$1^{ère}$ S – Exercices sur la loi binomiale - Corrigés

Exercice 1 : 1) À chaque lancer, il y a 6 issues équiprobables : obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. On a 2 chances sur 6 d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 5, indépendamment des résultats aux autres lancers. On est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres 8 et $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 2) X suit donc une loi binomiale de paramètres 8 et $\frac{1}{3}$.

Exercice 2 : $E(Y)=9\times\frac{1}{3}=3$ $\quad V(X)=9\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=3\times\frac{2}{3}=2$ $\quad \sigma(X)=\sqrt{2}$

Exercice 3 : 1) Si X suit une loi binomiale, ses paramètres sont 200 et 0,09.

2) $E(X)=200\times 0{,}09=18$. En moyenne, 18 personnes seront signalées en fraude lors de ce contrôle.

3) Sur les 5000 voyageurs, en moyenne, $5000\times 0{,}09=450$ fraudent, ce qui représente une perte pour l'établissement régissant le métro de $450\times 1{,}70=765$ €.
Si on veut compenser cette perte par les amendes données aux fraudeurs contrôlés, il faudra demander à chacun une amende de $\frac{765}{18}=42{,}5$ €,

Exercice 4 : $\sigma(X)=\sqrt{n\times\frac{2}{5}\times(1-\frac{2}{5})}$ $\quad \sigma(X)=\sqrt{4\times\frac{3}{5}}$ car $E(X)=n\times\frac{2}{5}=4$ $\quad \boxed{\sigma(X)=\sqrt{\frac{12}{5}}}$

Exercice 5 : X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 16 et p, avec $p\leqslant\frac{1}{2}$.
On sait que $\sigma(X)=1$.

$\sigma(X)=\sqrt{16\times p\times(1-p)}$ or $\sigma(X)=1$, donc $\sqrt{16\times p\times(1-p)}=1 \Leftrightarrow 16\times p\times(1-p)=1$ car p et $1-p$ sont compris entre 0 et 1, donc $16\times p\times(1-p)\geqslant 0$

$16\times p\times(1-p)=1 \Leftrightarrow 16p-16p^2-1=0 \Leftrightarrow -16p^2+16p-1=0$.

$\Delta=16^2-4\times(-16)\times(-1)=16\times(16-4)=16\times 12=192=(8\sqrt{3})^2$

L'équation du second degré admet deux solutions : $p_1=\frac{-16-8\sqrt{3}}{-32}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}>\frac{1}{2}$ donc ne convient pas.
$p_2=\frac{-16+8\sqrt{3}}{-32}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ qui est bien compris entre 0 et $\frac{1}{2}$: $p_2\approx 0{,}067$.

Donc $p=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ donc $E(X)=16p=16\times\frac{2-\sqrt{3}}{4}=8-4\sqrt{3}$.

Exercice 6 :
$\binom{6}{0}$ = 1 car un seul chemin mène à 0 succès sur 6 dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli d'ordre 6.
$\binom{5}{5}$ = 1 car un seul chemin mène à 5 succès sur 5.
$\binom{4}{1}$ = 4 car il y a 4 manières d'obtenir un succès sur 4 expériences : l'obtenir en premier, en second, en troisième ou à la quatrième expérience.
$\binom{3}{0}=1$ $\quad \binom{2}{2}=1$ $\quad \binom{12}{0}=1$

$\binom{16}{15}=16$ car il y a 16 places pour un échec et un seul dans une série de 16.

$\binom{785}{1}=785$ $\binom{444}{0}=1$ $\binom{849}{848}=849$

Exercice 7 : On sait que $\binom{15}{6}=5005$ et $\binom{15}{7}=6435$.

$\binom{15}{9}=\binom{15}{6}$ car $9+6=15$. Donc $\boxed{\binom{15}{9}=5005}$.

$\binom{15}{8}=\binom{15}{7}$ car $8+7=15$. Donc $\boxed{\binom{15}{8}=6435}$.

$\binom{15}{6}+\binom{15}{7}=\binom{16}{7}$ Donc $\binom{16}{7}=5\,005+6\,435$ donc $\boxed{\binom{16}{7}=11440}$

$9+7=16$ donc $\binom{16}{9}=\binom{16}{7}$, donc $\boxed{\binom{16}{9}=11440}$

Exercice 8 :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	**6**	4	1				
5	1	**5**	10	10	5	1			
6	1	**6**	**15**	20	15	6	1		
7	1	7	21	**35**	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	**70**	56	28	8	1

$6=\binom{4}{2}=\binom{6}{1}$ $5=\binom{5}{1}$ $15=\binom{6}{2}$ $35=\binom{7}{3}$ $70=\binom{8}{4}$

Exercice 9 : Y est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{3}$.

$P(Y=0)=\binom{5}{0}\times\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=1\times1\times\frac{2^5}{3^5}$ $\boxed{P(Y=0)=\frac{32}{243}}$

$P(Y=1)=\binom{5}{1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=5\times\frac{2^4}{3^5}$ $\boxed{P(Y=1)=\frac{80}{243}}$

$P(Y=4)=\binom{5}{1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=5\times\frac{1\times2}{3^5}$ $\boxed{P(Y=4)=\frac{10}{243}}$

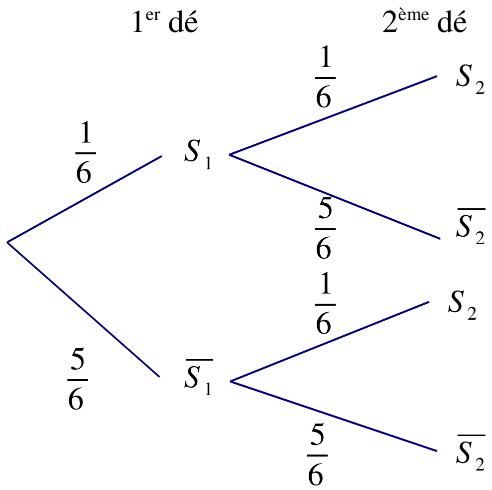
Exercice 10 : Z est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 9 et $\frac{2}{3}$.

$P(Z=3)=\binom{9}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^6=84\times\frac{2^3}{3^9}=\frac{28\times8}{3^8}$ $\boxed{P(Z=3)=\frac{224}{6561}}$ $\boxed{p(Z=3)\approx0{,}034}$

$$P(Z=6)=\binom{9}{6}\times\left(\frac{2}{3}\right)^6\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=84\times\frac{2^6}{3^9}=\frac{28\times 64}{3^8}\qquad \boxed{P(Z=6)=\frac{1792}{6561}}\qquad \boxed{p(Z=6)\approx 0{,}273}$$

Exercice 11 : 1) Notons S_1 l'événement « obtenir un 6 avec le 1er dé » et S_2 l'événement « obtenir en 6 avec le 2ème dé ».

La probabilité d'obtenir un double-six est de $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.



2) Si on lance dix fois cette paire de dés, on établit un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et $\frac{1}{36}$.

Soit X la variable aléatoire qui correspondant au nombre de double-six obtenus lors des 10 lancers :

$$P(X=0)=\binom{10}{0}\times\left(\frac{1}{36}\right)^0\times\left(\frac{35}{36}\right)^{10}=1\times 1\times\frac{35^{10}}{6^{20}}=\frac{35^{10}}{6^{20}}\text{ car}$$

$$36^{10}=(6^2)^{10}=6^{20}$$

$$P(X=1)=\binom{10}{1}\times\left(\frac{1}{36}\right)^1\times\left(\frac{35}{36}\right)^9=10\times\frac{1}{36}\times\frac{35^9}{36^9}=\frac{10\times 35^9}{6^{20}}$$

$$P(X=2)=\binom{10}{2}\times\left(\frac{1}{36}\right)^2\times\left(\frac{35}{36}\right)^8=45\times\frac{1}{36^2}\times\frac{35^8}{36^8}=\frac{45\times 35^8}{6^{20}}$$

(X=0)∪(X=1)∪(X=2) est l'événement contraire de $X\geqslant 3$ (obtenir au moins 3 double-six) et les trois événements X=0, X=1 et X=2 sont incompatibles.

Vérification à l'aide d'un tableur :

	A	B	C
1	x_i	P(X=x_i)	P(X>=x_i)
2	0	0,75449338	1
3	1	0,21556954	0,245506616
4	2	0,02771608	0,029937078
5	3	0,0021117	0,002220994
6	4	0,00010559	0,000109293
7	5	3,6201E-06	3,70767E-06
8	6	8,6192E-08	8,76143E-08
9	7	1,4072E-09	1,42239E-09
10	8	1,5077E-11	1,51733E-11
11	9	9,5729E-14	9,60024E-14
12	10	2,7351E-16	2,73511E-16

Donc $P(X\geqslant 3)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))=1-\frac{35^{10}+10\times 35^9+45\times 35^8}{6^{20}}$

$$P(X\geqslant 3)=\frac{6^{20}-35^{10}-10\times 35^9-45\times 35^8}{6^{20}}\qquad \boxed{P(X\geqslant 3)\approx 0{,}0022}$$

Exercice 12 : 1) X suit une loi binomiale de paramètres 8 et $\frac{1}{4}$.

2) a) $Y=3\times X-1\times(8-X)$ (3 fois le nombre de succès moins une fois le nombre de défaites)

$Y=3X-8+X$ $\quad\boxed{Y=4X-8}$

b) $E(Y)=4E(X)-8$. $E(X)=8\times\frac{1}{4}=2$ donc $\boxed{E(Y)=4\times 2-8=0}$

c) C'est un jeu équitable : on ne peut pas dire qu'il soit financièrement intéressant pour le joueur, mais il ne lui est pas défavorable non plus.

Exercice 13 : 1) X suit une loi binomiale de paramètres n et 0,02.

2) $\boxed{E(X)=0{,}02n}$

3) $E(X)=5 \Leftrightarrow 0{,}02n=5 \Leftrightarrow n=\frac{5}{0{,}02} \Leftrightarrow \boxed{n=250}$

4) « Pour que le commercial soit sûr qu'on lui passe 5 commandes, il doit appeler 250 personnes. » Cette phrase est fausse. Si le commercial appelle 250 personnes, il passera 5 commandes en moyenne, mais non de façon sûre. De toute façon, quel que soit le nombre d'appels, il y a toujours une toute petite chance pour qu'aucun n'aboutisse à une commande.

Exercice 14 : 1) X suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-0{,}82=0{,}18$, puisqu'on a la drôle d'idée d'attribuer 0 au succès et 1 à l'échec dans cet exercice.

2) a) Y suit une loi binomiale de paramètres 24 et 0,82.

b) $P(Y=24)=\binom{24}{24}\times 0{,}82^{24}\times 0{,}18^{0}=0{,}82^{24}\approx 0{,}009$