2007/2008 – 2nde 3 – Corrigé de Devoir-Maison n°3 – Pour le 12/11/07

Exercice 1 : 1) a) On applique le théorème de Pythagore au triangle LIK rectangle en I.

$LK^2 = LI^2 + IK^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$

Comme LK est une longueur (donc un nombre positif), $LK = \sqrt{\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

1)b) $OP = OL + LP = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

2) $\boxed{\varphi - 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{\frac{1}{\varphi}}$ = l'inverse de φ

$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}$

$\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ donc on a bien $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$

Exercice 2 : Soit x le nombre d'œufs que la fermière possédait au départ (avant la casse).

Elle casse $\frac{1}{5}$ x, donc il lui reste, après la casse, $x - \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}x$ œufs.

Elle vend $\frac{1}{3}$ de ce qu'elle avait avant la casse, soit $\frac{1}{3}x$.

Donc il lui reste, après la vente, $\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}x = \frac{4\times3}{5\times3}x - \frac{1\times5}{3\times5}x = \frac{12}{15}x - \frac{5}{15}x = \frac{7}{15}x$ œufs.

Elle donne alors $\frac{1}{7}$ des œufs qui lui restent, soit $\frac{1}{7}\times\frac{7}{15}x = \frac{1}{15}x$ œufs.

Il lui reste alors $\frac{7}{15}x - \frac{1}{15}x = \frac{6}{15}x = \frac{2}{5}x$ œufs, ou 48 œufs d'après l'énoncé.

On a donc : $\frac{2}{5}x = 48 \Leftrightarrow x = \frac{48\times5}{2} = 120$

Avant de partir au marché, la fermière Angèle avait 120 oeurfs.

Exercice 3 : 1)a) Pour n = 0, $2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$ qui est un nombre premier.

Pour n = 1, $2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ qui est un nombre premier.

Pour n = 2, $2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$ qui est un nombre premier.

Pour n = 3, $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$

On peut vérifier que 257 est un nombre premier en vérifiant qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à 17. Comme 257/17 < 17, on en déduit que 257 est premier.

1)b) $2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967296+1=4294967297$
4294967297 / 641 = 6700417
Ce nombre n'est pas premier car il admet 641 et 6700417 comme diviseurs.

La conjecture de Fermat (le fait que tous les nombres de la forme $2^{2^n}+1$ où $n \in \mathbb{N}$ soient premiers) d'avère donc fausse.

2) Pour prouver que cette règle est fausse, il suffit de trouver un entier n tel que $2^n - 1$ n'est pas un nombre premier.
$2^0 - 1 = 0$ n'est pas un nombre premier. Donc la règle est fausse…

Serait-elle vraie pour tout entier naturel n différent de 0 ?
$2^1 - 1 = 1$ qui peut être considéré comme un nombre premier, quoi que d'habitude on les énonce en commençant par 2.
$2^2 - 1 = 3$ qui est premier.
$2^3 - 1 = 7$ qui est premier.
$2^4 - 1 = 15$ qui n'est pas premier. $15 = 5 \times 3$
La réponse est donc négative : tous les nombres de Mersenne ne sont pas premiers.

Exercice 4 : 1) $(x-14)^2 - 4 = x^2 - 28x + 196 - 4 = x^2 - 28x + 192$ CQFD
2) $(x-14)^2 - 4 = (x-14)^2 - 2^2 = (x - 14 - 2)(x - 14 + 2) = (x-16)(x-12)$
3) Pour tout point M du demi-cercle $\mathcal{C}$, AMB sera un triangle rectangle en M, d'après le théorème « Si, dans un cercle, un triangle a pour sommets les extrémités d'un diamètre et un autre point du cercle, alors le triangle est rectangle en cet autre point ».

AMB sera rectangle en M, donc, d'après le théorème de Pythagore, on aura :
$AM^2 + MB^2 = AB^2$. avec $AB^2 = 20^2 = 400$.

On pose AM = x
On veut que AM + MB = 28, c'est-à-dire x + MB = 28, donc MB = 28 − x.

$AM^2 + MB^2 = AB^2$ peut alors s'écrire $x^2 + (28-x)^2 = 400$

$$
\begin{aligned}
x^2 + (28-x)^2 = 100 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 28^2 - 2 \times 28 \times x + x^2 = 400\\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 784 - 56x = 400\\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 56x + 384 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 28x + 192 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (x-16)(x-12) = 0 \text{ (questions 1 et 2)}\\
&\Leftrightarrow \quad x = 16 \text{ ou } x = 12
\end{aligned}
$$