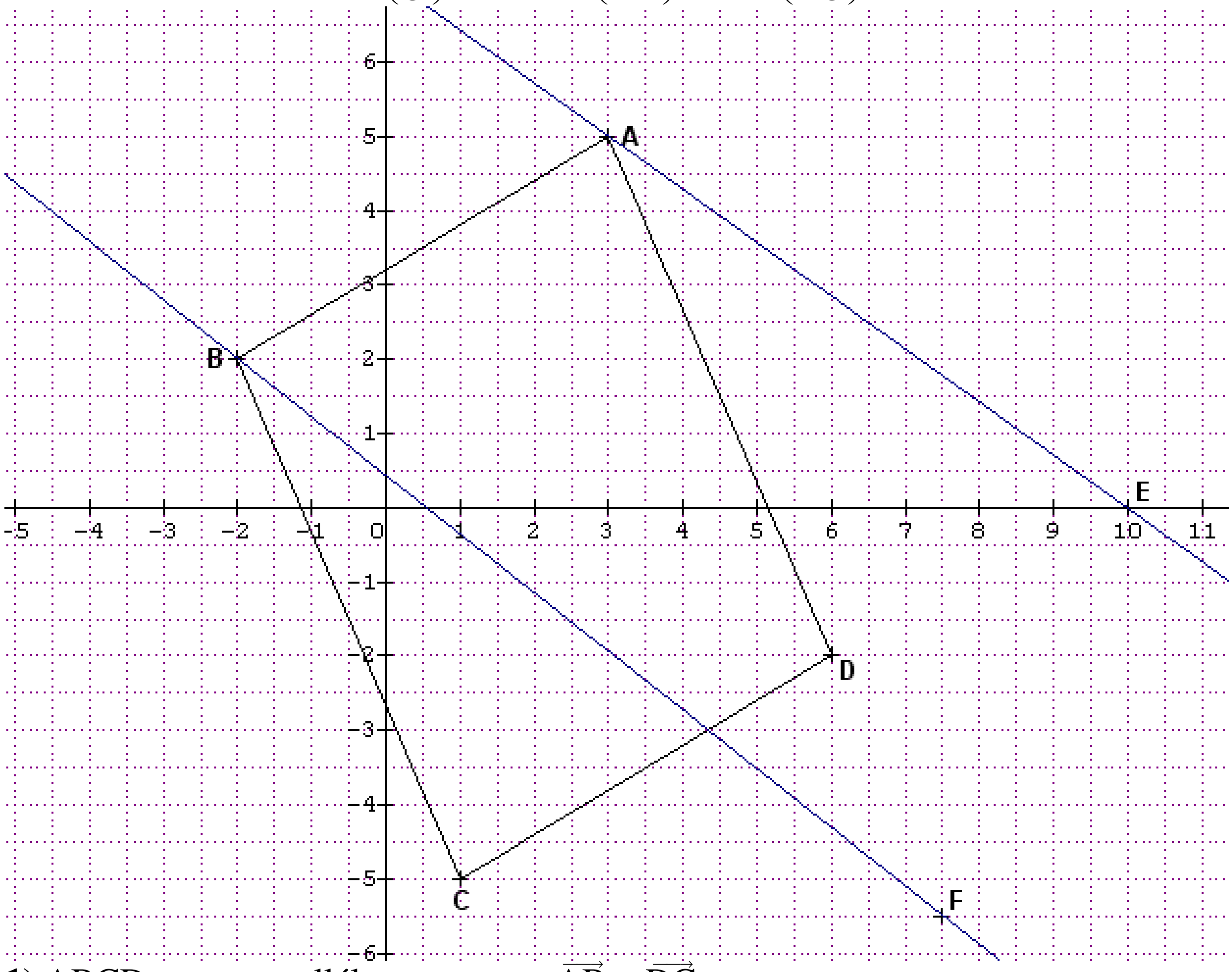
2nde 4 - Corrigé du devoir surveillé n°8 - Sujet A

<u>Question de cours</u> : Voir le cours

<u>Exercice 1</u> : On donne $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$



1) ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-3\\2-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C - x_D\\y_C - y_D\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1 - x_D\\-5 - y_D\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}-5 = 1 - x_D\\-3 = -5 - y_D\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x_D = 1+5\\y_D = -5+3\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}x_D = 6\\y_D = -2\end{cases}$

Donc $\boxed{D\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}}$

2) On donne $E\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$

E, D, C seront alignés si et seulement si $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

On sait déjà que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} x_C - x_E \\ y_C - y_E \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 1 - 10 \\ -5 - 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} -9 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -5 & -9 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \times (-5) - (-3) \times (-9) = 25 - 27 = -2$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points E, D, C ne sont pas alignés.

3) On cherche les coordonnées du point $F\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{AF} - 3\,\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F - x_A \\ y_F - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F - 3 \\ y_F - 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} x_F - x_D \\ y_F - y_D \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} x_F - 6 \\ y_F + 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AF} - 3\,\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} x_F - 3 - 3\,(x_F - 6) = 0 \\ y_F - 5 - 3\,(y_F + 2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_F - 3 - 3\,x_F + 18 = 0 \\ y_F - 5 - 3\,y_F - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2\,x_F = -18 + 3 \\ -2\,y_F = 5 + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x_F = \dfrac{-15}{-2} \\ y_F = \dfrac{11}{-2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_F = 7{,}5 \\ y_F = -5{,}5 \end{cases} \qquad \boxed{F\begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}}$$

4) On sait que $\overrightarrow{AF} - 3\,\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} - 3\,\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0}$ d'après la relation de Chasles

$$\iff \overrightarrow{AD} - 2\,\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0}$$

$$\iff -2\,\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{AD}$$

$$\iff \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}$$

$$\iff \boxed{\overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DA}}$$

C. Q. F. D.

Autre méthode :

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{FD}$: $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix} x_D - x_F \\ y_D - y_F \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix} 6 - 7{,}5 \\ -2 - (-5{,}5) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$

Calculons les cordonnées de $\overrightarrow{DA}$: $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} x_A - x_D \\ y_A - y_D \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 3 - 6 \\ 5 - (-2) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Calculons les coordonnées de $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{DA}$: $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{FD}$ et $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{DA}$ ont les mêmes coordonnées, on a bien $\boxed{\overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DA}}$

5) (AE) et (BF) seront parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.

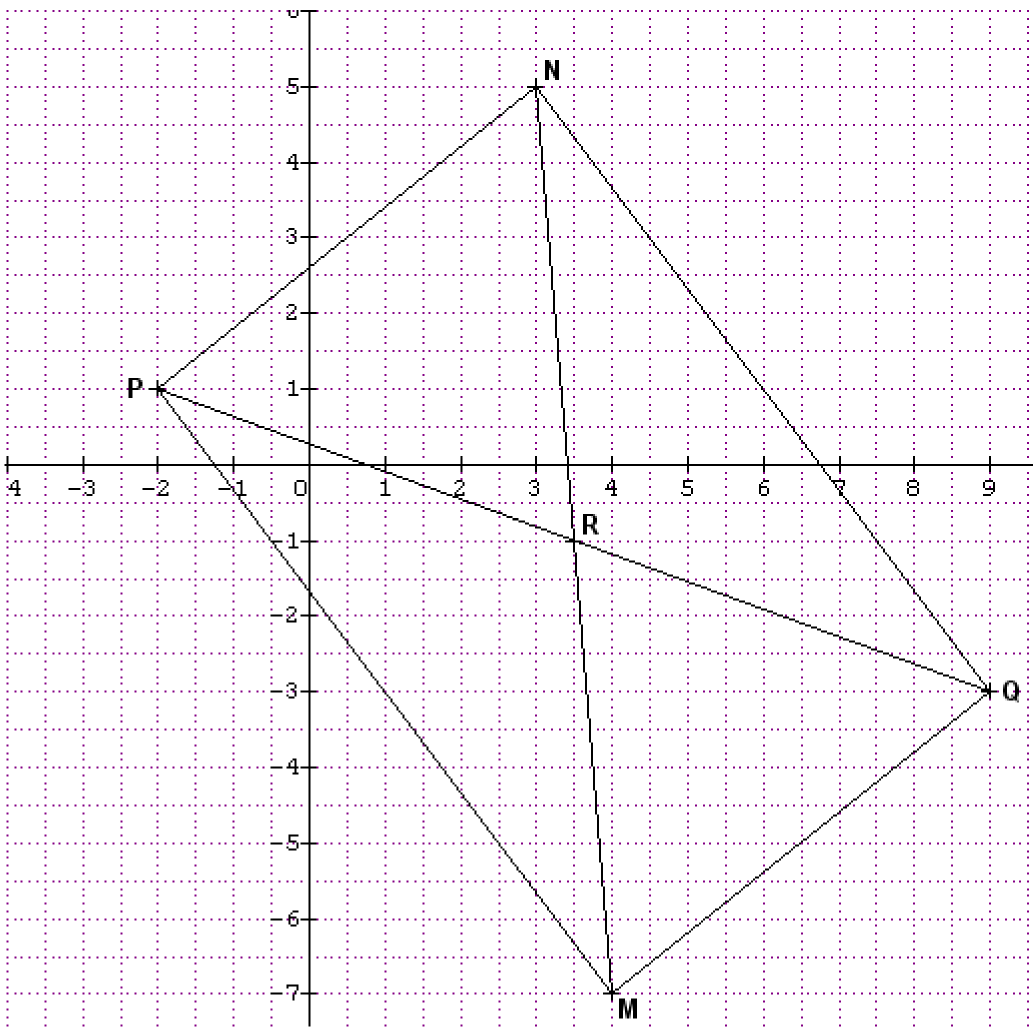
$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 10 - 3 \\ 0 - 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} x_F - x_B \\ y_F - y_B \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 7{,}5 - (-2) \\ -5{,}5 - 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 9{,}5 \\ -7{,}5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 7 & 9{,}5 \\ -5 & -7{,}5 \end{vmatrix} = 7 \times (-7{,}5) - (-5) \times 9{,}5 = -52{,}5 + 47{,}5 = -5 \qquad -5 \neq 0$$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites (AE) et (BF) ne sont pas parallèles.

Exercice 2 : M (4 ; – 7), N (3 ; 5) et P (– 2 ; 1)



1) R est le milieu de [MN] donc $R\begin{pmatrix} \dfrac{x_M + x_N}{2} \\ \dfrac{y_M + y_N}{2} \end{pmatrix}$ $\quad$ $R\begin{pmatrix} \dfrac{4+3}{2} \\ \dfrac{-7+5}{2} \end{pmatrix}$ $\quad$ $\boxed{R\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}}$

2) $PN = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (5-(-7))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 12^2} = \sqrt{145}$

$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(-2-4)^2 + (1-(-7))^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100}$

3) $PN^2 + MP^2 = 41 + 100 = 141$ $MN^2 = 144$ $141 \neq 144$

Donc, dans le triangle MNP, le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés. D'après la contraposée du théorème de Pythagore, ce triangle n'est pas rectangle.

4) Q est le symétrique de P par rapport à R signifie que R est le milieu de [PQ], c'est-à-dire que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ}$

$\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} x_R - x_P \\ y_R - y_P \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 3{,}5 - (-2) \\ -1 - 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 5{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix} x_Q - x_R \\ y_Q - y_R \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix} x_Q - 3{,}5 \\ y_Q + 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ} \iff \begin{cases} x_Q - 3{,}5 = 5{,}5 \\ y_Q + 1 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_Q = 9 \\ y_Q = -3 \end{cases}$ $\boxed{Q\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}}$

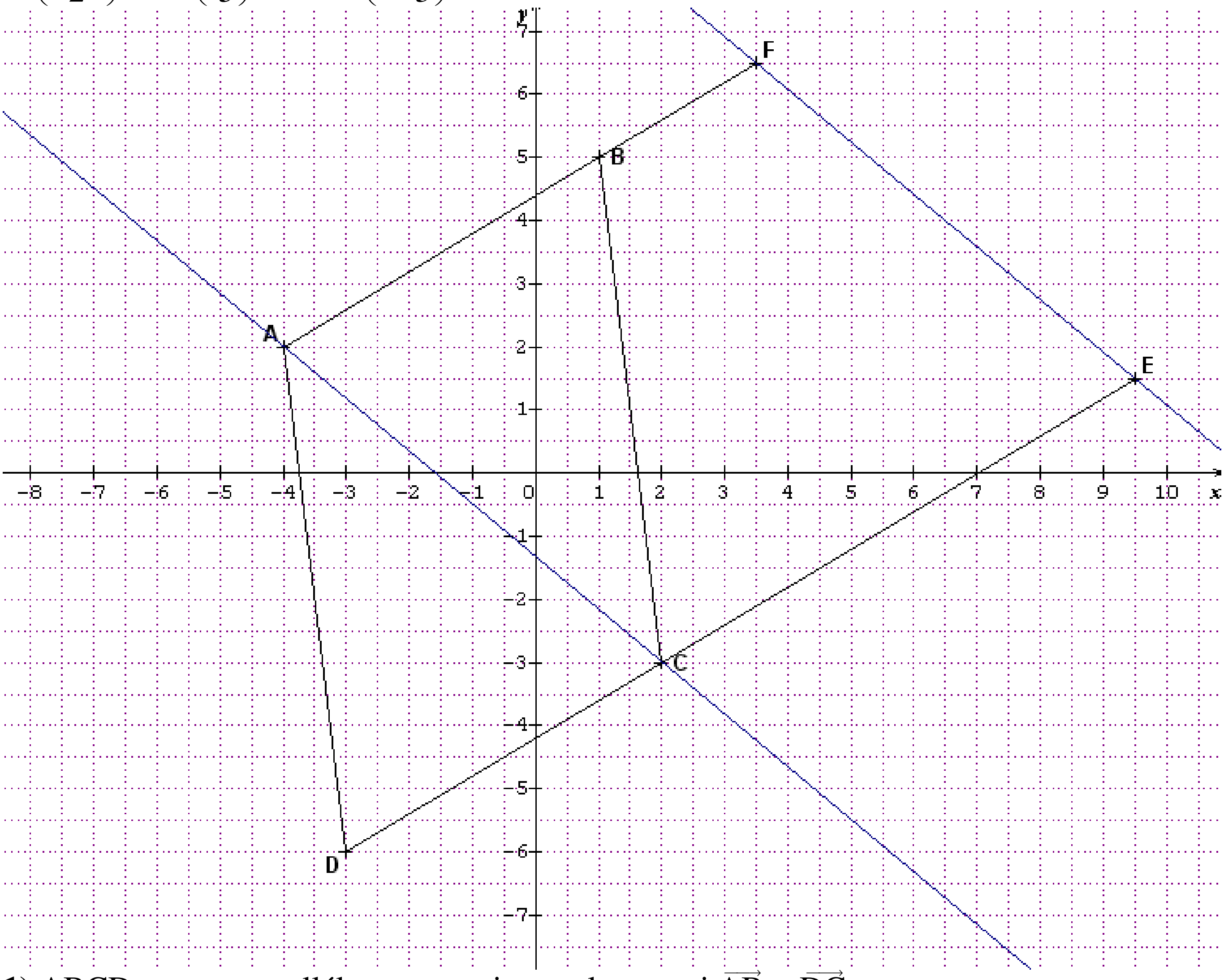
5) MPNQ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, puisque R est le milieu [MN] par hypothèses et aussi celui de [PQ] puisque Q est le symétrique de P par rapport à R.
Donc MPNQ est un parallélogramme.
Mais comme $\widehat{MPN}$ n'est pas un angle droit, ce n'est pas un rectangle.
Et comme $MP \neq PN$, ce n'est pas un losange.

2nde 4 - Corrigé du devoir surveillé n°8 - Sujet B

Question de cours : Voir le cours

<u>Exercice 1</u> :

$A\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$



1) ABCD sera un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Déterminons les coordonnées $\begin{pmatrix}x_D\\y_D\end{pmatrix}$ pour que ce soit le cas.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-4)\\5-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C - x_D\\y_C - y_D\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2 - x_D\\-3 - y_D\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}5 = 2 - x_D\\3 = -3 - y_D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D = 2 - 5\\y_D = -3 - 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D = -3\\y_D = -6\end{cases}$ $\boxed{D\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}}$

2) $\boxed{E\begin{pmatrix}9{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}}$.

Les points E, D, C seront alignés si et seulement si $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

On a vu à la question 1 que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}x_D - x_E\\y_D - y_E\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-3-9{,}5\\-6-1{,}5\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-12{,}5\\-7{,}5\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}5 & -12{,}5\\3 & -7{,}5\end{vmatrix} = 5 \times (-7{,}5) - 3 \times (-12{,}5) = -37{,}5 + 37{,}5 = 0$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$ et de $\overrightarrow{ED}$ sont proportionnelles, donc ces vecteurs sont colinéaires, donc les points E, D, C sont alignés.

3) Calculons les coordonnées $\begin{pmatrix}x_F\\y_F\end{pmatrix}$ du point F défini par $\overrightarrow{AF} - 3\,\overrightarrow{BF} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F - x_A\\y_F - y_A\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F + 4\\y_F - 2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}x_F - x_B\\y_F - y_B\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}x_F - 1\\y_F - 5\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AF} - 3\,\overrightarrow{BF} = \vec{0} \iff \begin{cases}x_F + 4 - 3(x_F - 1) = 0\\y_F - 2 - 3(y_F - 5) = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x_F + 4 - 3x_F + 3 = 0\\y_F - 2 - 3y_F + 15 = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-2\,x_F = -7\\-2\,y_F = -13\end{cases} \iff \begin{cases}x_F = \dfrac{7}{2}\\[2ex] y_F = \dfrac{13}{2}\end{cases} \qquad \boxed{F\begin{pmatrix}3{,}5\\6{,}5\end{pmatrix}}$$

4) Démontrons que $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Première méthode : On sait que $\overrightarrow{AF} - 3\,\overrightarrow{BF} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AF} - 3\,\overrightarrow{BF} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} - 3\,\overrightarrow{BF} = \vec{0}$ d'après la relation de Chasles.

$\iff \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{BF} = \vec{0}$

$\iff -2\,\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB}$

$\iff 2\,\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BA}$

$\iff \boxed{\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}$ C. Q. F. D.

Deuxième méthode : Calculons puis comparons les coordonnées de $\overrightarrow{FB}$ et de $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

On a vu à la question 1 que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\[1ex]-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}-2{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}x_B - x_F\\y_B - y_F\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}1-3{,}5\\5-6{,}5\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-2{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FB}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ ont les mêmes coordonnées, donc $\boxed{\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}$ C. Q. F. D.

5) (AC) et (EF) seront parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

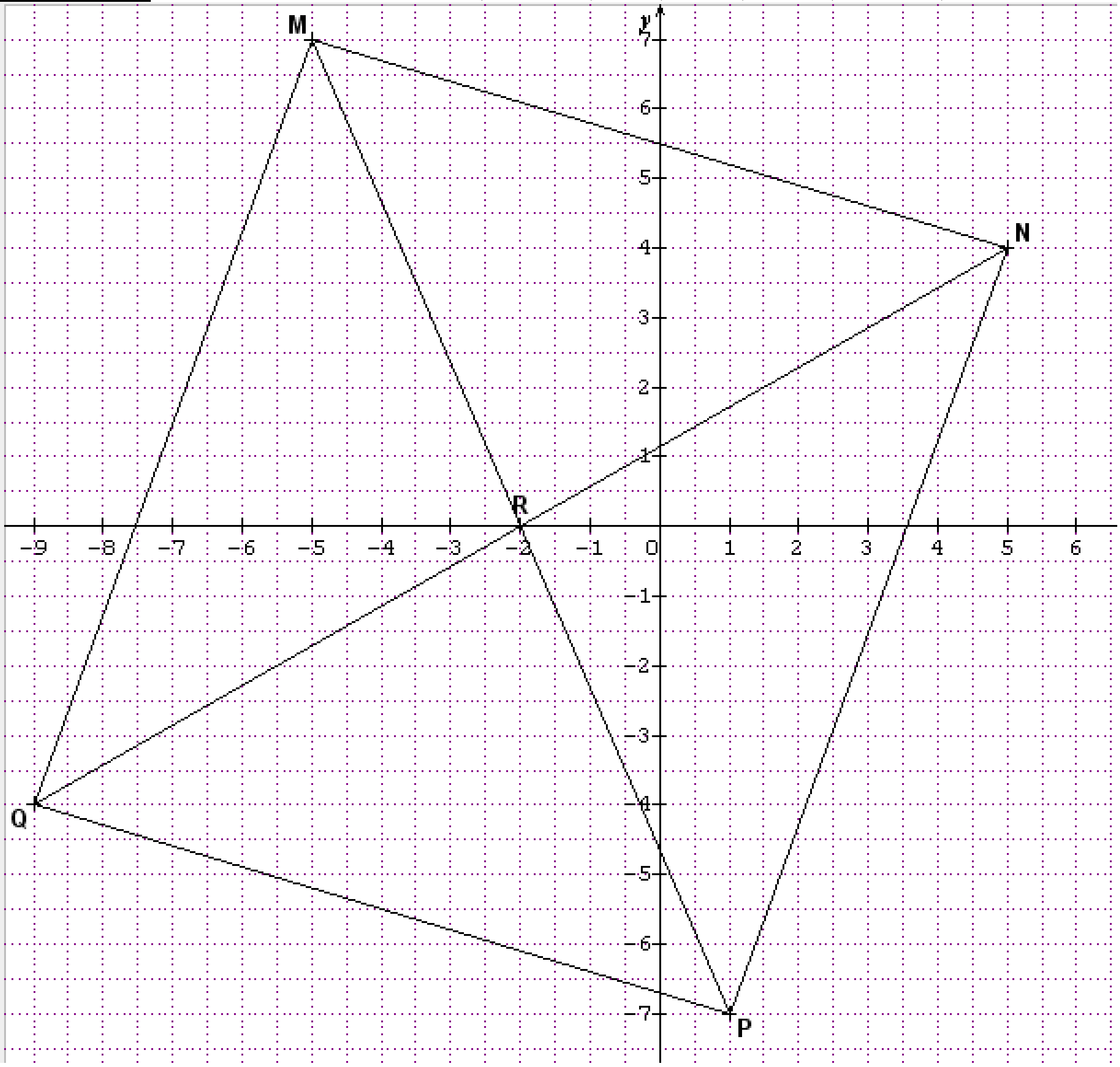
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 - (-4) \\ -3 - 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 3,5 - 9,5 \\ 6,5 - 1,5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Non seulement $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont parallèles, mais on a même $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{EF}$ soit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FE}$.

On en déduit que le quadrilatère AFEC est un parallélogramme.

Exercice 2 : M (– 5 ; 7), N (5 ; 4) et P (1 ; – 7)



1) R est le milieu de [MP], ses coordonnées sont donc $\begin{pmatrix} \dfrac{x_M + x_P}{2} \\ \dfrac{y_M + y_P}{2} \end{pmatrix}$

$R\begin{pmatrix} \dfrac{-5+1}{2} \\ \dfrac{7-7}{2} \end{pmatrix}$ $\quad$ $\boxed{R\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

2) $PN = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (4+7)^2} = \sqrt{4^2 + 11^2} = \sqrt{16+121} = \boxed{\sqrt{137}}$

$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(5+5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{10^2 + (-3)^2} = \sqrt{100+9} = \boxed{\sqrt{109}}$

$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(1+5)^2 + (-7-7)^2} = \sqrt{6^2 + (-14)^2} = \sqrt{36+196} = \boxed{\sqrt{232}}$

3) Dans le triangle MNP, le plus grand côté est MP, et $MP^2 = 232$
La somme des carrés des longueurs des deux plus petits côtés est
$PN^2 + MN^2 = 137 + 109 = 246$
$232 \neq 246$, donc d'après la contraposée u théorème de Pythagore, le triangle MNP n'est pas rectangle.

4) Q est le symétrique de N par rapport à R signifie que R est le milieu de [NQ] et donc que $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{RQ}$. Nous cherchons à calculer les coordonnées $\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$ de Q.

$\overrightarrow{NR}\begin{pmatrix} x_R - x_N \\ y_R - y_N \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{NR}\begin{pmatrix} -2-5 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{\overrightarrow{NR}\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix} x_Q - x_R \\ y_Q - y_R \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix} x_Q - (-2) \\ y_Q - 0 \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix} x_Q + 2 \\ y_Q \end{pmatrix}}$

$$\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{RQ} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_Q + 2 = -7 \\ y_Q = -4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_Q = -9 \\ y_Q = -4 \end{cases} \quad \boxed{Q\begin{pmatrix} -9 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

5) MNPQ est un parallélogramme car ses diagonales [MP] et [QN] se coupent en leur milieu R. Comme on a vu que N n'est pas un angle droit, ce n'est pas un rectangle, et comme MN ≠ NP, ce n'est pas un losange.