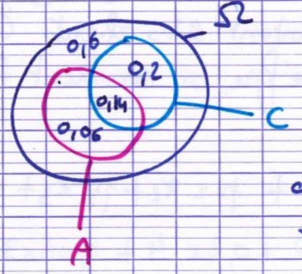
1ère S. Corrigé de la feuille d'exercices sur le chapitre : Probabilités - Variable aléatoire.

Exercice 1 :



$P(A) = 0,2$ et $P(A \cap C) = 0,14$

Donc $P(A \cap \bar{C}) = \underbrace{0,2 - 0,14}_{P(A) - P(A \cap C)} = 0,06$

$A \cap \bar{C}$ est l'événement : "Le client achète un appareil-photo mais pas de carte."

$P(C \cap \bar{A}) = \overbrace{0,34 - 0,14}^{P(C) - P(A \cap C)} = 0,2$

$C \cap \bar{A}$ est "le client achète une carte mémoire mais pas d'appareil-photo."

$P(A \cup C) = 0,06 + 0,14 + 0,2 = 0,4$

Donc $P(\overline{A \cup C}) = 1 - 0,4 = 0,6$

$A \cup C$ = "Le client achète au moins un appareil-photo ou une carte"

$\overline{A \cup C}$ = "Le client n'achète ni carte, ni appareil-photo".

1)

x_i	0 (x_1)	4 (x_2)	30 (x_3)	34 (x_4)
$P(X = x_i)$	$0,6$ (p_1)	$0,2$ (p_2)	$0,06$ (p_3)	$0,14$ (p_4)

Vérifions :

$0,6 + 0,2 + 0,06 + 0,14 = 1$

Probabilité pour que le client n'achète ni carte, ni appareil-photo

Probabilité pour que le client achète une carte mais pas d'appareil-photo

Probabilité pour que le client achète un appareil-photo mais pas de carte

Probabilité pour que le client achète une carte et un appareil-photo

2) a) $B = 225X - 250$

X est ce que rapporte un client (en €)

$225X$ ce que rapportent 225 clients (en €)

Pour calculer le bénéfice, on soustrait l'investissement de 250 €.

b) $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4$

$= 0,6 \times 0 + 0,2 \times 4 + 0,06 \times 30 + 0,14 \times 34$

$= 7,36$

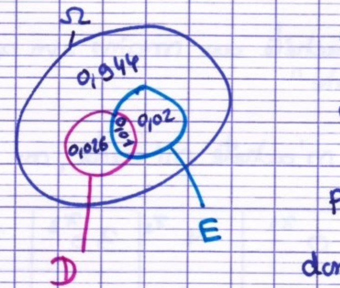
$E(B) = 225\,E(X) - 250$

$= 225 \times 7,36 - 250$

$= 1406$

Le commerçant peut espérer un bénéfice moyen de $\boxed{1406\ €}$

Exercice 2 :



$P(D) = \frac{18}{500} = \frac{36}{1000} = 0,036$

$P(E) = \frac{15}{500} = \frac{30}{1000} = 0,03$

$P(\overline{D \cup E}) = \frac{472}{1000} = 0,944$

donc $P(D \cup E) = 1 - 0,944 = 0,056$

On peut alors calculer $P(D \cap E)$ grâce à la formule :

$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E)$

$+P(D \cap E)$ $-P(D \cup E)$

$P(D \cap E) = P(D) + P(E) - P(D \cup E)$

$+P(D \cap E)$ $-P(D \cup E)$

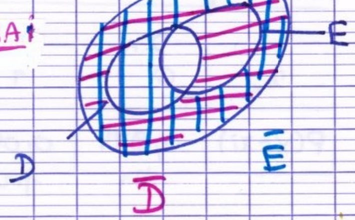
$= 0,036 + 0,03 - 0,056$

$= 0,01$

Donc $P(D \cap \bar{E}) = P(D) - P(D \cap E) = 0,036 - 0,01 = 0,026$

et $P(E \cap \bar{D}) = P(E) - P(D \cap E) = 0,03 - 0,01 = 0,02$

Suite de l'exercice 2. 1) a) VRAI



car $\overline{D} \cap \overline{E} = \overline{D \cup E}$

$P(\overline{D} \cap \overline{E}) = 0{,}944$

$\overline{D} \cap \overline{E}$ est bien l'ensemble des lentilles n'ayant ni défaut de diamètre, ni défaut d'épaisseur.

b) On a vu précédemment que $P(D \cup E) = 0{,}056$ → VRAI

$D \cup E$ est l'événement contraire de $\overline{D} \cap \overline{E}$

Donc $P(D \cup E) = 1 - P(\overline{D} \cap \overline{E}) = 1 - 0{,}944 = 0{,}056$

c) $D \cap \overline{E}$ = l'ensemble des lentilles ayant un défaut de diamètre, mais pas d'épaisseur. Dans notre premier diagramme, nous avions indiqué que $P(D \cap \overline{E}) = 0{,}026$, car $P(D \cap \overline{E}) = P(D) - P(D \cap E) = 0{,}036 - 0{,}01 = 0{,}026$

→ FAUX

2) a) FAUX X prend 3 valeurs : 0, 1 et 2.

b) $P(X=2) = P(D \cap E) = 0{,}01$ VRAI

c) $P(X=1)$ est la probabilité pour que la lentille choisie au hasard ait l'un des 2 défauts, mais pas les 2.

$P(X=1) = P(D) + P(E) - 2P(D \cap E)$

$= 0{,}036 + 0{,}03 - 2 \times 0{,}01 = 0{,}046$ → VRAI

On pourrait aussi calculer cette probabilité

→ en additionnant 0,026 et 0,02 sur le diagramme

→ en calculant $P(D \cup E) - P(D \cap E) = 0{,}056 - 0{,}01 = 0{,}046$

3) Loi de probabilité de X :

x_i	x_1 : 0	x_2 : 1	x_3 : 2
$P(X=x_i)$	0,944 (p_1)	0,046 (p_2)	0,010 (p_3)

On vérifie : $0{,}944 + 0{,}046 + 0{,}01 = 1{,}00$ ok

a) $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$

$= 0{,}944 \times 0 + 0{,}046 \times 1 + 0{,}010 \times 2$

$\boxed{E(X) = 0{,}066}$

Donc $E(500X - 33) = 500\,E(X) - 33$

$= 500 \times 0{,}066 - 33$

$E(500X - 33) = 0$ → VRAI

b) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ ← avec la formule du cours

$= p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 - 0{,}066^2$

$= 0{,}944 \times 0^2 + 0{,}046 \times 1^2 + 0{,}010 \times 2^2 - 0{,}066^2$

$= 0 + 0{,}046 + 0{,}04 - 0{,}004356$

$= 0{,}081644$

On peut aussi faire le calcul à partir de la définition :

$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2$

$= 0{,}944(0 - 0{,}066)^2 + 0{,}046(1 - 0{,}066)^2 + 0{,}01(2 - 0{,}066)^2$

$= 0{,}944 \times 0{,}066^2 + 0{,}046 \times 0{,}934^2 + 0{,}01 \times 1{,}934^2$

$= 0{,}944 \times 0{,}004356 + 0{,}046 \times 0{,}872356 + 0{,}01 \times 3{,}740356$

$= 0{,}004112064 + 0{,}040128376 + 0{,}03740356$

$= 0{,}081644$

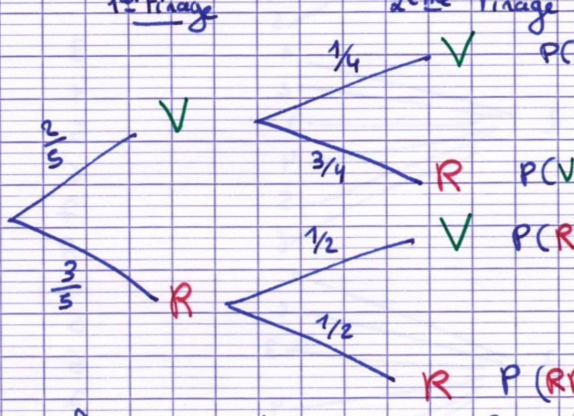
Suite et fin de l'exercice 2 : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 0,2857$

Donc il est FAUX que $\sigma(x) < 0,1$

c) FAUX. D'après le cours : $V(AX+B) = A^2 V(X)$

Donc $V(500X) = 250\,000\, V(X)$

Exercice 3



$P(VV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$P(VR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

$P(RV) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

$P(RR) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

On vérifie que : $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$

X = le nombre de boules vertes tirées.

1) a) $P(X=0) = P(RR) = \frac{3}{10}$

b)

x_i	0 x_1	1 x_2	2 x_3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$ p_1	$\frac{3}{5}$ p_2	$\frac{1}{10}$ p_3

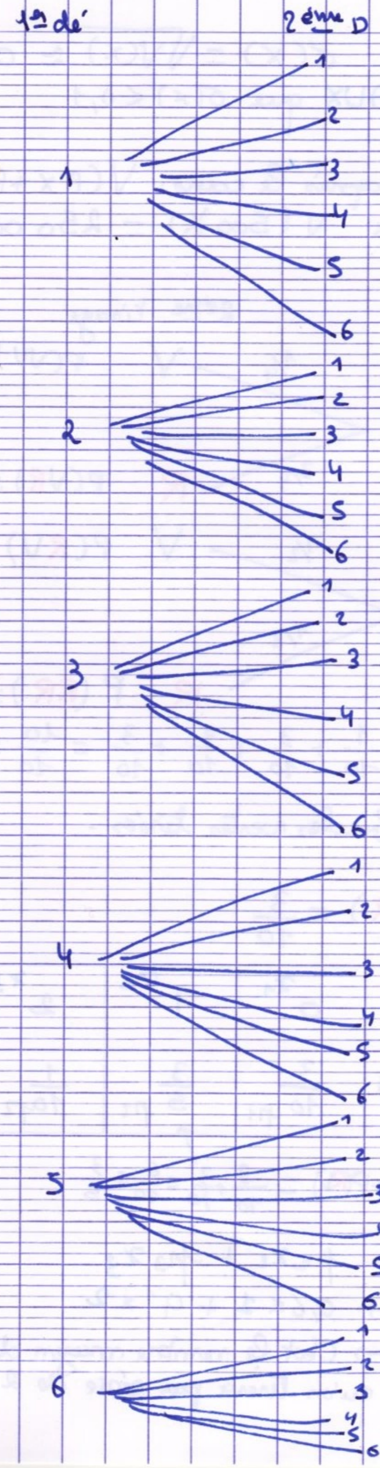
$P(VR) + P(RV) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

2) $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$

$= 0,3 \times 0 + 0,6 \times 1 + 0,1 \times 2$

$\boxed{E(X) = 0,8}$ → C'est le nombre moyen de boules vertes qu'on tirera par série de 2 tirages.

Exercice 4



Somme obtenue :

2, 3, 4, 5, 6, 7
3, 4, 5, 6, 7, 8
4, 5, 6, 7, 8, 9
5, 6, 7, 8, 9, 10
6, 7, 8, 9, 10, 11
7, 8, 9, 10, 11, 12

Suite de l'exercice 4 Ne serait-il pas plus pertinent de présenter ces résultats dans un tableau à double entrée ?

Il y a $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables.

Chacune a donc une probabilité de $\frac{1}{36}$

2ème dé \ 1er dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

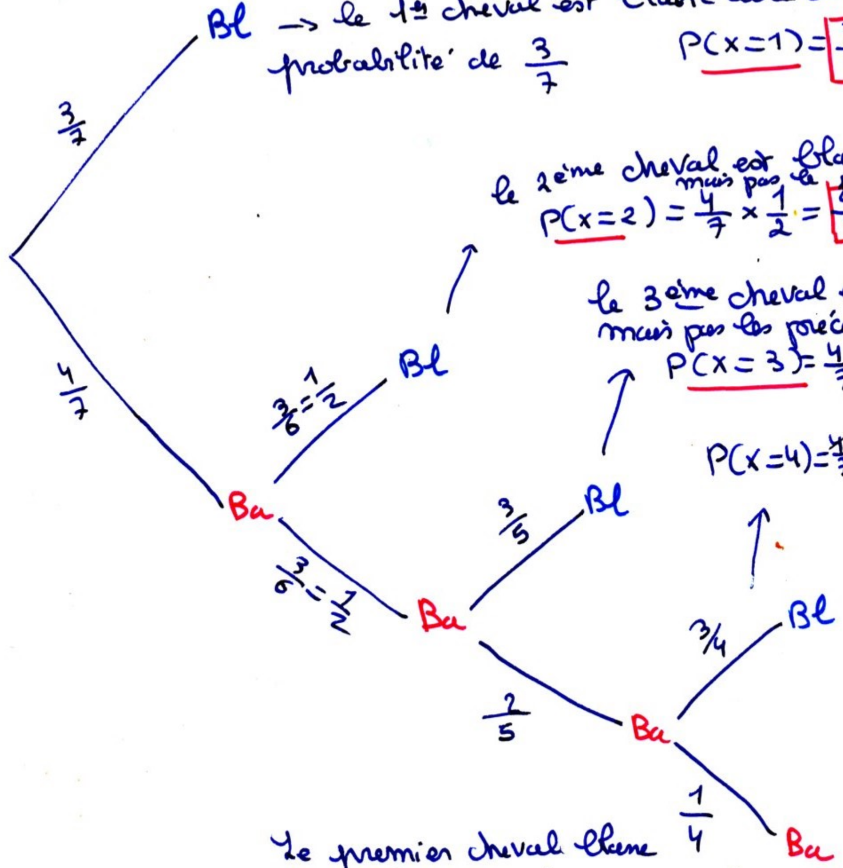
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On vérifie : $\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}$ est égal à $\frac{36}{36}=1$

La valeur obtenue le plus fréquemment est $\boxed{7}$

Sa probabilité est de $\frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$.

Exercice 5.



→ le 1er cheval est blanc avec une probabilité de $\frac{3}{7}$ $\quad P(X=1) = \boxed{\frac{3}{7}}$

le 2ème cheval est blanc mais pas le précédent $P(X=2) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2}{7}}$

le 3ème cheval est blanc mais pas les précédents $P(X=3) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \boxed{\frac{6}{35}}$

$P(X=4) = \frac{\cancel{4}}{7} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{5} \times \frac{3}{\cancel{4}} = \boxed{\frac{3}{35}}$

Le premier cheval blanc apparaîtra en 5ème position

$P(X=5) = \frac{\cancel{4}}{7} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{\cancel{4}} = \boxed{\frac{1}{35}}$

x_i	x_1 1	x_2 2	x_3 3	x_4 4	x_5 5
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{7}$ p_1	$\frac{2}{7}$ p_2	$\frac{6}{35}$ p_3	$\frac{3}{35}$ p_4	$\frac{1}{35}$ p_5

On vérifie : $\sum_{i=1}^{5} p_i = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \underbrace{\frac{6}{35} + \frac{3}{35} + \frac{1}{35}}_{\frac{10}{35}}$

$= \frac{15}{35} + \frac{10}{35} + $

$= \frac{35}{35} = 1 \quad$ OK

Suite de l'exercice 5 : $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + p_5 x_5$

$$E(X) = \frac{15}{35}\times 1 + \frac{10}{35}\times 2 + \frac{6}{35}\times 3 + \frac{3}{35}\times 4 + \frac{1}{35}\times 5$$
$$= \frac{15}{35} + \frac{20}{35} + \frac{18}{35} + \frac{12}{35} + \frac{5}{35}$$
$$= \frac{70}{35} = 2$$

En moyenne, le rang d'apparition du 1er cheval blanc est le deuxième.

Exercice 6. 1) a) Stratégie 1

X = Gain algébrique

x_i	-10	10
$P(X=x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$\frac{19}{37}+\frac{18}{37}=\frac{37}{37}=1$

Stratégie 2 :

Y = gain algébrique

y_i	-10	350
$P(Y=y_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

Stratégie 3 :

Z = gain algébrique

z_i	-10	20
$P(Z=z_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$

b) $E(X) = \frac{19}{37}\times(-10) + \frac{18}{37}\times 10$
$$= \frac{-190}{37} + \frac{180}{37} = \boxed{-\frac{10}{37}}$$

$$V(X) = \frac{19}{37}\times(-10)^2 + \frac{18}{37}\times 10^2 - \left(-\frac{10}{37}\right)^2$$
$$= \frac{1900}{37} + \frac{1800}{37} - \frac{100}{37^2}$$
$$= \frac{70300}{37^2} + \frac{66600}{37^2} - \frac{100}{37^2}$$
$$\boxed{V(X) = \frac{136800}{1369}} \approx 99,927$$

$$E(Y) = \frac{36}{37}\times(-10) + \frac{1}{37}\times 350$$
$$= \frac{-360}{37} + \frac{350}{37}$$
$$\boxed{E(Y) = -\frac{10}{37}}$$

$$V(Y) = \frac{36}{37}\times(-10)^2 + \frac{1}{37}\times 350^2 - \left(-\frac{10}{37}\right)^2$$
$$= \frac{3600}{37} + \frac{122500}{37} - \frac{100}{37^2}$$
$$= \frac{133200}{1369} + \frac{4532500}{1369} - \frac{100}{1369}$$

$$\boxed{V(Y) = \frac{4\,665\,600}{1369}} \approx 3408,035$$

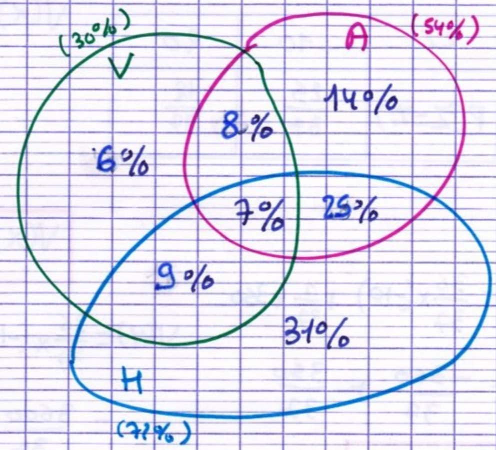
$$\boxed{E(Z)} = \frac{25}{37}\times(-10) + \frac{12}{37}\times 20 = -\frac{250}{37} + \frac{240}{37} = \boxed{-\frac{10}{37}}$$

$$V(Z) = \frac{25}{37}\times(-10)^2 + \frac{12}{37}\times 20^2 - \left(-\frac{10}{37}\right)^2$$
$$= \frac{2500}{37} + \frac{4800}{37} - \frac{100}{1369}$$
$$= \frac{92500}{1369} + \frac{177600}{1369} - \frac{100}{1369}$$
$$\boxed{V(Z) = \frac{270\,000}{1369}} \approx 197,224$$

2) Les espérances sont les mêmes, mais les variances très différentes : la stratégie la plus risquée est la 2ème (variance de 3408 environ). La stratégie la moins risquée... c'est de ne pas jouer ! $E(X) = E(Y) = E(Z)$ $V(X) < V(Z) < V(Y)$

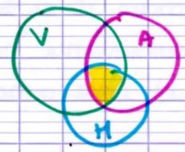
Exercice 7.

1)

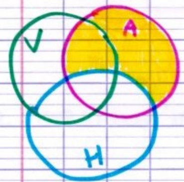


Suite de l'exercice 7.

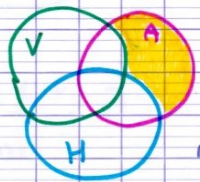
2) a) $A \cap V \cap H$ = "L'assuré a souscrit les 3 types d'assurances"

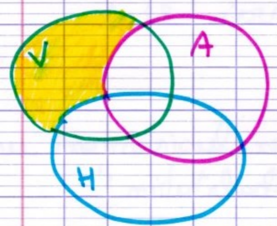


b) $\overline{H} \cap A$ = l'assuré a souscrit une assurance auto mais pas d'assurance habitation.



c) $\overline{H} \cap \overline{V}$: L'assuré n'a pas souscrit d'assurance habitation ni d'assurance vie = il n'a souscrit qu'une assurance - auto

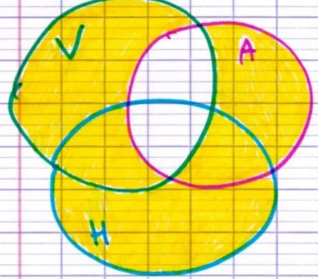


d) 

$\overline{A \cup H}$ = l'assuré n'a souscrit qu'une assurance Vie

→ C'est l'événement contraire de :

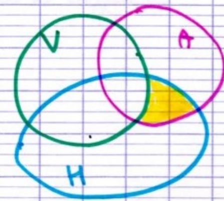
"l'assuré a souscrit au moins l'une des 2 assurances : auto ou habitation".

e) 

$\overline{A \cap V}$ = l'assuré n'a pas souscrit à la fois à une assurance auto et à une assurance - vie.

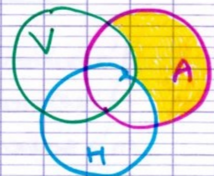
Ou : il n'a pas souscrit à au moins l'une des 2 assurances suivantes : auto et vie.

3) E = "L'assuré n'a pas souscrit d'assurance Vie, mais il a souscrit une assurance habitation et une assurance - auto"



$\boxed{E = \overline{V} \cap H \cap A}$

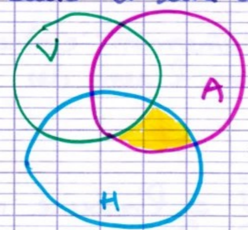
F = "L'assuré a souscrit uniquement une assurance - auto"



$\boxed{F = \overline{V} \cap \overline{H} \text{ ou } \overline{V \cup H}}$

voir 2) c)

G = "L'assuré a souscrit exclusivement une assurance auto et une assurance habitation."



$\boxed{G = E = \overline{V} \cap H \cap A}$