

2^{nde} 4 – Devoir Maison n°6 – Pour le jeudi 8 janvier 2008

Ce devoir maison a pour objectif de vous faire découvrir les tableaux de signes qui sont un outil indispensable à la résolution de certaines inéquations.

Rappel : $m > 0$ signifie « Le nombre m est strictement positif », donc de signe +
 $m < 0$ signifie « Le nombre m est strictement négatif », donc de signe –

Exercice 1 : Signe des expressions $ax + b$, où $a \neq 0$.

12 points

1- Etude d'un exemple: $2x + 3$ ($a = 2$, $b = 3$)

a) Résoudre dans \mathbb{R} : $2x + 3 > 0$, $2x + 3 = 0$ et $2x + 3 < 0$.

b) Construire la droite des réels et colorier :
 • en vert les x pour lesquels $2x + 3$ est positif
 • en bleu le nombre x pour lequel $2x + 3 = 0$
 • en rouge les x pour lesquels $2x + 3$ est négatif

Au lieu de colorier une droite avec un code couleurs, on met ces résultats dans un tableau de signes dont la première ligne représente la droite des réels et la seconde indique le signe de $2x + 3$:

x	$-\infty$	$-1,5$		$+\infty$
$2x + 3$		–	0	+

Remarque :

On place **d'abord le 0** sous $-1,5$, **puis le – et le +** dans les intervalles
 $] - \infty ; -1,5 [$ et $] -1,5 ; + \infty [$

2- Etude d'un autre exemple : $-5x + 10$.

a) Résoudre $-5x + 10 > 0$, $-5x + 10 = 0$ et $-5x + 10 < 0$

b) Construire le tableau de signes de $-5x + 10$

3- Cas général : Dans un premier temps, **on suppose que $a > 0$** . a et b sont des nombres fixés, x est l'inconnue.

a) Résoudre $ax + b = 0$ (la solution de l'équation sera exprimée en fonction de a et de b). Puis $ax + b > 0$ et $ax + b < 0$

b) Construire le tableau de signes de $ax + b$

4- Reprendre la question 3 **en supposant cette fois que $a < 0$**

Retenir : pour tout nombre $a \neq 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a

La solution de l'équation $ax + b = 0$

le signe de a **à droite** du zéro

Exercice 2 : Utilisation d'un tableau de signes pour résoudre des inéquations-produits à second membre nul.

Voici un exemple : On veut résoudre l'inéquation-produit à second membre nul :

$$\text{produit} \rightarrow (2x - 8)(-3x + 9) \leq 0 \leftarrow \text{Second membre nul}$$

1^{ère} étape : on résout les équations $-3x + 9 = 0$ et $2x - 8 = 0$ pour trouver les « zéros » du produit (c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles le produit vaut 0)

$$2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow \boxed{x = 4}$$

Remarque : cela ressemble à une

$$-3x + 9 = 0 \Leftrightarrow -3x = -9 \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$$

recherche de valeurs interdites.

2^{ème} étape : on construit le tableau de signes du produit $(2x - 8)(-3x + 9)$

On place dans l'ordre croissant les « zéros » (ici : 3 et 4) trouvés à l'étape 1
Remarque : dans ce tableau, \mathbb{R} est partagé en 3 intervalles par les valeurs 3 et 4

x	$-\infty$	3		4	∞	
$2x - 8$		-		0	+	
$-3x + 9$		+	0	-	-	
$(2x-8)(-3x+9)$		-	0	+	0	-

On remplit ces deux lignes comme on appris à l'exercice 1, en plaçant d'abord les zéros, puis le « signe de a » à droite et le « signe de -a » à gauche) Remarque : le zéro de $2x - 8$ est 4, celui de $-3x + 9$ est 3.

Pour remplir la ligne $(2x-8)(-3x+9)$, on place d'abord les zéros sous 3 et 4 – là où le produit est nul -, puis on complète avec des + et des - dans les intervalles à l'aide de la règle des signes¹.

Cette ligne nous indique le signe de $(2x-8)(-3x+9)$, c'est-à-dire :

- 0 si $x = 3$ ou 4
- Positif (+) si $x \in] 3 ; 4 [$
- Négatif si $x \in] -\infty ; 3 [$ ou $] 4 ; +\infty [$

3^{ème} étape : on lit dans la dernière ligne du tableau les intervalles qui correspondent au signe cherché dans l'inéquation.

L'inéquation est $(2x - 8)(-3x + 9) \leq 0$, on cherche donc les x pour lesquels le produit est négatif ou nul. On lit donc dans le tableau les intervalles pour lesquelles $(2x-8)(-3x+9)$ a des - (négatif) et des 0 (nul) : $S =] -\infty ; 3] \cup [4 ; +\infty [$ ²

Question 1 : à partir de ce même tableau de signe, donner les ensembles de solutions des inéquations :
 $(2x - 8)(-3x + 9) < 0$ $(2x - 8)(-3x + 9) > 0$ et $(2x - 8)(-3x + 9) \geq 0$ **1,5 pt**

Question 2 : A vous de résoudre les inéquations (avec les 3 étapes) :

6 points

(I₁) $(-5x - 10)(x + 7) \geq 0$

(I₂) $(-3x - 12)(2x - 1) < 0$

(I₃) $(-3x - 12)(2x - 1) > 0$

0,5 point : présentation, lisibilité

¹ Règles des signes, rappel :
 $(+ \dots) \times (+ \dots) = (+ \dots)$
 $(+ \dots) \times (- \dots) = (- \dots)$
 $(- \dots) \times (+ \dots) = (- \dots)$
 $(- \dots) \times (- \dots) = (+ \dots)$

² Si on écrit \cup , c'est que x doit appartenir à l'intervalle $] -\infty ; 3 [$ **[ou]** à l'intervalle $] 4 ; +\infty [$