2nde – Ch III– Géométrie Plane – Théorèmes et rappels sur les angles

I- Le théorème de Pythagore est sa réciproque.

Hypothèses = « ce qu'on sait » = conditions à vérifier pour pouvoir appliquer le théorème Conclusion = « ce qu'on démontre » = ce que permet d'affirmer le théorème une fois les hypothèses vérifiées *Dans chaque théorème du cours, souligner en bleu la partie correspondant aux hypothèses et en vert la partir correspondant aux conclusions.* Théorème de Pythagore : Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Réciproque du théorème de Pythagore : Si, dans un triangle ABC, on a l'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A.	*Pour chaque théorème du cours, faire une figure en codant ou écrivant les hypothèses en bleu et en codant ou écrivant la conclusion en vert.*

Remarque : La réciproque d'un énoncé P ⇒ Q (P implique Q) est l'énoncé Q ⇒ P.
Quand les deux énoncés (direct + réciproque) sont vrais, on a équivalence : P ⇔ Q.

II- Le théorème de Thalès et sa réciproque.

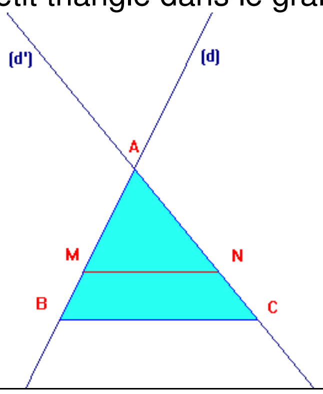
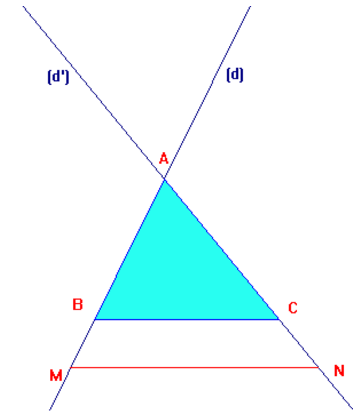
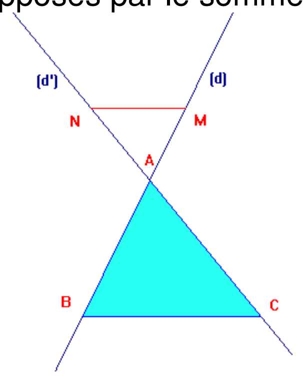
Théorème de Thalès : Si les trois conditions suivantes sont vérifiées : • A, M, B sont trois points alignés • A, N, C sont trois points alignés • (MN)//(BC) Alors la triple égalité suivante est vraie : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$	

Penser : « les mesures des côtés du petit triangle sont proportionnelles aux mesures respectives des côtés du grand triangle ».

Remarque : c'est vrai pour tous les cas de triangles semblables, dont les configurations de Thalès présentent un cas particulier.

<u>Réciproque du théorème de Thalès</u> : Si les trois conditions suivantes sont vérifiées : • A, M, B sont trois points alignés • A, N, C sont trois points alignés <u>dans le même ordre que les précédents</u> • $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ Alors (MN)//(BC)	

<u>Configurations de Thalès</u> :

Configuration vue en 4° : Le petit triangle dans le grand.	M et N au-delà de B et C	Triangles AMN et ABC opposés par le sommet
		

III- <u>Théorèmes des milieux</u>

<u>Théorèmes des milieux</u> :

1- Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle à son troisième côté

<u>Exemple</u> : ABC est un triangle. I est le milieu de [AB] et J celui de [AC]. Alors, d'après le théorème des milieux, (IJ)//(BC)

2- Si un segment relie les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa mesure est égale à la moitié de la mesure du troisième côté

Exemple : ABC est un triangle. I est le milieu de [AB] et J celui de [AC].
Alors, d'après le théorème est milieux,
$IJ = \frac{1}{2} BC$.

Remarque : ce théorème est un cas particulier du théorème de Thalès.

3- Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et si elle est parallèle à un deuxième côté de ce triangle, alors elle coupe le troisième côté du triangle en son milieu.

Exemple : si, dans un triangle ABC, une droite (d) passe par le milieu de [AB] et est parallèle à (BC), alors, elle coupe [AC] en son milieu.

IV- Centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle.

Théorème :
Si un triangle est rectangle, alors le milieu de son hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.

Réciproque du théorème précédent : Si le milieu d'un des côtés d'un triangle est le centre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle.

Supplément sur l'implication et l'équivalence logiques :

$P \Rightarrow Q$ « P implique Q », se traduit en français par : « Si P alors Q »
« $\Rightarrow$ » peut se traduire par « donc » si P est vraie dans le contexte.
Exemple : $d \perp d'$ et $d \perp d''$ $\Rightarrow$ (donc) $d' \,//\, d''$

« $\Leftrightarrow$ » se dit « équivaut à » , et on l'exprime souvent par la locution « si et seulement si »
Exemple : ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

V- Divers résultats concernant les angles.

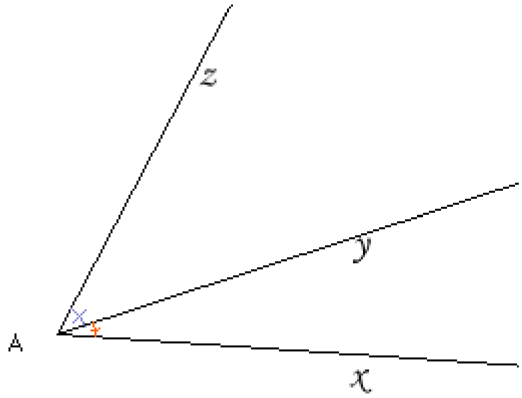
V-1) Rappels de vocabulaire :

Angle saillant : mesure entre 0 et 180°.
Angle rentrant : mesure entre 180° et 360°

Angle aigu : mesure entre 0 et 90 °
Angle obtus : mesure entre 90° et 180°.

Angles complémentaires = angles dont la somme fait 90°
Angles supplémentaires = angles dont la somme fait 180°.

Angles adjacents = angles de même sommet, extérieurs l'un à l'autre, et ayant un côté commun. (ci-contre)



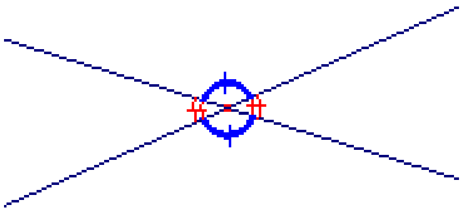
V-2) Somme des angles d'un triangle.

Théorème : La somme des angles d'un triangle vaut 180° ou π rad.

V-3) Cas d'angles égaux.

V-3-1) Angles opposés par le sommet.

Définition : deux angles sont opposés par le sommet quand :
- Ils ont le même sommet
- Ils ont leurs côtés dans le prolongement l'un de l'autre

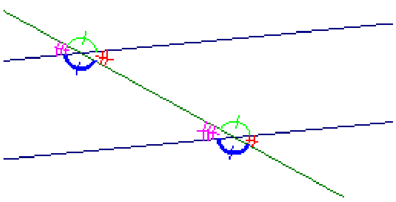


Propriété : Des angles opposés par le sommet ont même mesure.

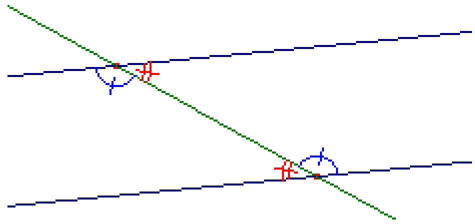
V-3-2) Parallèles coupées par une sécante.

Angles correspondants

Sur la figure ci-contre, les angles de même couleur sont dits **correspondants**, car ils sont **situés du même côté par rapport à la sécante et à chacune des deux parallèles**.



Angles alternes-internes

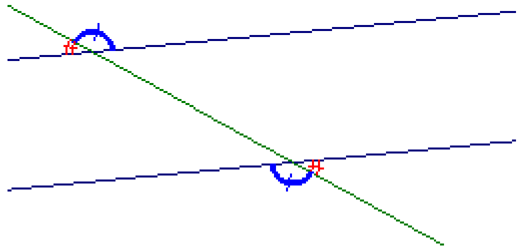


Les angles rouges sont dits **alternes-internes**.

" internes " parce qu'ils **sont à l'intérieur des parallèles**, et " alternes " parce qu'ils se **situent de part et d'autre de la sécante.**

Remarque : les angles bleus le sont aussi.

Angles alternes-externes



Les angles rouges sont dits **alternes-externes**.
" externes " parce qu'ils sont **à l'extérieur des parallèles**, et " alternes " parce qu'ils se situent **de part et d'autre de la sécante**.

Remarque : les angles bleus le sont aussi.

Propriété : Des angles correspondants, alternes-internes ou alternes-externes sont égaux si et seulement si les « parallèles » sont effectivement parallèles.

(car les mots « correspondants », « alternes-internes » ou « alternes-externes » s'emploient aussi lorsque les droites coupées par la sécante ne sont pas parallèles. Pour qu'il y ait égalité des angles, il faut et il suffit qu'il y ait parallélisme)

V -4) Angles inscrits dans un cercle. + Angle au centre

Théorèmes :

Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.

Dans un cercle, l'angle au centre qui intercepte un arc mesure le double de tout angle inscrit interceptant le même arc.

V-5)- Trigonométrie dans le triangle rectangle.

$\text{Sin } \widehat{B} = \dfrac{\text{côté Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

$\text{Cos } \widehat{B} = \dfrac{\text{côté Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

$\text{Tan } \widehat{B} = \dfrac{\text{côté Opposé}}{\text{côté Adjacent}}$ SohCahToa

$\text{Tan } \widehat{B} = \dfrac{\text{côté Opposé}}{\text{côté Adjacent}}$ SohCahToa