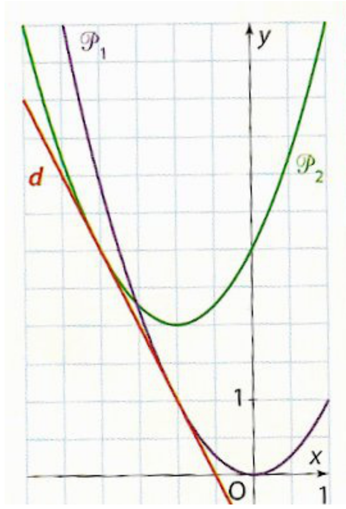
1ère S 2011. Problèmes sur la Dérivation et ses applications

Exercice 1 : n°62 p 88-89 (Transmath 1ère S édtitions 2011)



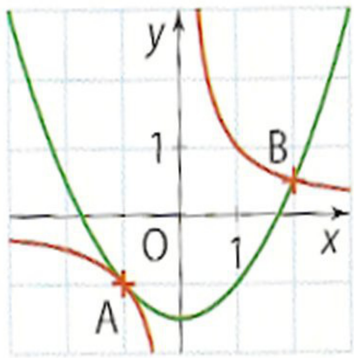
Sur la figure ci-contre, on a tracé les paraboles P_1 et P_2 représentatives des fonctions f et g définies sur ℝ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x^2+2x+3$
A est un point de P_1 d'abscisse a et B un point de P_2 d'abscisse b.

1) Trouvez une équation de la tangente :
   a. T_a en A à P_1
   b. T_b en B à P_2

2) Démontrez que la droite d est une tangente commune aux deux courbes si et seulement si a et b vérifient le système (S) $\begin{cases} a=b+1 \\ a^2=b^2-3 \end{cases}$

3) Résolvez le système et déduisez-en une équation de d.

Exercice 2 : n°63 p 89

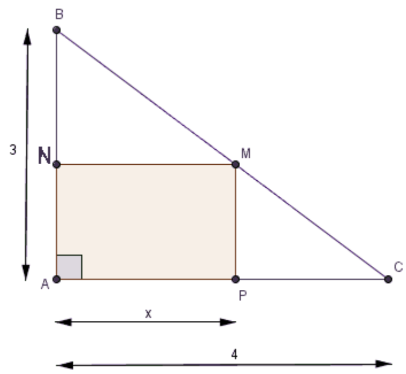


1) Vérifiez que $x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)$

2) Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes représentatives des fonctions :
f définie sur ℝ par $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-3)$
g définie sur ℝ-{0} par $g(x)=\frac{1}{x}$

a) Quelles sont les coordonnées des points A et B, intersections de ces deux courbes ?
b) Démontrez que ces courbes ont une tangente commune en A.
c) Etudiez suivant les valeurs de x les positions relatives de ces deux courbes.

Exercice 3 : n°14 p 100.

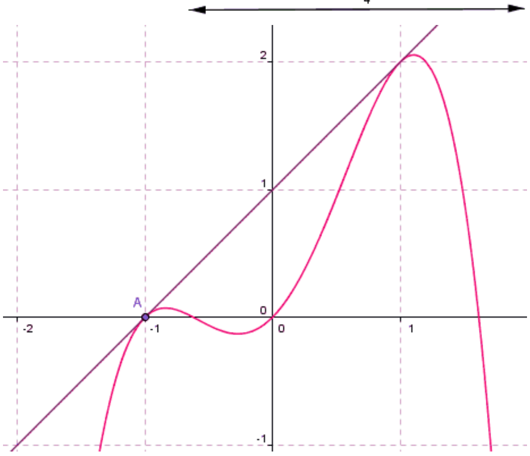


ABC est un triangle rectangle en A. AC=4, AB=3.
P est un point du segment [AC].
M est le point de [BC] et N celui de [AB] tel que APMN soit un rectangle.
On pose AP=x, avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.

1) a) Calculer MP en fonction de x
   b) Déduisez-en que l'aire $\mathscr{A}$(x) du rectangle APMN est égale à $\frac{3}{4}(4x-x^2)$

2) a) Etudier les variations de la fonction $\mathscr{A}$ sur l'intervalle [0;4]
   b) Déduisez-en la valeur de x en laquelle $\mathscr{A}$(x) est maximale.

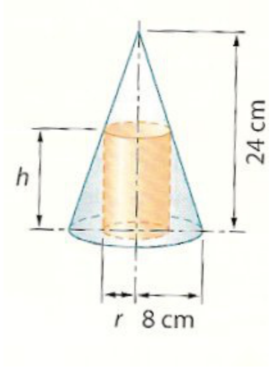
Exercice 4 : n°48 p 107.



Avec Geogebra, on a obtenu la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=-x^4+2x^2+x$ et la tangente (T) à cette courbe en son point A d'abscisse -1 .

Cette droite (T) semble être tangente à la courbe en un second point. Prouvez-le, et précisez les coordonnées de ce second point.

Exercice 5 : n°71 page 109.



La hauteur d'un cône de révolution mesure 24 cm et le rayon de la base, 8 cm.
On veut inscrire, dans ce cône, un cylindre de révolution dont le volume V soit le plus grand possible.

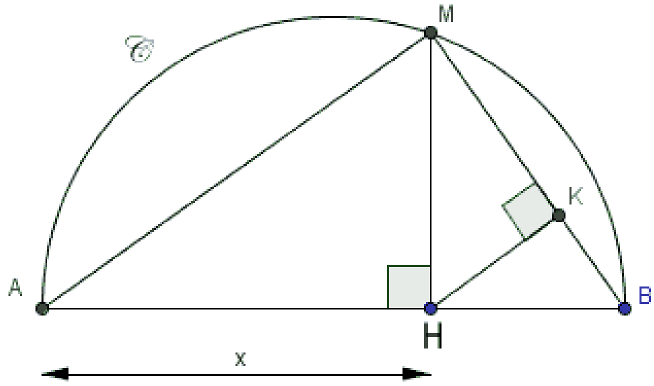
1) Exprimer la hauteur h du cylindre inscrit en fonction du rayon r de ce même cylindre.

2) a) En déduire que le volume V du cylindre, défini sur [0:8], est $V(r)=3\pi r^2(8-r)$

b) Etudier les variations de V, puis en déduire la valeur de r pour laquelle V(r) est maximal. Quelle est alors la hauteur h ?

Exercice 6 : n°76 p 110.

$\mathscr{C}$ est un demi-cercle de diamètre [AB] avec AB=6.
H est un point du segment [AB] distinct de A et de B.
On note x la longueur AH.
La perpendiculaire en H à [AB] coupe $\mathscr{C}$ en M.
K est le pied de la hauteur issue de H du triangle MBH.



L'objectif de cet exercice est de déterminer pour quelle(s) position(s) de H sur]AB[le segment [HK] a une longueur maximale.

On note HK=f(x)

1) a) En exprimant cos($\widehat{BAM}$) de deux manières différentes, prouver que $AM=\sqrt{6x}$.

b) Justifiez le parallélisme de (HK) et de (AM) et déduisez-en que $f(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}$.

2) a) f est définie et dérivable sur]0;6[. Exprimer f'(x).

b) En déduire les variations de f et conclure.

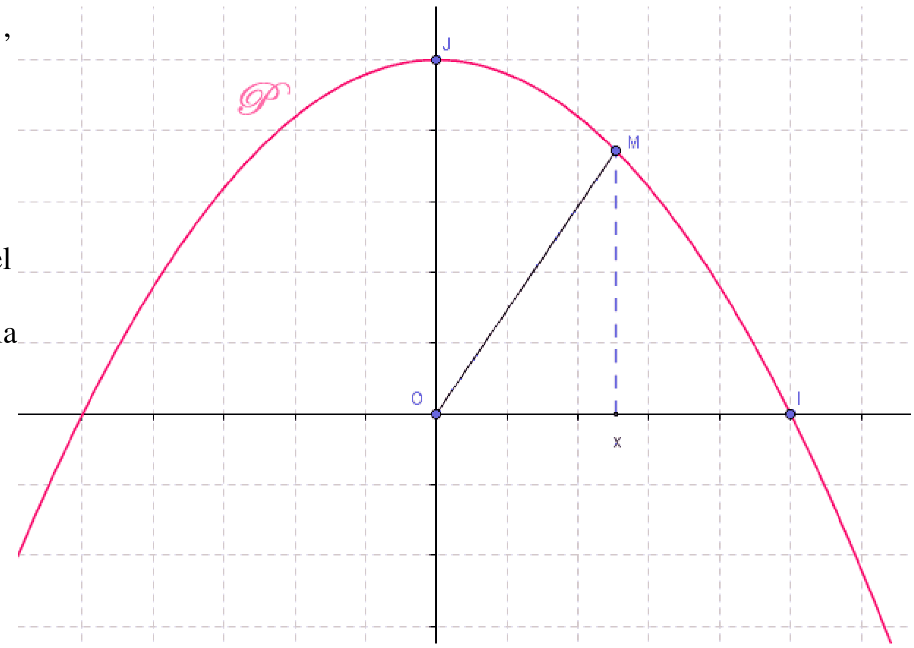
Exercice 7 : n°81 p 111.

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-x^2+1$

a) Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2) Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$,
$\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y=1-x^2$.
M est un point de $\mathscr{P}$ d'abscisse x.



a) Démontrer que $OM^2=f(x)$.

b) On admet que « il existe un point M tel que la distance OM est minimale » équivaut à « Il existe un point M tel que la valeur de OM^2 est minimale. »

Quelles sont les coordonnées des points de la parabole $\mathscr{P}$ les plus proches de l'origine O du repère ?