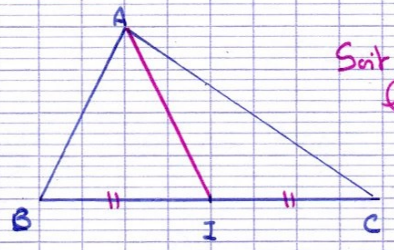
1ère S. " Produit Scalaire " - 6 exercices sur le théorème de la médiane. Corrigés

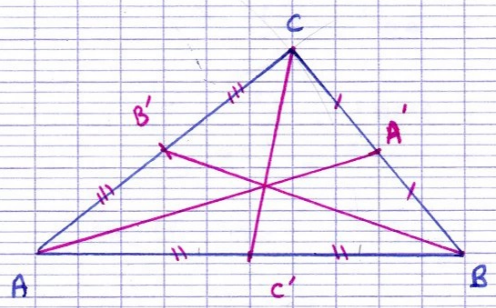
Rappel du théorème de la médiane :



Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC] :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Exercice 1.



AB = 8
AC = 6
BC = 5

Soient A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]

D'après le théorème de la médiane :

$$CA^2 + CB^2 = 2CC'^2 + \frac{AB^2}{2}$$

soit $6^2 + 5^2 = 2CC'^2 + \frac{8^2}{2}$

soit $36 + 25 = 2CC'^2 + 32$

soit $29 = 2CC'^2$

soit $CC' = \sqrt{\frac{29}{2}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{58}}{2}} \approx \boxed{3{,}80}$

$$AC^2 + AB^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$$

soit $6^2 + 8^2 = 2AA'^2 + \frac{5^2}{2}$

soit $36 + 64 = 2AA'^2 + \frac{25}{2}$

soit $\frac{200}{2} - \frac{25}{2} = 2AA'^2$

soit $\frac{175}{2} = 2AA'^2$ soit $AA'^2 = \frac{175}{4}$ donc $AA' = \sqrt{\frac{175}{4}}$

$AA' = \sqrt{\frac{7 \times 25}{4}} = \boxed{\frac{5\sqrt{7}}{2}} \approx 6{,}61$

$$BA^2 + BC^2 = 2BB'^2 + \frac{AC^2}{2}$$

soit $8^2 + 5^2 = 2BB'^2 + \frac{6^2}{2}$

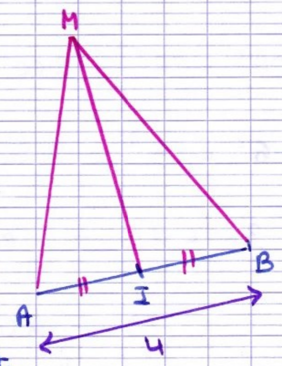
soit $64 + 25 = 2BB'^2 + 18$

soit $71 = 2BB'^2$ soit $\frac{71}{2} = BB'^2$

donc $BB' = \sqrt{\frac{71}{2}} = \frac{\sqrt{71} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{142}}{2}} \approx 5{,}96$

Exercice 2.

Soit I le milieu de [AB]. Pour tout point M du plan, d'après le théorème de la médiane, on a :



$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Et on cherche l'ensemble des points

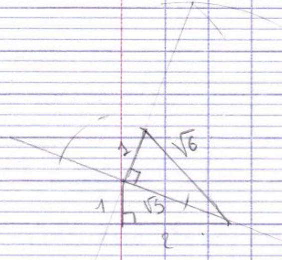
Suite de l'exercice 2 .... M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 20$, c'est-à-dire tels que :

$$2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \qquad \text{Or } AB = 4$$

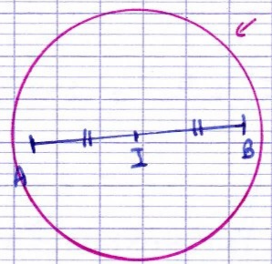
On cherche donc l'ensemble des points M du plan tels que

$$2MI^2 + \frac{4^2}{2} = 20 \iff 2MI^2 + \frac{16}{2} = 20$$
$$\iff 2MI^2 + 8 = 20$$
$$\iff 2MI^2 = 12$$
$$\iff MI^2 = 6$$
$$\iff MI = \sqrt{6}$$

→ Le lieu recherché est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.



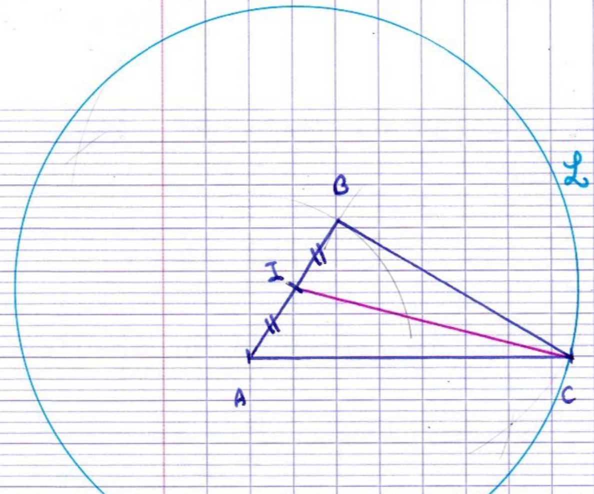
il s'agit de ce cercle.



Exercice 3. 1) D'après le théorème de la médiane :

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

soit $6^2 + 5^2 = 2CI^2 + \frac{3^2}{2}$ →



AB = 3
AC = 6
BC = 5

→ soit $36 + 25 = 2CI^2 + \frac{9}{2}$

soit $\frac{72}{2} + \frac{50}{2} - \frac{9}{2} = 2CI^2$

soit $\frac{113}{2} = 2CI^2$

soit $\frac{113}{4} = CI^2$ d'où $CI = \sqrt{\frac{113}{4}} = \frac{\sqrt{113}}{2}$

$\boxed{CI = \frac{\sqrt{113}}{2}}$ $\boxed{CI \approx 5{,}32}$

2) $2CI^2 + \frac{9}{2} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{113}}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$

$= 2 \times \frac{113}{4} + \frac{9}{2} = \frac{113}{2} + \frac{9}{2} = \frac{122}{2} = 61$

→ C fait partie de l'ensemble des points recherchés.

$\forall M \in \mathcal{P}$ on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{9}{2}$ puisque I est le milieu de [AB]
↑
plan,

L'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 61$ sera donc l'ensemble des points M du plan tels que $2MI^2 + \frac{9}{2} = 61$

Suite de l'exercice 3, ou encore tel que $2MI^2 + \frac{9}{2} = 2CI^2 + \frac{9}{2}$ (E)

$$(E) \iff MI^2 = CI^2$$

$$(E) \iff \boxed{MI = CI} \text{ car } MI \geq 0 \text{ et } CI \geq 0$$

il s'agit de l'ensemble des points M du plan situés à la même distance de I que C

→ donc du cercle de centre I passant par C.

$\mathcal{L}$ est le cercle de centre I passant par C.

Exercice 4. Remarque : on ne connaît pas les mesures du rectangle !

1) O est le centre du rectangle, donc le milieu de ses diagonales [AC] et [BD].

Dans le triangle MAC, d'après le théorème de la médiane, on a :

$$\boxed{MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + AC^2}$$

Et, dans le triangle MBD, on a :

$$\boxed{MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + BD^2}$$

Or AC = BD, car les diagonales d'un rectangle sont de même longueur

C'est pourquoi on a bien :

$$\boxed{MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2}$$

2) Donc $30^2 + 6^2 = 18^2 + MD^2$

soit $900 + 36 = 324 + MD^2$

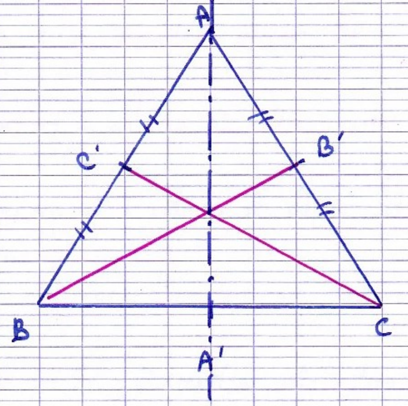
soit $612 = MD^2$

$MD = \sqrt{612} = \sqrt{6 \times 102} = \sqrt{6 \times 2 \times 51} = \sqrt{6 \times 2 \times 3 \times 17}$

$= \sqrt{6 \times 6 \times 17} = \sqrt{6^2} \times \sqrt{17}$ $\boxed{MD = 6\sqrt{17}}$

Exercice 5.

1)



ABC est isocèle en A

Sans calcul : (AA') est donc un axe de symétrie pour la figure.

C est le symétrique de B par rapport à (AA')
A est sur l'axe donc son propre symétrique.
Donc les segments [AB] et [AC] sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite (AA').
La symétrie conserve les milieux, donc le milieu C' de [AB] est le symétrique du milieu B' de [AC] selon la symétrie d'axe (AA').
Les segments [BB'] et [CC'] sont donc symétriques l'un de l'autre selon la symétrie d'axe (AA').
La symétrie axiale est une isométrie, donc elle conserve les longueurs. On a donc BB' = CC' C.Q.F.D

Avec calcul : D'après le théorème de la médiane, on a :

Suite de l'exercice 5. Question 1.

$$CA^2 + CB^2 = 2CC'^2 + \frac{AB^2}{2} \quad (1)$$

et (3) $\boxed{BA^2 + BC^2 = 2BB' + \frac{AC^2}{2}}$ soit $CA^2 + CB^2 = 2BB' + \frac{AB^2}{2}$ (2)

puisque $AB = AC$ comme le triangle ABC est isocèle en A.

(1) → $CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2} = 2CC'^2 \Leftrightarrow CC' = \sqrt{\frac{CA^2}{2} + \frac{CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}$

(2) → $CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2} = 2BB'^2 \Leftrightarrow BB' = \sqrt{\frac{CA^2}{2} + \frac{CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}$

On a bien $BB' = CC' = \sqrt{\frac{CA^2}{2} + \frac{CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}$

C.Q.F.D

2) a) La réciproque de la propriété énoncée à la question 1) serait :

" Si, dans un triangle ABC tel que B' est le milieu de [AC] et C' celui de [AB], on a $BB' = CC'$, alors le triangle ABC est isocèle en A.

b) (1) permet d'affirmer que $\boxed{CC' = \sqrt{\frac{CA^2}{2} + \frac{CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}}$

et (3) permet d'affirmer que $\boxed{BB' = \sqrt{\frac{BA^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}}}$

(Ces deux égalités avaient été établies avant de faire intervenir l'hypothèse que le triangle ABC était isocèle en A)

c) $BB' = CC' \Leftrightarrow \sqrt{\frac{BA^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{CA^2}{2} + \frac{CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{BA^2}{2} + \cancel{\frac{BC^2}{2}} - \frac{AC^2}{4} = \frac{CA^2}{2} + \cancel{\frac{CB^2}{2}} - \frac{AB^2}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{AB^2}{2} + \frac{AB^2}{4} = \frac{AC^2}{2} + \frac{AC^2}{4}$

$\Leftrightarrow AB^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = AC^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$:\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow AB^2 = AC^2$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} AB = AC$

(*) on a ces 2 équivalences car on travaille avec des nombres positifs.

ABC est donc un triangle isocèle en A.

3) Une propriété caractéristique est une propriété qui s'énonce avec une équivalence :

On a $\mathcal{A}$ si et seulement si on a $\mathcal{B}$

équivalence

Ici : ABC est un triangle isocèle en A si et seulement si ses médianes issues de B et de C sont de même longueur.

Exercice 6 : 1) $\forall M \in \mathcal{P}$ (le plan) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA})}_{\vec{0}} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

car I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\underbrace{\text{car } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}}_{0}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2}$ C.Q.F.D

2) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5 \iff MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 5$ (d'après la question 1)

$\iff MI^2 - \frac{1}{4}\times 2^2 = 5$ puisque $AB=2$ par hypothèse

$\iff MI^2 - 1 = 5$

$\iff MI^2 = 6$

$\iff \boxed{MI = \sqrt{6}}$ puisque $MI \geqslant 0$ car c'est une longueur.

3) Γ est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.