2007/2008 – 2nde 3 - Corrigé du devoir surveillé n°7 – Sujet A

Exercice 1 : 1) Dh = [− 5 ; 5]

2) h admet un minimum pour $\boxed{x = -1{,}5}$. Ce minimum est $\boxed{-2{,}5}$.

3) $\boxed{h(-4) = 1{,}5}$ $\boxed{h(0{,}5) = 0}$ $\boxed{h(3) = 2}$

4) Les antécédents de 3 par la fonction h sont : − 5, 1,5 et 2,5.
Ce sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est 3.

5)

x	− 5		− 3		0,5		4		5
h(x)		+	0	−	0	+	0	−	

6)

x	− 5		− 1,5		2		5
h(x)	3	↘		↗	3,5	↘	
			− 2,5				− 2

Exercice 2 : f est définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{20}{x^2 + 4}$

1) Pour tout x appartenant à ℝ, − x appartient aussi à r.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{20}{(-x)^2 + 4} = \dfrac{20}{x^2 + 4} = f(x)$

f est paire. Sa courbe représentative sera donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) a) a et b appartiennent à [0 ; + ∞ [et $\boxed{a < b}$.

$$f(a) - f(b) = \frac{20}{a^2 + 4} - \frac{20}{b^2 + 4} = \frac{20\,(b^2 + 4)}{(a^2 + 4)(b^2 + 4)} - \frac{20\,(a^2 + 4)}{(b^2 + 4)(a^2 + 4)}$$

$$= \frac{20\,(b^2 + 4) - 20(a^2 + 4)}{(a^2 + 4)(b^2 + 4)} = \frac{20\,b^2 + 80 - 20\,a^2 - 80}{(a^2 + 4)(b^2 + 4)}$$

$$= \frac{20b^2 - 20a^2}{(a^2 + 4)(b^2 + 4)} = \frac{20\,(\,b^2 - a^2\,)}{(a^2 + 4)(b^2 + 4)} = \boxed{\frac{20\,(\,b + a\,)\,(\,b - a\,)}{(a^2 + 4)(b^2 + 4)}}$$

b) 20 est strictement positif.
(b + a) est strictement positif car a et b sont dans [0 ; + ∞ [et b > a donc b > 0
b − a est strictement positif car a < b.
$a^2 \geq 0$ (carré) donc $a^2 + 4$ est strictement positif.
De même pour $b^2 + 4$.
D'après la règle des signes, f(a) − f(b) est donc strictement positif ; Donc f(a) > f(b).

c) Sur [0 ; + ∞ [, si a < b, on a f(a) > f(b). f change l'ordre. Elle est donc strictement décroissante sur [0 ; + ∞ [

d) f est paire et elle est strictement décroissante sur [0 ; + ∞ [. Par symétrie de sa courbe par rapport à l'axe des ordonnées, elle sera strictement croissante sur] − ∞ ; 0]

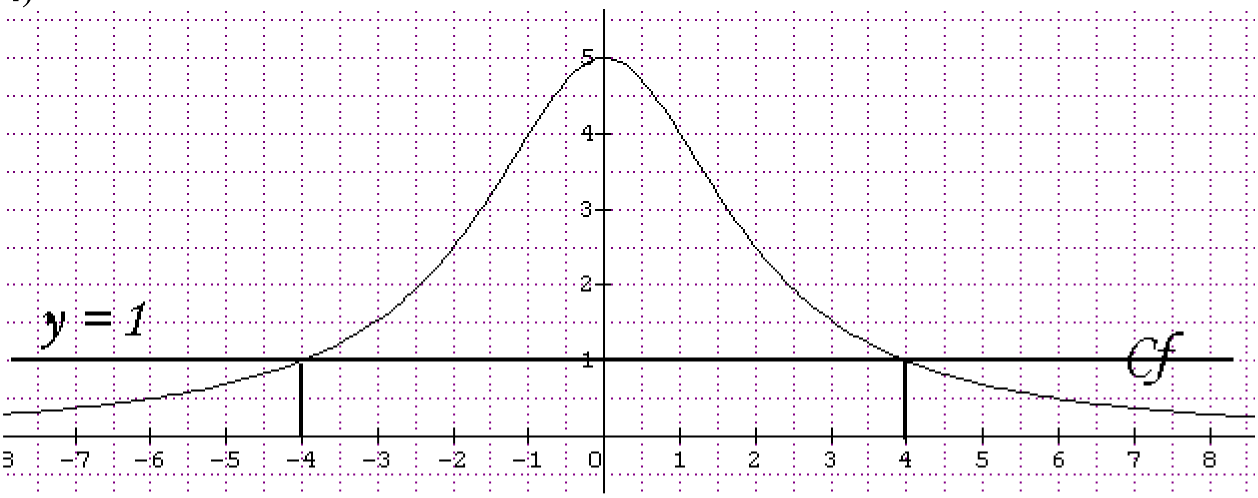
e)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		↗	5	↘	

3)

x	0	0,5	1	2	3	4	5
f(x)	5	4,7	4	2,5	1,5	1	0,7

4)



5) $f(x) \leq 1$. Les solutions sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 1. $S =]-\infty\,;-4] \cup [4\,;+\infty[$

6) Par le calcul : $f(x) \leq 1$ signifie $\dfrac{20}{x^2+4} \leq 1$ (I).

(I) $\Leftrightarrow 20 \leq x^2 + 4$ (on peut multiplier les deux membres par $x^2 + 4$ car c'est un nombre strictement positif : la somme d'un carré et de 4 qui est strictement positif)

(I) $\Leftrightarrow 16 \leq x^2$

(I) $\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 16$

(I) $\Leftrightarrow 0 \leq (x+4)(x-4)$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
x + 4		$-$	0	+		+	
x − 4		$-$		$-$	0	+	
(x+4)(x−4)		+	0	$-$	0	+	

$S =]-\infty\,;-4] \cup [4\,;+\infty[$

Exercice 1 : 1) Dh = [– 4 ; 6]

2) h admet un maximum pour $\boxed{x = -2}$. Ce maximum est $\boxed{2,5}$.

3) $\boxed{h(-3,5) = 0}$ $\boxed{h(0,5) = -2}$ $\boxed{h(4) = 1,5}$

4) Les antécédents de – 1 par la fonction h sont : – 4, 0, 2 et 5,5.
Ce sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est – 1.

5)

x	– 4		– 3,5		– 0,5		2,5		5		6
h(x)		–	0	+	0	–	0	+	0	–	

6)

x	– 4		– 2		1		3,5		6
h(x)	– 1	↗	2,5	↘	– 2,5	↗	2	↘	– 1,5

Exercice 2 Pour tout x ∈ ℝ, $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 1}$

1) Pour tout x ∈ ℝ, – x ∈ ℝ.

De plus, pour tout x ∈ ℝ, $f(-x) = \dfrac{8}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{8}{x^2 + 1} = f(x)$

f est donc paire. Sa courbe représentative sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) a et b sont deux nombres de [0 ; + ∞ [tels que a < b.

a) $$f(a) - f(b) = \frac{8}{a^2 + 1} - \frac{8}{b^2 + 1} = \frac{8\,(b^2 + 1)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} - \frac{8(a^2 + 1)}{(b^2 + 1)(a^2 + 1)}$$
$$= \frac{8\,(b^2 + 1) - 8(a^2 + 1)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} = \frac{8b^2 + 8 - 8a^2 - 8}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$
$$= \frac{8b^2 - 8a^2}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} = \frac{8\,(b^2 - a^2)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} = \boxed{\frac{8\,(b + a)\,(b - a)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}}$$

b) 8 est strictement positif
b + a aussi car a et b sont dans [0 ;+∞ [avec a < b donc b > 0.
b – a aussi car a < b
$a^2 + 1$ aussi car $a^2 \geq 0$ (carré) et donc $a^2 + 4 > 0$
De même pour $b^2 + 4$
D'après la règle des signes, f(a) – f(b) > 0

c) f(a) – f(b) > 0 donc f(a) > f(b). Or on avait a < b et a et b dans [0 ; + ∞ [.
Donc f inverse l'ordre sur [0 ; + ∞ [. Elle est donc strictement décroissante sur [0 ; + ∞ [.

d) On sait que f est paire et qu'elle est strictement décroissante sur [0 ; + ∞ [.
Sa courbe représentative présentant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, f sera donc strictement croissante que] – ∞ ; 0]

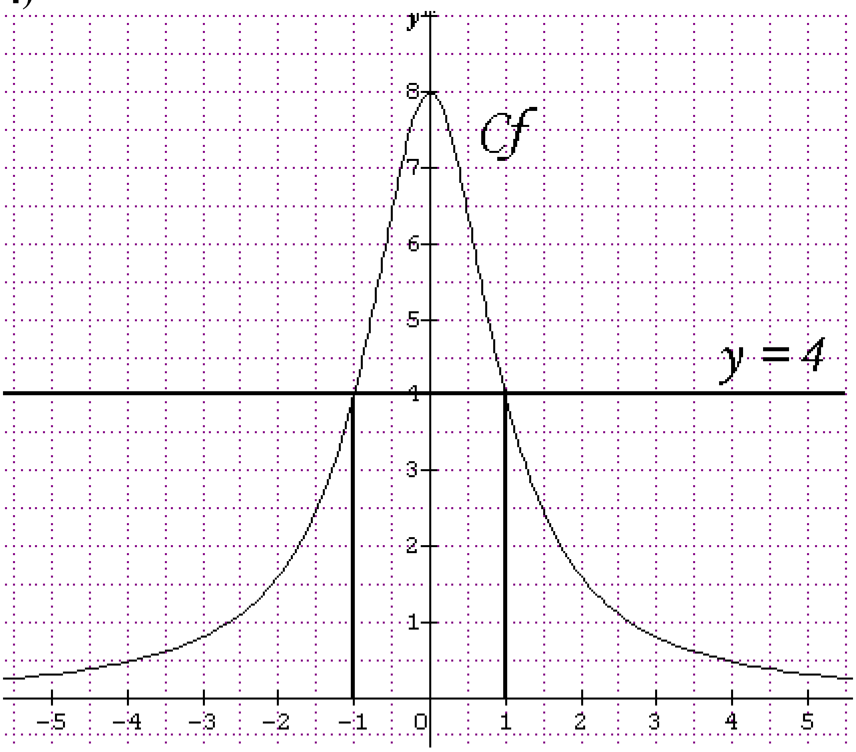
e)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		↗	8	↘	

3)

x	0	0,5	1	2	3	4	5
f(x)	8	6,4	4	1,6	0,8	0,5	0,3

4)



5) $f(x) \leq 4$ Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés en dessous de la droite d'équation $y = 4$. $S =]-\infty\,;\,1] \cup [1\,;\,+\infty[$

6) $f(x) \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^2+1} \leq 4 \Leftrightarrow \quad 8 \leq 4(x^2+1)$ car $x^2 + 1 > 0$ donc on peut multiplier les deux membres par $x^2 + 1$ sans changer l'ordre.

$f(x) \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq x^2 + 1$ (en divisant les deux membres par 2)

$\Leftrightarrow 1 \leq x^2 \quad \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (x+1)(x-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x + 1$		−	0	+		+	
$x - 1$		−		−	0	+	
$(x+1)(x-1)$		+	0	−	0	+	

$S =]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,+\infty[$