2nde – Chapitre V – Les ensembles de nombres

I- ℕ, ℤ, ID, ℚ, ℝ

ℕ est l'ensemble des **entiers naturels** (c'est-à-dire, positifs)
ℕ = { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … }

ℤ est l'ensemble des **entiers relatifs**, c'est-à-dire positifs ou négatifs
ℤ = { …. ; – 3 ; – 2 ; – 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 … }

ID est l'ensemble des **décimaux**.
Il comprend tous les entiers (positifs ou négatifs)
Et aussi tous les nombres « à virgule » dont le nombre de chiffres après la virgule est fini.

ℚ est l'ensemble des **rationnels**
C'est-à-dire tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers.

ℝ est l'ensemble des **réels**. Il comprend tous les rationnels, et aussi les irrationnels, nombres ne pouvant pas s'écrire comme un quotient de deux entiers. Par exemple : π et tous les radicaux d'entiers qui ne sont pas des carrés parfaits ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc …)

On représente les réels sur la droite des réels :
(schéma)

Les limites sont $\boxed{-\infty}$ **(« moins l'infini »),** supposé inférieur à tous les réels, et $\boxed{+\infty}$ (**« plus l'infini »),** supposé supérieur à tous les réels)

Symboles d'appartenance et de non-appartenance :

Le symbole « ∈ » signifie **« appartient à » ou « est élément de »**
Il s'emploie entre un élément et un ensemble qui le contient.

Exemple : 5 ∈ ℕ. (5 appartient à l'ensemble des entiers naturels)

« ∉ » signifie **« n'appartient pas à »** ou **« n'est pas élément de »**

Exemple : – 5 ∉ ℕ (mais – 5 ∈ ℤ)

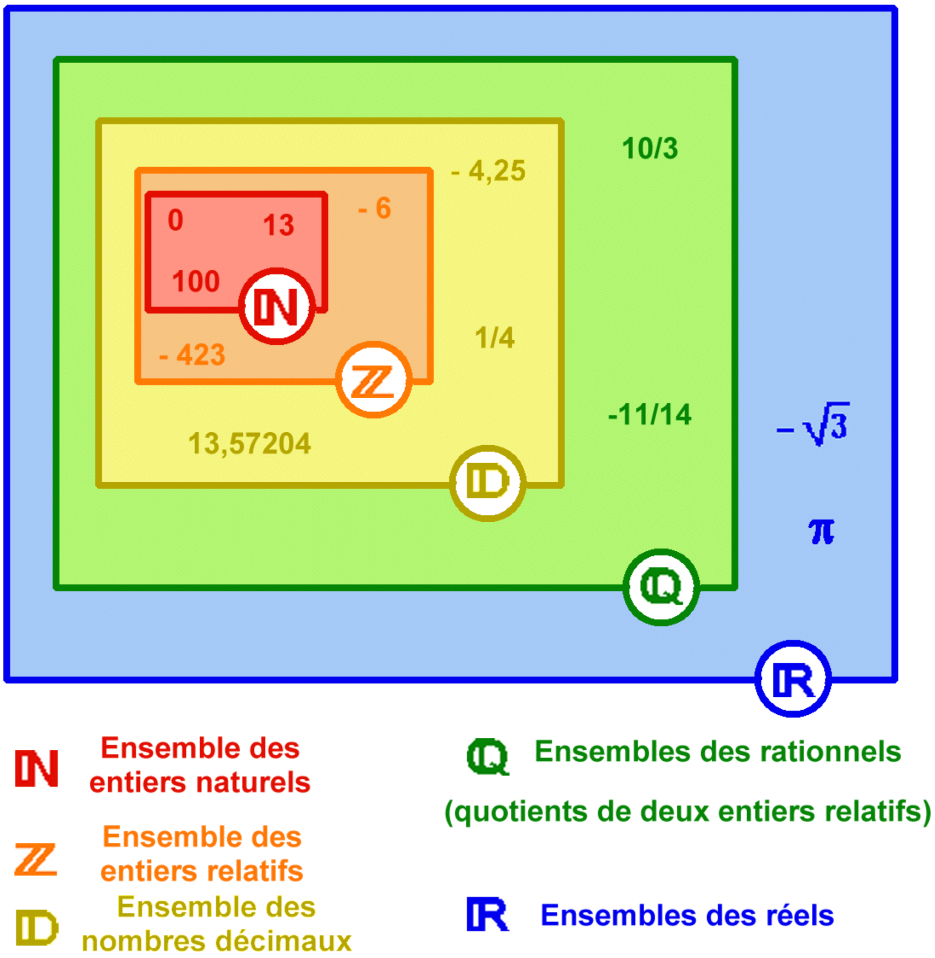
Symboles d'inclusion et de non-inclusion :

« ⊂ » signifie « est inclus dans ». Il s'emploie entre deux ensembles.

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, et on note A ⊂ B, lorsque tous les éléments de A appartiennent aussi à B. *(schéma)*

Lorsque ce n'est pas vrai (c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément de A qui n'appartient pas à B), on note $A \not\subset B$ *(schéma)*

Ici, on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
(car tout entier naturel est un entier relatif, tout entier relatif est un décimal, etc…)



$\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ sont les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ privés de zéro. $\mathbb{R} = \mathbb{R} - \{0\}$

Remarques :

- Rationnel/Irrationnel

Le développement décimal (= quand on écrit le nombre avec une virgule et des chiffres) d'un rationnel est périodique : à partir d'un certain moment, la même série de chiffres se répète après la virgule, jusqu'à l'infini. Si le rationnel est décimal, il s'agit de 0.

Exemples : $\frac{4}{11} = 0,\ 36\ 36\ 36\ 36\ \ldots$ $\qquad \frac{70}{13} = 5,\ 384615\ 384615\ 384615\ \ldots$

$\frac{31}{25} = 1,24\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$ (c'est un décimal)

- Rationnel/décimal

Si $\frac{p}{q}$ est une fraction simplifiée, $\frac{p}{q}$ sera décimal lorsque la décomposition en facteurs premiers de q est composée uniquement de 2 et de 5.

II- Intersection et union.

A et B sont des ensembles (de nombres par exemple)

$\boxed{A \cap B}$ (A « inter » B) est l'ensemble des nombres appartenant à la fois à A $\boxed{\text{et}}$ à B.
C'est **l'intersection** des ensembles A et B. *(schéma)*

$\boxed{A \cup B}$ (A « union »B) est l'ensemble des nombres appartenant à A $\boxed{\text{ou}}$ à B (au moins l'un des deux, voire les deux)

C'est la **réunion** des ensembles A et B. *(schéma)*

Exemple : $A = \{ 2 ; 4 ; 6 ; 10 \}$ $B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 \}$
$A \cap B = \{ 2 ; 4 \}$ $A \cup B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 \}$ *(schéma)*

On a toujours : $A \cap B \subset A \cup B$

III- Intervalles

On a vu que, quand on écrit un ensemble de nombres avec des valeurs isolées, on emploie des { } et des « ; » pour séparer les valeurs.

Un ensemble contenant un et un seul élément est appelé **singleton**. Exemple : {4}
L'ensemble qui ne contient aucun élément est **l'ensemble vide**, { }, noté $\varnothing$.

Les **intervalles**, notés entre crochets, sont des ensembles de toutes les valeurs comprises entre deux valeurs données.

Exemples : [2 ; 5] comprend tous les nombres compris entre 2 et 5, 2 et 5 compris.
(schéma)

$2 \in [2 ; 5]$ $5 \in [2 ; 5]$ $2{,}7 \in [2 ; 5]$ $\pi \in [2 ; 5]$

] 2 ; 5 [comprend tous les nombres compris entre 2 et 5, 2 et 5 non-compris. *(schéma)*

Dans] 2 ; 5], 2 est non-compris et 5 compris. *(schéma)*

L'ensemble de tous les nombres supérieurs ou égaux à 4 sera l'intervalle $[4 ; +\infty [$
L'ensemble de tous les nombres strictement supérieurs à 4 sera l'intervalle $[4 ; +\infty [$
L'ensemble de tous les nombres inférieurs ou égaux à 4 sera l'intervalle $] -\infty ; 4]$
L'ensemble de tous les nombres strictement supérieurs à 4 sera l'intervalle $] -\infty ; 4 [$
(schémas)

Remarque : $+\infty$ et $-\infty$ n'étant pas des réels, ils sont non-compris dans les intervalles : les crochets sont toujours ouverts.