x_H - 1 - 3 \end{pmatrix}$ $\vec{AH}\begin{pmatrix} x_H \\ x_H - 4 \end{pmatrix}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 &\iff 4x_H + 4(x_H - 4) = 0 \\ &\iff 4x_H + 4x_H - 16 = 0 \\ &\iff 8x_H - 16 = 0 \\ &\iff 8x_H = 16 \\ &\iff x_H = 2 \end{aligned}$$

D'où $y_H = x_H - 1 = 2 - 1 = 1$.

Les coordonnées de H sont donc $(2;1)$

3) $$\begin{aligned} AH &= \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 4} \\ &= \sqrt{8} \\ &= \sqrt{4 \times 2} \end{aligned}$$

$\boxed{AH = 2\sqrt{2}}$

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $AM = AH$.

$$\begin{aligned} AM = AH &\iff AM^2 = AH^2 \\ &\iff (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = AH^2 \\ &\iff (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 8 \\ &\iff \boxed{x^2 + (y-3)^2 = 8} \end{aligned}$$

une équation de $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} &\iff x^2 + y^2 - 6y + 9 = 8 \\ &\iff \boxed{x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0} \end{aligned}$$

une autre équation de $\mathcal{C}$.

Exercice 23.

1) $\mathcal{C}$ a pour équation (E) $x^2 + y^2 + x - 4y - 12 = 0$

$$(E) \iff \underbrace{x^2 + 2 \times \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4}} + \underbrace{y^2 - 4y + 4} - 12 - \tfrac{1}{4} - 4 = 0$$

$$(E) \iff \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 16 + \tfrac{1}{4}$$

$$(E) \iff \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \tfrac{64}{4} + \tfrac{1}{4}$$

$$(E) \iff \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \tfrac{65}{4}$$

$\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre $I\left(-\tfrac{1}{2};1\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ → ce n'est pas évident de trouver comment construire précisément cette longueur !

On ne va pas la construire mais trouver un (ou des) points appartenant à $\mathcal{C}$: justement les points A, B, C, D suggérés par l'énoncé.

Suite de l'exercice 23. Question 1.

A et B sont les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Donc $y_A = y_B = 0$.

Pour trouver leurs abscisses, nous résolvons l'équation:

$$x^2 + 0^2 + x - 2\times 0 - 12 = 0 \quad (E_1)$$

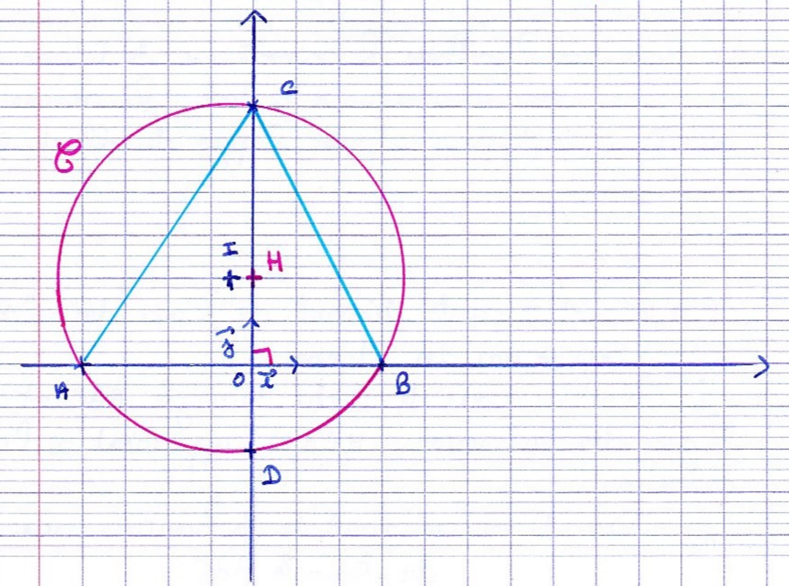
$(E_1) \iff x^2 + x - 12 = 0$ $\qquad \Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-12) = 1 + 48 = 49 = 7^2$

Les racines du trinôme sont donc:

$x_1 = \dfrac{-1-7}{2} = -4 \rightarrow$ abscisse de A

$x_2 = \dfrac{-1+7}{2} = 3 \rightarrow$ abscisse de B

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2} ; 2\right)$ passant par $A\binom{-4}{0}$



2) On a vu au 1) que $\boxed{A(-4;0)}$ et $\boxed{B(3;0)}$

Pour trouver les coordonnées des points C et D, intersections du cercle $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées, on remplace x par 0 dans l'équation de $\mathscr{C}$:

$$0^2 + y^2 + 0 - 4y - 12 = 0 \quad (E_2)$$

$(E_2) \iff y^2 - 4y - 12 = 0$ $\qquad \Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times(-12) = 16 + 48 = 64 = 8^2$

Les racines du trinôme sont:

$y_1 = \dfrac{-(-4)-8}{2\times 1} = \dfrac{4-8}{2} = -2 \rightarrow$ ordonnée de D

$y_2 = \dfrac{-(-4)+8}{2\times 1} = \dfrac{4+8}{2} = 6 \rightarrow$ ordonnée de C.

Donc $\boxed{C(0;6)}$ et $\boxed{D(0;-2)}$

3) H est par hypothèse le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Il a donc : la même abscisse que D : 0, et pour ordonnée, l'opposé de celle de D : 2.

$\boxed{H(0;2)}$

A et B sont 2 points distincts de l'axe des abscisses.
C est sur l'axe des ordonnées.
La hauteur issue de C du triangle ABC est donc l'axe des ordonnées. H(0;2) appartient à l'axe des ordonnées.

→ Donc H est un point de la hauteur issue de C du triangle ABC.

Corrigés

Suite de l'exercice 23, question 3.

Montrons maintenant que H est aussi sur la hauteur issue de B du triangle ABC. Il nous suffit pour cela de montrer que $(BH) \perp (AC)$

$\vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ 6-0 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{BH} \begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \end{pmatrix}$ $\vec{BH} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-0 \end{pmatrix}$ $\vec{BH} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{BH} \cdot \vec{AC} = -3 \times 4 + 2 \times 6 = 12 - 12 = 0$

$\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0$ et $\vec{BH} \neq \vec{0}$ et $\vec{AC} \neq 0$ donc $(BH) \perp (AC)$.

→ H est donc sur la hauteur issue de B du triangle ABC

H appartient à 2 des hauteurs du triangle ABC.
Il est donc son orthocentre. C.Q.F.D.

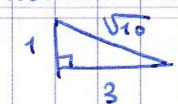
Exercice 24 - Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ a pour équation $\boxed{(E)\ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0}$

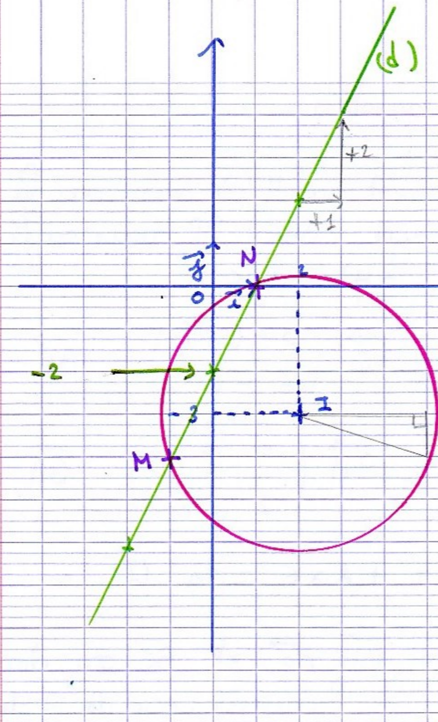
$(E) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + 3 - 4 - 9 = 0$

$(E) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$

$\mathscr{C}$ a donc pour centre $I(2;-3)$ et pour rayon $\sqrt{10}$

On peut construire $\sqrt{10}$ grâce au théorème de Pythagore car 10 est la somme de 2 carrés parfaits : $1 + 9 = 10$





Pour construire (d), j'utilise le fait que son ordonnée à l'origine est -2 et son coefficient directeur 2.

$y = 2x - 2$ (coef. dir. : 2 ; ord. orig. : -2)

2) a) M et N appartiennent à $\mathscr{C}$
→ leurs coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{C}$:
$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$

M et N appartiennent à d :
→ leurs coordonnées vérifient l'équation de d : $y = 2x - 2$

C'est pourquoi les coordonnées de M et de N vérifient :

$$(S) \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0 \end{cases}$$

b)
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x^2 + (2x-2)^2 - 4x + 6x(2x-2) + 3 = 0 \end{cases}$$

(par substitution)

Suite de l'exercice 24, question 2b

$$(S) \iff \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x^2 + 4x^2 - 2\times2x\times2 + 4 - 4x + 12x - 12 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 5x^2 - \cancel{8x} + 4 - \cancel{4x} + \cancel{12x} - 9 = 0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 5x^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

C.Q.F.D

c) $5x^2 - 5 = 0 \iff 5x^2 = 5 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$

$x = 1$: abscisse de N ; $x = -1$: abscisse de M

$y_M = 2x_M - 2 = 2\times(-1) - 2 = -4$ donc $\boxed{M(-1;-4)}$

$y_N = 2x_N - 2 = 2\times 1 - 2 = 0$ donc $\boxed{N(1;0)}$

Exercice 25. 1) L'équation $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 20$
est de la forme $(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 = R^2$
avec : $x_I = 6$; $y_I = 3$ et $R = \sqrt{20} = \sqrt{4\times5} = 2\sqrt{5}$

$\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre $I(6;3)$ et de rayon $2\sqrt{5}$.

L'équation $x^2 + y^2 = 5$ est de la forme $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R_2^2$

avec $x_0 = 0$; $y_0 = 0$ et $R_2 = \sqrt{5}$

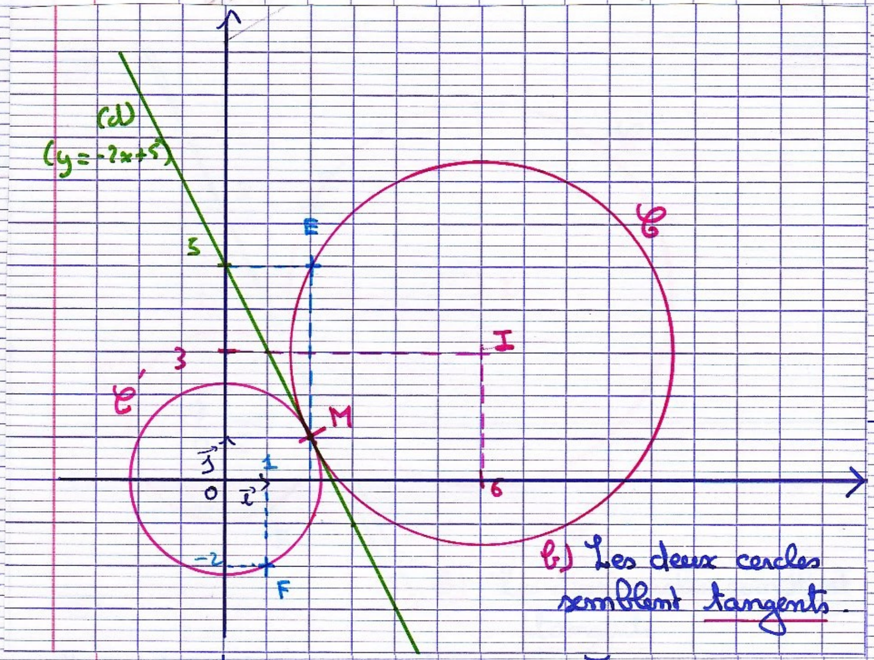
$\mathcal{C}'$ est donc le cercle de centre O, origine du repère orthonormé, et de rayon $\sqrt{5}$.

2) a) $E(2;5)$ $(2-6)^2 + (5-3)^2 = (-4)^2 + 2^2$
$= 16 + 4$
$= 20$

→ Les coordonnées de E vérifient l'équation de $\mathcal{C}$
donc $E \in \mathcal{C}$.

$F(1;-2)$ $1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$

→ Les coordonnées de F vérifient l'équation de $\mathcal{C}'$
donc $F \in \mathcal{C}'$.



b) Les deux cercles semblent tangents.

3) a) Si $M(x;y)$ appartient à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$, alors ses coordonnées vérifient les équations de ces 2 cercles, c'est-à-dire le système :

$$(S) \begin{cases} (x-6)^2 + (y-3)^2 = 20 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Suite de l'exercice 25. Question 3 a)

$$(S) \iff \begin{cases} (x-6)^2+(y-3)^2-20=0 \\ x^2+y^2-5=0 \end{cases}$$

alors (ici, on passe de l'équivalence à l'implication)

$$(S) \Rightarrow (x-6)^2+(y-3)^2-20 = x^2+y^2-5 \quad (E)$$

$$(E) \iff \cancel{x^2}-12x+36+\cancel{y^2}-6y+9-20 = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-5$$

$$(E) \iff -12x-6y+30=0$$

$$(E) \iff 2x+y-5=0 \quad :(-6)$$

C.Q.F.D

b) $(E) \iff y=-2x+5$

Ceci est l'équation d'une droite (d) que je trace sur la figure. On sait que l'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$ est incluse dans (d), mais pour la déterminer précisément, revenons au système (S) ci-dessus :

$$(S) \iff \underbrace{(x-6)^2+(y-3)^2-20 = x^2+y^2-5}_{\text{équivaut à } y=-2x+5} = 0$$

pour avoir équivalence, il faut garder l'une des égalités avec le 0

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2+y^2-5=0 \end{cases}$$

Je résous par substitution en remplaçant y par $-2x+5$ dans la 2ème équation.

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2+(-2x+5)^2-5=0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2+4x^2-20x+25-5=0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2x+5 \\ 5x^2-20x+20=0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2-4x+4=0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2x+5 \\ (x-2)^2=0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2x+5 \\ x-2=0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2x+5 \\ x=2 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y=-2\times 2+5 \\ x=2 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

L'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$ est le point $M(2;1)$.

c) Il semble que la droite (d) d'équation $2x+y-5=0$ soit la tangente commune à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{C}'$.

On sait que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents en $M(2;1)$, car M est leur unique point commun.
Donc $M \in (OI)$, O et I étant les centres des 2 cercles. Pour prouver que (d) est bien leur tangente commune, il suffit de prouver que (d) est la perpendiculaire à (OI) passant par M.

Corrigés

Appelons (d') la perpendiculaire à (OI) passant par M (2 ; 1)

Un point P(x ; y) appartiendra à (d') si et seulement si : $\vec{OI} . \vec{MP} = 0$

$\vec{OI} \begin{pmatrix} x_I - x_0 \\ y_I - y_0 \end{pmatrix}$ $\vec{OI} \begin{pmatrix} 6-0 \\ 3-0 \end{pmatrix}$ $\vec{OI} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{MP} \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix}$ $\vec{MP} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$

$\vec{OI} . \vec{MP} = 0 \iff 6\,x(x-2) + 3\,(y-1) = 0$

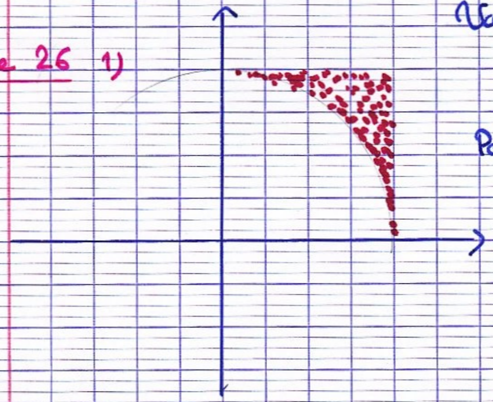
$\iff 6x - 12 + 3y - 3 = 0$

$\iff 6x + 3y - 15 = 0$

$\iff 2x + y - 5 = 0$ (:3)

Il s'agit bien de (d). (d) est donc la tangente commune à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Exercice 26 1)

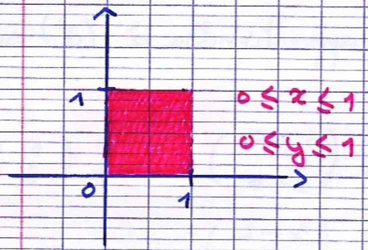


Variables : x, y et i sont des nombres

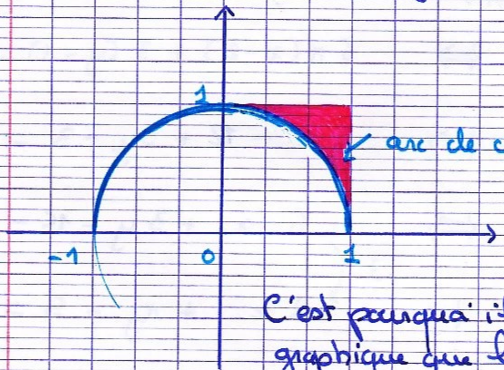
Pour i allant de 0 à 999
 affecter à x : random()*
 affecter à y : random()
 Si $y > \sqrt{1-x^2}$ alors
 tracer le point de coordonnées (x, y)

* nombre aléatoire entre 0 et 1

2) Sans la condition $y > \sqrt{1-x^2}$, le programme remplirait de points le carré :



Mais on demande de ne tracer le point que si $y > \sqrt{1-x^2}$, c'est-à-dire que s'il se trouve au-dessus de l'arc de cercle d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$



C'est pourquoi il n'apparait sur le graphique que les points du carré $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le 1$ situés au-dessus de cet arc de cercle.

Précision :

Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation $x^2 + y^2 = 1$
soit $y^2 = 1 - x^2$

Pour $-1 \le x \le 1$,

$y^2 = 1 - x^2 \iff y = \sqrt{1-x^2}$ ou $y = -\sqrt{1-x^2}$

moitié supérieure du cercle — moitié inférieure du cercle.