2^{nde} 4 – Corrigé du devoir surveillé n°7 – Sujet A

<u>Exercice 1</u> : Pour chacune des quatre propositions, plusieurs traductions vectorielles sont possibles :

1) A est le milieu de [BC] d) Les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{AC}}$ sont égaux

ou Les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{AB}}$ sont égaux

ou l'on a $\boxed{\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$ ou $\boxed{\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

ou $\boxed{\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}}$ ou $\boxed{\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}}$

2) Les points M, N, P sont alignés a) ou b) les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires *(par exemple)*

… Il suffit de citer deux vecteurs d'extrémités parmi les points M, N P avec une lettre commune dans les deux vecteurs.

3) Les droites (BN) et (TK) sont parallèles a) ou b) Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ (ou $\overrightarrow{NB}$) et $\overrightarrow{TK}$ (ou $\overrightarrow{KT}$) sont colinéaires

4) EFGH est un parallélogramme c) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux

(ou $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{GH}$ ou $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ ou $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GF}$)

Ou l'on a $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG}$ ou $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FH}$

Ou $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GE}$ ou $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HF}$

<u>Exercice 2</u> :

2) $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 3\,\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$

$2\,(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB}) + 3\,\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$ d'après la relation de Chasles

$2\,\overrightarrow{NC} + 2\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB} + 3\,\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$

$6\,\overrightarrow{NC} + 2\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$

$6\,\overrightarrow{NC} = 2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

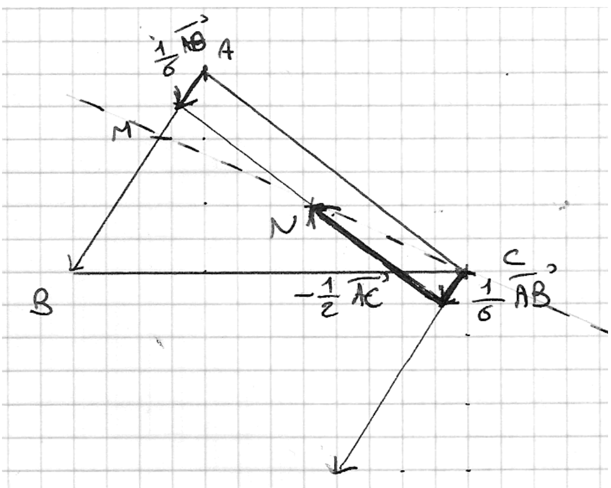
$6\,\overrightarrow{NC} = 2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles

$6\,\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BA} + 3\,\overrightarrow{AC}$

$6\,\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{6}\overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{CN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$



3) $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$ d'après la relation de Chasles

$\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ car on sait que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ d'après l'énoncé

$\overrightarrow{NM} = -\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ d'après le résultat de la question 2)

$\overrightarrow{NM} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\boxed{\overrightarrow{NM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ car $-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\overrightarrow{CN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ et $\boxed{\overrightarrow{NM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ donc $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NM}$

Ce qui signifie que N est le milieu de [MC] C.Q.F.D.

Exercice 3 :

1)

x	– 3		– 2		– 0,5		1,5		4		5
g(x)	1	↘	– 2	↗	– 0,5	↘	– 2,75	↗	1,5	↘	0,5

2) Le minimum absolu de g est – 2,75. Il est atteint pour x = 1,5
3) L'image de – 0,5 par g est g(–0,5) = – 0,5
4) – 2 admet 3 antécédents par g qui sont – 2, ≈ 0,9 et 2
5) $g(x) \geq 0$ S = [– 3 ; – 2,75] ∪ [3 ; 5]
6) $g(x) \leq 1$ S =] 3,5 ; 4,5 [

Exercice 4 : 1) $h(x) = \sqrt{4 - x}$ existe lorsque $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x$
L'ensemble de définition de f est donc] – ∞ ; 4]

2) $h(-12) = \sqrt{4 - (-12)} = \sqrt{16} = 4$
L'image de – 12 par h est 4

3) Nous cherchons l'antécédent de 5 par h, c'est-à-dire le nombre x tel que
h(x) = 5 c'est-à-dire $\sqrt{4 - x} = 5$

$\sqrt{4 - x} = 5 \Rightarrow (\sqrt{4 - x})^2 = 5^2 \Leftrightarrow 4 - x = 25$
$\Leftrightarrow 4 - 25 = x$
$\Leftrightarrow -21 = x$

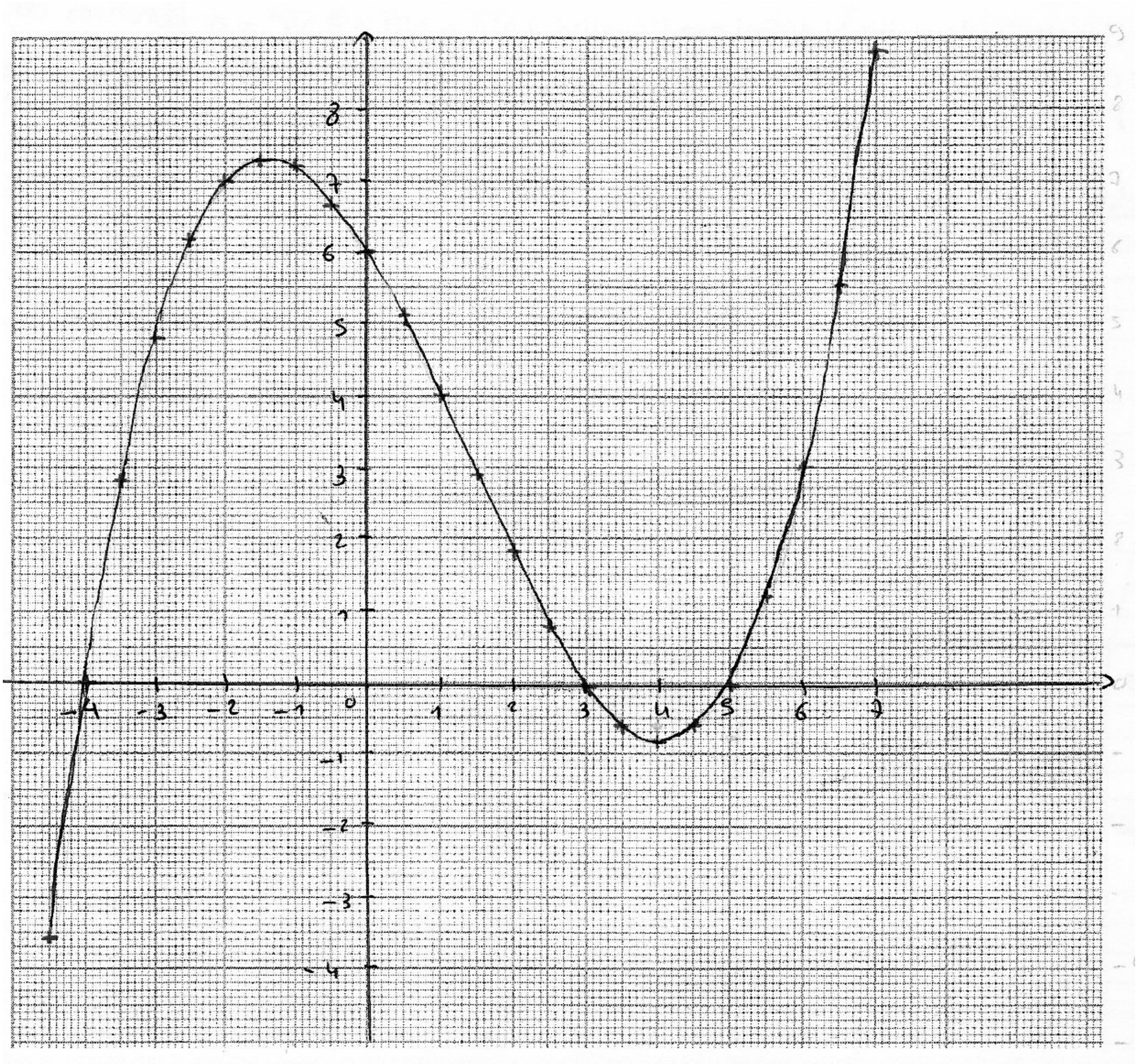
Si l'antécédent de 5 existe, il vaut – 21
On vérifie que –21 est bien un antécédent de 5 :
$h(-21) = \sqrt{4 - (-21)} = \sqrt{25} = 5$

L'antécédent de 5 par h est – 21

Exercice 4 : 1)

x	– 4,5	– 4	– 3,5	– 3	– 2,5	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1
f(x)	– 3,6	0	2,8	4,8	6,2	7	7,3	7,2	6,7	6	5,1	4

x	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
f(x)	2,9	1,8	0,8	0	– 0,6	– 0,8	– 0,6	0	1,2	3	5,5	8,8



2^{nde} 4 – Corrigé du devoir surveillé n°7 – Sujet B

Exercice 1 : Pour chacune des quatre propositions, plusieurs traductions vectorielles sont possibles :

1) Les points A, B, C sont alignés

a) ou b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
Ou Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires
… il s'agit de citer deux vecteurs d'extrémités distinctes parmi les points A, B, C, l'une étant commune aux deux vecteurs.

2) M est le milieu de [NP]

d) Les vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont égaux
(ou $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{MN}$)
Ou l'on a $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$ ou $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$
Ou $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$ ou $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$

3) BNTK est un parallélogramme

c) Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{KT}$ sont égaux
(ou $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{NT}$ ou $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{TK}$ ou $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{TN}$)
Ou l'on a $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BT}$
(ou $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NT} = \overrightarrow{NK}$ ou $\overrightarrow{TN} + \overrightarrow{TK} = \overrightarrow{TB}$ ou $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KT} = \overrightarrow{KN}$)

4) Les droites (EF) et (GH) sont parallèles

a) ou b) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont Colinéaires ou $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ ou $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{GH}$ ou $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{HG}$)

Exercice 2 :

2) $4\,\overrightarrow{NA} + 3\,\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$
$4\,\overrightarrow{NA} + 3\,(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ d'après la relation de Chasles
$4\,\overrightarrow{NA} + 3\,\overrightarrow{NA} + 3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$
$8\,\overrightarrow{NA} + 3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$
$8\,\overrightarrow{NA} = -\,3\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
$8\,\overrightarrow{AN} = 3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{AN} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}}$ (1)

3) $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ d'après la relation de Chasles
$\overrightarrow{NM} = -\,\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ puisque $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ d'après l'énoncé.

$$\overrightarrow{NM} = -\left(\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$$

D'après la relation (1) d'une part et la relation de Chasles d'autre part.

$$\overrightarrow{NM} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{8}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{6}{8}\overrightarrow{CA} + \frac{6}{8}\overrightarrow{AB} \quad \text{car } \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

$\overrightarrow{NM} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{8}{8}\overrightarrow{AC} - \frac{6}{8}\overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{NM} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}}$ (2)

D'après (1) et (2), on a $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$ donc N est le milieu de [NM]

Exercice 3 :

1)

x	− 3		− 1,5		0,75		3		4		5,5
g(x)	− 2,25	↗	1,25	↘	− 1	↗	2,5	↘	1	↗	2

2) Le maximum absolu de g est 2,5. Il est atteint pour x = 3

3) L'image du nombre 4 par g est g(4) = 1

4) − 0,5 admet 3 antécédents par g, qui sont ≈ − 2,4 ; 0,25 et 1,25

5) $g(x) \geq 0$ S = [− 2,25 ; − 0,25] $\cup$ [1,5 ; 5,5]

6) $g(x) > 2$ S =] 2,5 ; 3,325 [

Exercice 4 : 1) $h(x) = \sqrt{7 - x}$ existe si et seulement si $7 - x \geq 0 \Leftrightarrow 7 \geq x$
L'ensemble de définition de h est donc $]-\infty ; 7]$

2) L'image de − 2 par h est $h(-2) = \sqrt{7-(-2)} = \sqrt{9} = 3$

3) L'antécédent de 4 par h, s'il existe, est un nombre x qui doit vérifier l'équation h(x) = 4
C'est-à-dire $\sqrt{7-x} = 4$
Si $\sqrt{7-x} = 4$, alors $(\sqrt{7-x})^2 = 4^2$ donc $7 - x = 16 \Leftrightarrow 7 - 16 = x \Leftrightarrow x = -9$
Si 4 admet un antécédent par h, c'est − 9.
Vérifions que −9 est bien un antécédent de 4 par h :
$h(-9) = \sqrt{7-(-9)} = \sqrt{7+9} = \sqrt{16} = 4$

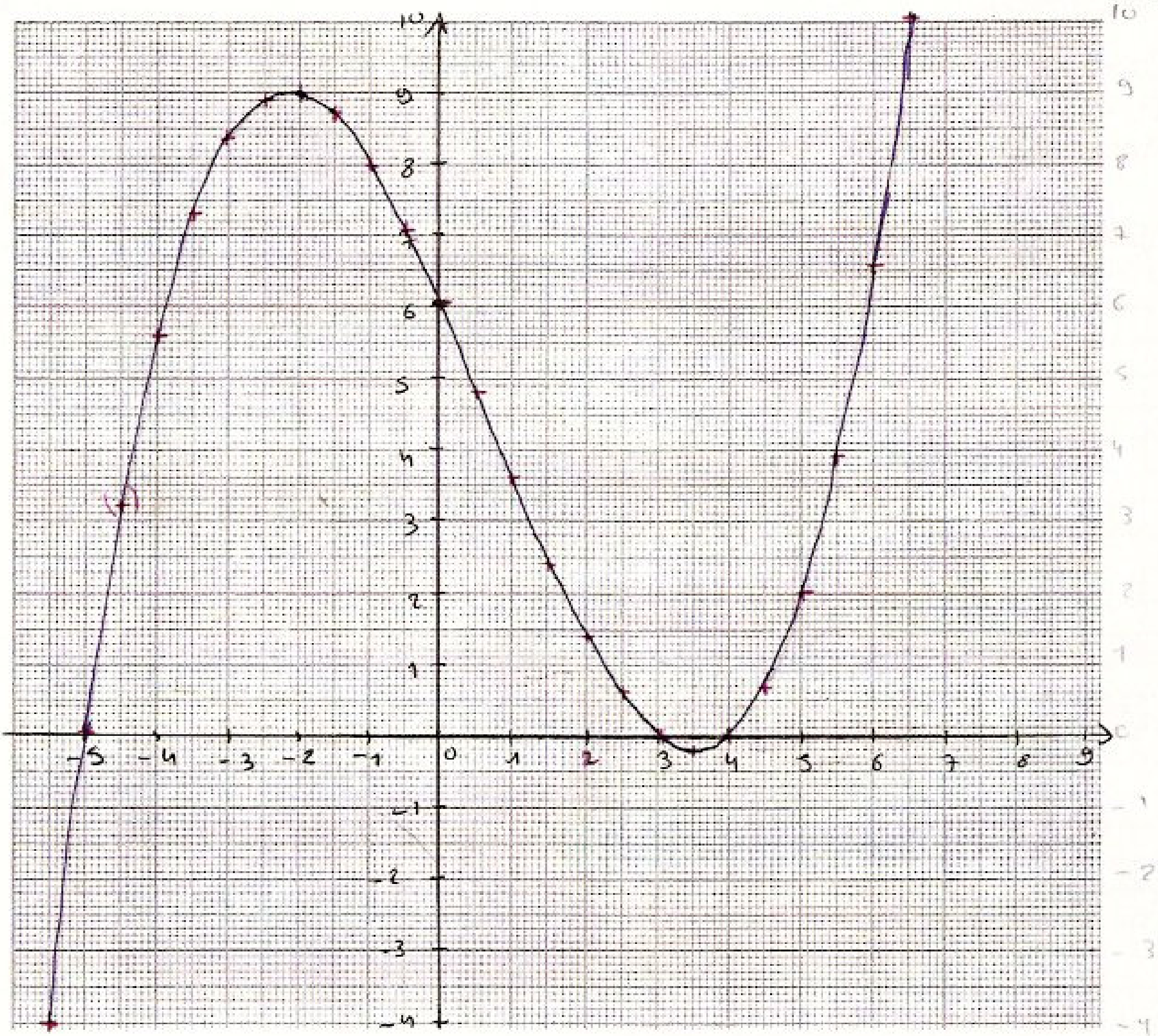
4 admet bien un antécédent par h, et cet antécédent est −9.

Exercice 5 : 1)

x	− 5,5	− 5	− 4	− 3,5	− 3	− 2,5	− 2	− 1,5	− 1	− 0,5	0	0,5
f(x)	− 4	0	5,6	7,3	8,4	8,9	9	8,7	8	7,1	6	4,8

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
f(x)	3,6	2,4	1,4	0,6	0	− 0,2	0	0,7	2	3,9	6,6	10,1

2)



-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
-1
-2
-3
-4

Figure de l'exercice 2 :