Exercice 1 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \underbrace{-2}_{a}x^2 + \underbrace{3}_{b}x + \underbrace{5}_{c}$

1) $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 5 = 9 + 40 = 49 = 7^2$

c'est une bonne habitude d'écrire dès ici de "qui" Δ est le carré (utile pour les nombres complexes notamment)

L'équation $f(x) = 0$ a 2 solutions :

$$\frac{-3-7}{2\times(-2)} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3+7}{2\times(-2)} = \frac{4}{-4} = -1$$

Je gagne du temps en n'explicitant plus la formule $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ mais en remplaçant directement b, a et $\sqrt{\Delta}$ par leurs valeurs

$f(x) = 0$ a pour ensemble de solutions :

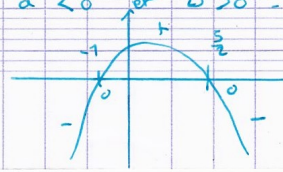
$$S = \left\{-1 ; \frac{5}{2}\right\}$$

Quand il s'agit de valeurs isolées, on n'est pas obligé de les ordonner dans l'ordre croissant. Mais je choisis de le faire car c'est pratique notamment quand on est amené à placer les valeurs dans un tableau de signes ensuite.

2)

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+3x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Rappel : ax^2+bx+c est du signe de a "à l'extérieur de ses racines". Ici, $a < 0$ et $\Delta > 0$. On est dans le cas :



quand a négatif parabole très contente

Exercice 2 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 14x + 33$

1) $\Delta = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 33 = 196 - 132 = 64 = 8^2$

L'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions :

$$\frac{14-8}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{14+8}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$S = \{3 ; 11\}$$

2)

x	$-\infty$		3		11		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \underbrace{-4}_{a}x^2 + \underbrace{4}_{b}x \underbrace{-1}_{c}$

1) Méthode 1 (classique) : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-4) \times (-1) = 16 - 16 = 0$

L'équation $g(x) = 0$ admet 1 solution "double" : $\frac{-4}{2\times(-4)} = \frac{1}{2}$ (formule $\frac{-b}{2a}$)

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

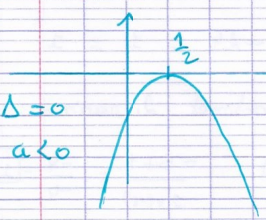
Méthode 2 (quand on a reconnu une identité remarquable) :

$$g(x) = 0 \iff -(2x-1)^2 = 0 \quad \text{car } x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$\iff 2x - 1 = 0 \quad \text{(en ajoutant 1 puis divisant par 2)}$$
$$\iff x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Suite de l'exercice 3 : 2)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	



cas où $\Delta = 0$ et $a < 0$

$g(x)$ est négatif ou nul pour tout $x \in \mathbb{R}$

$g(x) \leqslant 0$ a pour ensemble de solutions : $S = \mathbb{R}$

Tous les réels sont solutions de l'inéquation $g(x) \leqslant 0$

Exercice 4 : (I₁) $(x-5)(x+7) \geqslant 0$

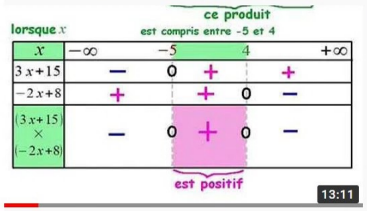
Recherche des "zéros" : $x-5=0 \iff x=5$

$x+7=0 \iff x=-7$

x	$-\infty$		-7		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-5)(x+7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -7] \cup [5 ; +\infty[$

Au besoin, voir ou revoir ma vidéo :



Inéquations à tableaux de signes 1

151 k vues • il y a 5 ans

charmuzelle

Notion enseignée en classe de seconde. Le **tableau de signes** est un outil très utile et pratique, mais il faut en avoir compris le ...

(I₂) $-2x^2+5x-3 < 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 25 - 24 = 1 = 1^2$

Le trinôme $-2x^2+5x-3$ admet 2 racines :

$\frac{-5-1}{2\times(-2)} = \frac{-6}{-4} = \boxed{\frac{3}{2}}$ et $\frac{-5+1}{2\times(-2)} = \frac{-4}{-4} = \boxed{1}$

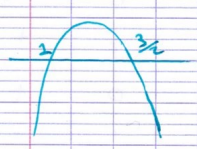
↑ On pense à remarquer que $\frac{3}{2} > 1$ afin de les placer dans l'ordre croissant dans le tableau :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

($a = -2$)

du signe de a "en-dehors" des racines

cas : $a < 0$ ☹ et $\Delta > 0$



$S =]-\infty ; 1[\cup]\frac{3}{2} ; +\infty[$

(I₃) $-9x^2+6x-1 \geqslant 0$

($a = -9$)

Méthode 1 (classique) : $\Delta = 6^2 - 4 \times (-9) \times (-1)$

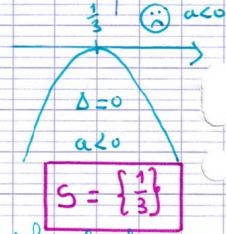
$= 36 - 36$

$= 0$

→ Le trinôme $-9x^2+6x-1$ admet une unique racine : $\frac{-6}{2\times(-9)} = +\frac{2\times3\times1}{2\times3\times3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x^2+6x-1$		$-$	0	$-$	

du signe de a "en-dehors" des racines



$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$\frac{1}{3}$ est la seule valeur pour laquelle $-9x^2+6x-1$ soit positif ou nul

Corrigés

Suite de l'exercice 4, résolution de (I_3) $\quad -9x^2+6x-1>0$

Méthode 2 : On a reconnu une identité remarquable :

$(I_3) \iff -(3x-1)^2 \geqslant 0$

le carré d'un réel est toujours positif ou nul

(I_3) ne sera vérifiée que lorsque $(3x-1)=0$

soit $3x=1$

soit $x=\frac{1}{3}$

$$S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

(I_4) $\quad x^2+2x+5\leqslant 0$

Je ne prends même pas la peine de finir le calcul de Δ, puisqu'il est négatif et ne nous servira pas.

$\Delta = 2^2-4\times1\times5 = 4-20 \quad \Delta<0$

Le trinôme x^2+2x+5 n'a pas de racine.

x^2+2x+5 est donc toujours du signe de 1, le coefficient de x^2, soit strictement positif. Il n'est donc jamais négatif ou nul $\Rightarrow$ l'inéquation n'admet donc pas de solution.

car : ☺ $a>0$, $\Delta<0$



$$S=\emptyset$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

Exercice 5 : $\quad (I_5)$ $\quad 5x^2-3x+1>0$

$\Delta = (-3)^2-4\times5\times1 = 9-20 \quad <0$

$5x^2-3x+1$ n'a pas de racines et est toujours du signe de 5, soit strictement positif. Donc tous les réels sont solutions de cette inéquation : $S=\mathbb{R}$

(I_6) $\quad x^2+3x-4\geqslant 0$

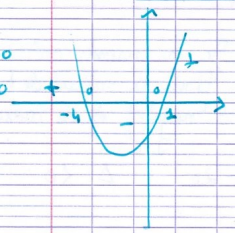
$\Delta = 3^2-4\times1\times(-4) = 9+16 = 25 = 5^2$

Le trinôme x^2+3x-4 admet 2 racines :

$\frac{-3-5}{2\times1}=\frac{-8}{2}=\boxed{-4}$ et $\frac{-3+5}{2\times1}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

☺ $a>0$, $\Delta>0$



$$S=]-\infty;-4]\cup[1;+\infty[$$

(I_7) $\quad 2x^2-3x+2\geqslant 0$

$\Delta = (-3)^2-4\times2\times2 = 9-16 \quad <0$

$2x^2-3x+2$ est donc toujours du signe de 2, soit strictement positif.

Tous les réels sont donc solutions de l'inéquation (I_7)

$$S=\mathbb{R}$$

Corrigés

Suite de l'exercice 5. (I_8) $-2x^2+2x-\frac{1}{2}\geqslant 0$

$(I_8) \iff -4x^2+4x-1\geqslant 0$ en multipliant les 2 membres par 2. → on retombe sur le $g(x)$ de l'exercice 3

$(I_8) \iff -(2x-1)^2\geqslant 0$ $\quad (2x-1)^2\geqslant 0$ pour tout x

donc $-(2x-1)^2\leqslant 0$ pour tout x

et ne s'annule que lorsque $2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2}$

$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Remarque : Vous pouvez bien évidemment procéder de manière plus classique en calculant

$\Delta = 2^2-4\times(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 4-4=0$

J'ai choisi de multiplier les 2 membres de l'inéquation par 2 afin de "me débarrasser" de la fraction car je sais que je suis plus susceptible de me tromper lorsque je calcule avec des coefficients fractionnaires.

Exercice 6 : (I_9) $-7x^2+3<4 \iff -7x^2-1<0$

en soustrayant 4 aux 2 membres

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$ donc $-7x^2\leqslant 0$

donc $-7x^2-1\leqslant -1$

donc $-7x^2-1<0$

→ Tous les réels sont donc solutions de cette inéquation.

graphique

$S=\mathbb{R}$

(I_{10}) $-x^2+x+12\leqslant 2x+6$

$(I_{10}) \iff -x^2-x+6\leqslant 0$

(j'ai soustrait $2x+6$ aux deux membres)

$\Delta = (-1)^2-4\times(-1)\times 6 = 1+24=25=5^2$

Le trinôme $-x^2-x+6$ admet 2 racines :

$\frac{-(-1)-5}{2\times(-1)} = \frac{1-5}{-2} = \frac{-4}{-2} = \boxed{2}$ et $\frac{-(-1)+5}{-2} = \frac{6}{-2} = \boxed{-3}$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-x^2-x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=]-\infty;-3]\cup[2;+\infty[$

(I_{11}) $(-2x^2+19x-35)(5x+30)<0$

* Recherche des racines du trinôme : $-2x^2+19x-35$

$\Delta = 19^2-4\times(-2)\times(-35) = 361-280=81=9^2$

Le trinôme $-2x^2+19x-35$ admet 2 racines :

$\frac{-19-9}{2\times(-2)} = \frac{-28}{-4} = \boxed{7}$ et $\frac{-19+9}{2\times(-2)} = \frac{-10}{-4} = \boxed{\frac{5}{2}}$ ou 2,5

* Recherche de la racine du trinôme $5x+30$:

$5x+30=0 \iff 5x=-30 \iff \boxed{x=-6}$

Bien réfléchir à l'ordre des 3 racines avant de les placer dans le tableau.

Suite de l'exercice 6 : (Suite de la résolution de l'inéquation I_{11})

x	$-\infty$		-6		$\frac{5}{2}$		7		$+\infty$
$-2x^2+19x-35$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$5x+30$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(-2x^2+19x-35)(5x+30)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S =]-6 ; \tfrac{5}{2}[\cup]7 ; +\infty[$$

(I_{12}) $\quad (-6x^2+16x-8)(x-2) \geqslant 0$

Ce n'est pas obligé de le faire, mais quand je vois que ces coefficients sont tous multiples de 2, j'ai envie de factoriser par 2.

$(I_{12}) \iff 2(-3x^2+8x-4)(x-2) \geqslant 0$

J'ai moins tendance à me tromper dans mes calculs lorsque les coefficients sont plus petits.

$(I_{12}) \iff (-3x^2+8x-4)(x-2) \geqslant 0$ en divisant les 2 membres de l'inéquation par 2.

* Recherche des éventuelles racines de $-3x^2+8x-4$:

$\Delta = 8^2 - 4 \times (-3) \times (-4) = 64 - 48 = 16 = 4^2$

Le trinôme a 2 racines : $\frac{-8-4}{2\times(-3)} = \frac{-12}{-6} = \boxed{2}$ et $\frac{-8+4}{2\times(-3)} = \frac{-4}{-6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

* La racine de $x-2$ est $\boxed{2}$ car $x-2=0 \iff x=2$

⚠ On a une racine double ! Prenez garde à ne pas la faire apparaître 2 fois dans le tableau de signes.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$-3x^2+8x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-3x^2+8x-4)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

$$S =]-\infty ; \tfrac{2}{3}] \cup \{2\}$$

L'expression $(-3x^2+8x-4)(x-2)$ est positive ou nulle sur $]-\infty ; \frac{2}{3}]$, mais aussi pour $x=2$.

Exercice 7 :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

1) $P(-1) = (-1)^3 - 5\times(-1)^2 + 2\times(-1) + 8$

$= -1 - 5 - 2 + 8$

$\boxed{P(-1) = 0}$ → -1 est une racine de $P(x)$

2) On cherche les 3 réels a, b et c tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$

$(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + ax^2 + bx^2 + bx + cx + c$

$= ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$

Pour que $P(x)$ soit égal à $(x+1)(ax^2+bx+c)$ pour tout x, il faut et il suffit que :

$$(S) \begin{cases} a = 1 & \leftarrow \text{les coefficients de } x^3 \text{ doivent être égaux} \\ a+b = -5 & \leftarrow \text{les coefficients de } x^2 \text{ doivent être égaux} \\ b+c = 2 & \leftarrow \text{les coefficients de } x \text{ doivent être égaux} \\ c = 8 & \leftarrow \text{les coefficients constants doivent être égaux} \end{cases}$$

Suite de l'exercice 7, question 2)

$$(S) \iff \begin{cases} a = 1 \\ 1 + b = -5 \\ b + 8 = 2 \\ c = 8 \end{cases}$$

← j'ai remplacé a par 1 dans cette équation

← j'ai remplacé c par 8 dans cette équation

$$(S) \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases}$$

→ On a trouvé $\underline{a = 1}$, $\underline{b = -6}$ et $\underline{c = 8}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)}$

3) On sait d'après ce qui précède que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 8)$

Cherchons les éventuelles racines du trinôme : $x^2 - 6x + 8$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4 = 2^2$

Le trinôme admet 2 racines : $\frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$ et $\frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$

Et on sait que $x+1$ admet pour racine $\boxed{-1}$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$		+		+	0	−	0	+	
$x+1$		−	0	+		+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

L'inéquation $P(x)$ admet donc pour ensemble de solutions :

$$\boxed{S = [-1; 2] \cup [4; +\infty[}$$

Exercice 8 : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-5; 2\}$, $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+3x-10}$

Racine du numérateur : $3x - 2 = 0 \iff 3x = 2 \iff x = \boxed{\frac{2}{3}}$

Racines du dénominateur = valeurs interdites pour $f(x)$:

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49 = 7^2$

Le trinôme $x^2 + 3x - 10$ admet 2 racines :

$\frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5}$ et $\frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

x	$-\infty$		-5		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$3x-2$		=		−	0	+		+	
$x^2+3x-10$		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$		−	‖	+	0	−	‖	+	

2) $\boxed{S =]-5; \frac{2}{3}] \cup]2; +\infty[}$

Exercice 9 : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-5\}$, $f(x) = \dfrac{-3x^2 - x - 1}{x - 5}$

* Racines du numérateur : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = 1 - 12 = -11$

$\Delta < 0$

→ Le numérateur n'a pas de racines. Il est donc toujours du signe de -3, c'est-à-dire strictement négatif.

* Valeur interdite (racine du dénominateur) :

$x - 5 = 0 \iff x = 5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$-3x^2 - x - 1$		−		−	
$x - 5$		−	0	+	
$f(x)$		+	‖	−	

Suite de l'exercice 9 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est donc : $]-\infty ; 5[$.

Exercice 10 : (I_{13}) $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3x+2} \geqslant 0$

Recherche des valeurs interdites = les racines du trinôme $2x^2-3x+2$

$\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times 2 = 9-16 < 0$ → le trinôme n'a pas de racines réelles. Il n'y a pas de valeurs interdites : $2x^2-3x+2$ est toujours strictement positif (signe de 2)

Recherche des "zéros" = les racines du numérateur x^2-3x+2 :

$\Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times 2 = 9-8 = 1 = 1^2$

x^2-3x+2 a 2 racines : $\dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = \boxed{1}$ et $\dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = \boxed{2}$

Comme son dénominateur est toujours strictement positif, $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3x+2}$ est du signe de son numérateur :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\frac{x^2-3x+2}{2x^2-3x+2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de (I_{13}) est $S =]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$

(I_{14}) $\dfrac{x+1}{x+2} < \dfrac{2x-1}{6-x}$

△ Pas question de faire un produit en croix comme si c'était une équation, car le signe de $x+2$ et de $6-x$ est variable ! Donc on ne saurait pas s'il faut changer ou non le signe de l'inégalité.

Valeurs interdites : $x+2 = 0 \iff x = -2$

$6-x = 0 \iff 6 = x$

On résout dans $\mathbb{R} - \{-2 ; 6\}$

$(I_{14}) \iff \dfrac{(x+1)\times(6-x)}{(x+2)\times(6-x)} - \dfrac{(2x-1)\times(x+2)}{(6-x)\times(x+2)} < 0$

On peut car $6-x$ et $x+2$ sont non nuls puisqu'on résout dans $\mathbb{R} - \{-2 ; 6\}$

$(I_{14}) \iff \dfrac{-x^2+6x-x+6-(2x^2-x+4x-2)}{(x+2)(6-x)} < 0$

J'ordonne en même temps que je développe

Je développe toujours ce qui vient après un − dans une parenthèse afin de ne pas me tromper dans les signes

$(I_{14}) \iff \dfrac{-x^2+5x+6-2x^2-3x+2}{(x+2)(6-x)} < 0$

$(I_{14}) \iff \dfrac{-3x^2+2x+8}{(x+2)(6-x)} < 0$

Recherche des racines du numérateur : $\Delta = 2^2 - 4\times(-3)\times 8 = 4+96 = 100 = 10^2$

Les racines du numérateur sont : $\dfrac{-2-10}{2\times(-3)} = \dfrac{-12}{-6} = \boxed{2}$ et $\dfrac{-2+10}{-6} = \dfrac{+8}{-6} = \boxed{-\dfrac{4}{3}}$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		2		6		$+\infty$
$-3x^2+2x+8$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$6-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-3x^2+2x+8}{(x+2)(6-x)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

L'ensemble des solutions de (I_{14}) est : $\boxed{S =]-2 ; -\frac{4}{3}[\cup]2 ; 6[}$

Suite de l'exercice 10 : $(I_{15})\ \dfrac{2x+3}{x-3} + \dfrac{3x+12}{x+5} \leqslant 2$

Recherche des valeurs interdites : $x-3=0 \iff x=3$; $x+5=0 \iff x=-5$

On résout dans $\mathbb{R}-\{-5;3\}$

$$(I_{15}) \iff \frac{(2x+3)(x+5)}{(x-3)(x+5)} + \frac{(3x+12)(x-3)}{(x+5)(x-3)} - \frac{2(x+5)(x-3)}{(x+5)(x-3)} \leqslant 0$$

$$(I_{15}) \iff \frac{2x^2+3x+10x+15+3x^2+12x-9x-36-2(x^2+5x-3x-15)}{(x-3)(x+5)} \leqslant 0$$

$$(I_{15}) \iff \frac{5x^2+16x-21-2x^2-10x+6x+30}{(x-3)(x+5)} \leqslant 0$$

$$(I_{15}) \iff \frac{3x^2+12x+9}{(x-3)(x+5)} \leqslant 0$$

$$(I_{15}) \iff \frac{3(x^2+4x+3)}{(x-3)(x+5)} \leqslant 0$$

Recherche des racines du numérateur (du trinôme x^2+4x+3)

$\Delta = 4^2-4\times1\times3 = 16-12 = 4 = 2^2$

Les racines sont : $\dfrac{-4-2}{2} = \dfrac{-6}{2} = \boxed{-3}$ et $\dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$

x	$-\infty$		-5		-3		-1		3		$+\infty$
x^2+4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{3(x^2+4x+3)}{(x-3)(x+5)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

L'ensemble des solutions de (I_{15}) est $\boxed{S=]-5;-3]\cup[-1;3[}$

Exercice 11 :

$$(S)\ \begin{cases} -x^2+9x+10 \geqslant 0 & (i_1) \\ -2x+15 \leqslant 0 & (i_2) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système sera l'intersection de
S_1 = l'ensemble des solutions de (i_1)
et de S_2 = l'ensemble des solutions de (i_2)

(i_1) $-x^2+9x+10 \geqslant 0$ Cherchons les racines de $-x^2+9x+10$:

$\Delta = 9^2-4\times(-1)\times10 = 81+40 = 121 = 11^2$

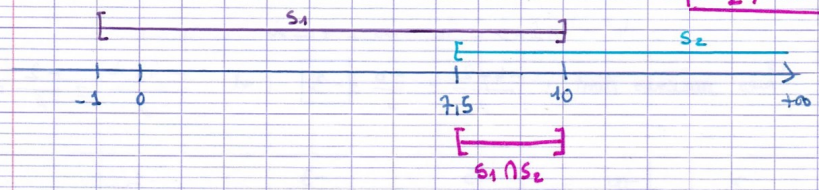
Les racines sont : $\dfrac{-9-11}{2\times(-1)} = \dfrac{-20}{-2} = \boxed{10}$ $\quad \dfrac{-9+11}{2\times(-1)} = \dfrac{2}{-2} = \boxed{-1}$

$S_1 = [-1;10]$ car $-x^2+9x+10$ est du signe de -1 en-dehors de ses racines, donc sera positif entre ses racines.

$(i_2) \iff -2x \leqslant -15 \iff x \geqslant \dfrac{15}{2}$ avec $\dfrac{15}{2} = 7{,}5$

$S_2 = \left[\dfrac{15}{2};+\infty\right[$

L'ensemble des solutions de (S) est $S_1 \cap S_2 = \boxed{\left[\dfrac{15}{2};10\right]}$



Exercice 12 : $(I_{16})\ \dfrac{-2x}{x-2} \leqslant \dfrac{3x+2}{x-1}$

Valeurs interdites : $x-2=0 \iff x=2$; $x-1=0 \iff x=1$

On résout dans $\mathbb{R}-\{1;2\}$

Suite de l'exercice 12 :

J'ai le droit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $(x-1)$ ou par $(x-2)$ car $x-1 \neq 0$ puisque $x \neq 1$ et $x-2 \neq 0$ car $x \neq 2$.

$$(I_{16}) \iff \frac{-2x(x-1)}{(x-2)(x-1)} - \frac{(3x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \leqslant 0$$

$$(I_{16}) \iff \frac{-2x^2+2x-(3x^2+2x-6x-4)}{(x-1)(x-2)} \leqslant 0$$

$$(I_{16}) \iff \frac{-2x^2+2x-3x^2-2x+6x+4}{(x-1)(x-2)} \leqslant 0$$

$$(I_{16}) \iff \frac{-5x^2+6x+4}{(x-1)(x-2)} \leqslant 0$$

Recherche des racines du numérateur : $\Delta = 6^2 - 4\times(-5)\times 4$

$\Delta = 36 + 80$

$\Delta = 116 = 4\times 29$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{29}$

Le numérateur a 2 racines :

$$\frac{-6-2\sqrt{29}}{2\times(-5)} = \frac{-6-2\sqrt{29}}{-10} = \boxed{\frac{3+\sqrt{29}}{5} \approx 1{,}68}$$

et $$\frac{-6+2\sqrt{29}}{2\times(-5)} = \frac{-3+\sqrt{29}}{-5} = \boxed{\frac{3-\sqrt{29}}{5} \approx -0{,}48}$$

Je précise, pour une fois, les valeurs approchées, afin de savoir positionner ces 2 racines par rapport à 1 et 2.

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{29}}{5}$		1		$\frac{3+\sqrt{29}}{5}$		2		$+\infty$
$-5x^2+6x+4$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-5x^2+6x+4}{(x-1)(x-2)}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty ; \frac{3-\sqrt{29}}{5}\right] \cup \left]1 ; \frac{3+\sqrt{29}}{5}\right] \cup \left]2 ; +\infty\right[}$$

$$(I_{17}) \quad \frac{3-x}{2-x} \leqslant \frac{x+2}{2x-1}$$

Valeurs interdites : $2-x=0 \iff \boxed{2=x}$

$2x-1=0 \iff 2x=1 \iff \boxed{x=\frac{1}{2}}$

On résout dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2} ; 2\right\}$

$$(I_{17}) \iff \frac{(3-x)(2x-1)}{(2-x)(2x-1)} - \frac{(x+2)(2-x)}{(2x-1)(2-x)} \leqslant 0$$

$$(I_{17}) \iff \frac{-2x^2+x+6x-3-(-x^2-2x+2x+4)}{(2-x)(2x-1)} \leqslant 0$$

$$(I_{17}) \iff \frac{-2x^2+7x-3+x^2-4}{(2-x)(2x-1)} \leqslant 0$$

$$(I_{17}) \iff \frac{-x^2+7x-7}{(2-x)(2x-1)} \leqslant 0$$

Recherche des racines du numérateur : $\Delta = 7^2 - 4\times(-1)\times(-7)$

$\Delta = 49 - 28 = 21$

Les racines du numérateur sont : $\frac{-7-\sqrt{21}}{2\times(-1)} = \boxed{\frac{7+\sqrt{21}}{2} \approx 5{,}79}$

et $\frac{-3+\sqrt{21}}{2\times(-1)} = \boxed{\frac{7-\sqrt{21}}{2} \approx 1{,}21}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7-\sqrt{21}}{2}$		2		$\frac{7+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+7x-7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x^2+7x-7}{(2-x)(2x-1)}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]\frac{1}{2} ; \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left]2 ; \frac{7+\sqrt{21}}{2}\right]}$$

Suite de l'exercice 12 : (I_{18}) $\dfrac{x^2-10x+25}{-5x^2-3x+8} \leqslant 0$

* Recherche des racines du dénominateur = des valeurs interdites :

$\Delta = (-3)^2 - 4\times(-5)\times 8 = 9 + 160 = 169 = 13^2$

Les valeurs interdites (ou racines du trinôme $-5x^2-3x+8$) sont :

$\dfrac{3-13}{2\times(-5)} = \dfrac{-10}{-10} = \boxed{1}$ et $\dfrac{3+13}{2\times(-5)} = \dfrac{16}{-10} = \boxed{-1,6 \text{ ou } -\dfrac{8}{5}}$

* Recherche des racines du numérateur : $\Delta = (-10)^2 - 4\times1\times25 = 0$

→ le numérateur est l'identité remarquable $(x-5)^2$.

Il a une racine double : $\boxed{5}$. Et il est toujours strictement positif lorsque $x \neq 5$

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		1		5		$+\infty$
$x^2-10x+25$		+		+		+	0	+	
$-5x^2-3x+8$		−	0	+	0	−		−	
$-x^2-10x+25$		−	‖	+	‖	−	0	−	
$-5x^2-3x+8$			‖		‖				

$$S =]-\infty ; -\tfrac{8}{5}[\cup]1 ; +\infty[$$

(I_{19}) $(x^2+4x-5)(-x^2+5x-7) \leqslant 0$

* Recherche des racines de x^2+4x-5 : $\Delta = 4^2 - 4\times1\times-5 = 16+20$

$\Delta = 36 = 6^2$

Les racines sont : $\dfrac{-4-6}{2} = \dfrac{-10}{2} = \boxed{-5}$ et $\dfrac{-4+6}{2} = \dfrac{2}{2} = \boxed{1}$

* Recherche des racines de $-x^2+5x-7$: $\Delta = 5^2 - 4\times(-1)\times(-7)$

$\Delta = 25 - 28 = -3$

$\Delta < 0$ → Le trinôme $-x^2+5x-7$ n'admet pas de racine réelle. Il est donc toujours du signe de -1 (le coefficient de x^2) c'est-à-dire strictement négatif.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
x^2+4x-5		+	0	−	0	−	
$-x^2+5x-7$		−		−		−	
$(x^2+4x-5)(-x^2+5x-7)$		−	0	+	0	−	

$$S =]-\infty ; -5] \cup [1 ; +\infty[$$

(I_{20}) $(-x^2+10x-25)(4x^2+12x+9) \geqslant 0$

↓

identité remarquable $-(x-5)^2$ → toujours négatif et s'annule uniquement pour $x=5$

Bien sûr, on pourrait aussi calculer les discriminants : les deux sont nuls, et trouver pour chaque trinôme sa racine double avec la formule $\frac{-b}{2a}$

$4x^2+12x+9$ → identité remarquable $(2x+3)^2$ → toujours positif et s'annule uniquement pour $x = -\frac{3}{2}$

Le produit $(-x^2+10x-25)(4x^2+12x+9) = -(x-5)^2(2x+3)^2$ est donc toujours négatif, et il ne s'annule que pour $x = -\frac{3}{2}$ et pour $x = 5$.

C'est pourquoi on a : $\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2} ; 5\right\}}$

↑ ↑

$-\frac{3}{2}$ et 5 sont les seules solutions de cette inéquation.

(I_{21}) $(x^2+5)(-2x^2+3x-1)>0 \iff -2x^2+3x-1>0$

car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+5>0$: multiplier $-2x^2+3x-1$ par x^2+5 ne change pas son signe.

Cherchons les racines de $-2x^2+3x-1$:

$\Delta = 3^2 - 4\times(-2)\times(-1) = 9-8 = 1 = 1^2$

Les racines sont : $\frac{-3-1}{2\times(-2)} = \frac{-4}{-4} = \boxed{1}$ et $\frac{-3+1}{2\times(-2)} = \frac{-2}{-4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]\frac{1}{2};1\right[}$$

(I_{22}) $(x+1)(2x-3) \geqslant (x+1)(3x^2-3x-5)$

$(I_{22}) \iff (x+1)(2x-3)-(x+1)(3x^2-3x-5) \geqslant 0$

$(I_{22}) \iff (x+1)\left[2x-3-3x^2+3x+5\right] \geqslant 0$

$(I_{22}) \iff (x+1)(-3x^2+5x+2) \geqslant 0$

* $x+1$ s'annule pour $\boxed{x=-1}$

* Cherchons les racines de $-3x^2+5x+2$:

$\Delta = 5^2 - 4\times(-3)\times 2 = 25+24 = 49 = 7^2$

Les racines du trinôme sont donc : $\frac{-5-7}{2\times(-3)} = \frac{-12}{-6} = \boxed{2}$

et $\frac{-5+7}{2\times(-3)} = \frac{2}{-6} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-3x^2+5x+2$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x+1)(-3x^2+5x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S =]-\infty;-1] \cup \left[-\frac{1}{3};2\right]}$$

(I_{23}) $\dfrac{2x^2-12x-17}{-x+4} \leqslant 1$

Valeur interdite : $-x+4=0 \iff -x=-4 \iff \boxed{x=4}$

On résout dans $\mathbb{R}-\{4\}$

$(I_{23}) \iff \dfrac{2x^2-12x-17}{-x+4} - \dfrac{1\times(-x+4)}{-x+4} \leqslant 0$

$(I_{23}) \iff \dfrac{2x^2-12x-17+x-4}{-x+4} \leqslant 0$

$(I_{23}) \iff \dfrac{2x^2-11x-21}{-x+4} \leqslant 0$

Cherchons les racines du numérateur $2x^2-11x-21$:

$\Delta = (-11)^2 - 4\times 2\times(-21) = 121+168 = 289 = 17^2$

Les racines sont : $\frac{11-17}{2\times 2} = \frac{-6}{4} = \boxed{-\frac{3}{2}}$ et $\frac{11+17}{2\times 2} = \frac{28}{4} = \boxed{7}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		4		7		$+\infty$
$2x^2-11x-21$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{2x^2-11x-21}{-x+4}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left[-\frac{3}{2};4\right[\cup [7;+\infty[}$$

Suite de l'exercice 12 : (I_{24}) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{3-x^2} \geqslant 0$

Valeurs interdites : $x+2=0 \iff \boxed{x=-2}$

$3-x^2=0 \iff 3=x^2$

$\iff \boxed{x=\sqrt{3}}$ ou $\boxed{x=-\sqrt{3}}$ $\quad \sqrt{3} \approx 1{,}73$ $\quad -\sqrt{3} \approx -1{,}73$

On résout dans $\mathbb{R} - \{-2 ; -\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$

$(I_{24}) \iff \dfrac{1\times(3-x^2)}{(x+2)\times(3-x^2)} + \dfrac{1\times(x+2)}{(3-x^2)\times(x+2)} \geqslant 0$

$(I_{24}) \iff \dfrac{3-x^2+x+2}{(x+2)(3-x^2)} \geqslant 0$

$(I_{24}) \iff \dfrac{-x^2+x+5}{(x+2)(3-x^2)} \geqslant 0$

On cherche les racines du numérateur $-x^2+x+5$:

$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 5 = 1+20 = 21$

Les racines sont : $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2\times(-1)} = \boxed{\dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \approx 2{,}79}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{21}}{-2} = \boxed{\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \approx -1{,}79}$

	$-\infty$		-2		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$3-x^2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{-x^2+5x+5}{(x+2)(3-x^2)}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]-2 ; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left]-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2} ; +\infty\right[}$$

(I_{25}) $\dfrac{x^2}{x+2} > 1$

La tentation est grande de multiplier les 2 membres par $x+2$ comme on le ferait pour une équation, mais il ne faut surtout pas le faire car $x+2$ n'est pas de signe constant : on ne saurait pas s'il faut changer ou non le sens de l'inégalité !

Valeur interdite : $x+2=0 \iff \boxed{x=-2}$

On résout dans $\mathbb{R} - \{-2\}$

$(I_{25}) \iff \dfrac{x^2}{x+2} - \dfrac{1\times(x+2)}{x+2} > 0$

$(I_{25}) \iff \dfrac{x^2-x-2}{x+2} > 0$

Cherchons les racines du numérateur : $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times(-2)$

$= 1+8 = 9 = 3^2$

Les racines sont : $\dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$ et $\dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = \boxed{2}$

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-x-2}{x+2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-2 ; -1[\cup]2 ; +\infty[}$$

(I_{26}) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{3}{x} \leqslant -2$

Valeurs interdites : $x+2=0 \iff \boxed{x=-2}$ ou $\boxed{x=0}$

On résout dans $\mathbb{R} - \{-2 ; 0\}$

$(I_{26}) \iff \dfrac{1\times x}{(x+2)\times x} + \dfrac{3\times(x+2)}{x\times(x+2)} + \dfrac{2\times x\,(x+2)}{x\,(x+2)} \leqslant 0$

$(I_{26}) \iff \dfrac{x+3x+6+2x^2+4x}{x\,(x+2)} \leqslant 0$

Suite de l'exercice 12, résolution de I_{26} :

(dans $\mathbb{R}-\{-2;0\}$) $(I_{26}) \iff \dfrac{2x^2+8x+6}{x(x+2)} \leqslant 0 \iff \dfrac{x^2+4x+3}{x(x+2)} \leqslant 0$

en divisant les 2 membres par 2

Cherchons les racines de x^2+4x+3 : $\Delta = 4^2 - 4\times1\times3 = 16-12 = 4 = 2^2$

Les racines sont : $\dfrac{-4-2}{2\times1} = \dfrac{-6}{2} = \boxed{-3}$ et $\dfrac{-4+2}{2\times1} = \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
x^2+4x+3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+4x+3}{x(x+2)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$S = [-3;-2[\cup [-1;0[$$

(I_{27}) $\dfrac{-3x+1}{2-x} \leqslant \dfrac{-4x+5}{x+3}$ Valeurs interdites : $2-x=0 \iff \boxed{2=x}$; $x+3=0 \iff \boxed{x=-3}$

On résout dans $\mathbb{R}-\{-3;2\}$

$$(I_{27}) \iff \frac{(-3x+1)(x+3)}{(2-x)(x+3)} - \frac{(-4x+5)(2-x)}{(x+3)(2-x)} \leqslant 0$$

$$(I_{27}) \iff \frac{-3x^2-9x+x+3-(4x^2-8x-5x+10)}{(2-x)(x+3)} \leqslant 0$$

$$(I_{27}) \iff \frac{-3x^2-8x+3-4x^2+13x-10}{(2-x)(x+3)} \leqslant 0$$

$$(I_{27}) \iff \frac{-7x^2+5x-7}{(2-x)(x+3)} \leqslant 0$$

Recherche des racines du numérateur : $\Delta = 5^2 - 4\times(-7)\times(-7)$

$\Delta = 25 - 196$

$\Delta < 0$ donc $-7x^2+5x-7$ n'a pas de racine réelle. Il est donc toujours du signe de -7, c'est-à-dire strictement négatif.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-7x^2+5x-7$		$-$		$-$		$-$	
$(2-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-7x^2+5x-7}{(2-x)(x+3)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$$S =]-3;2[$$