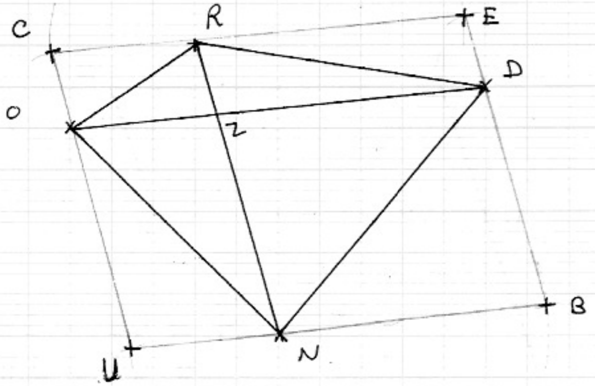
2^{nde} Corrigé de la feuille d'exercices sur les démonstrations à l'aide des vecteurs et de la relation de Chasles.

Exercice 1.



$\vec{ZC} = \vec{ZR} + \vec{ZO} \iff$ ZROC est un parallélogramme

$\iff \vec{CO} = \vec{RZ}$ (1)

$\vec{ZU} = \vec{ZO} + \vec{ZN} \iff$ ZOUN est un parallélogramme

$\iff \vec{ZN} = \vec{OU}$ (2)

$\vec{CU} = \vec{CO} + \vec{OU}$ d'après la relation de Chasles

$= \vec{RZ} + \vec{ZN}$ d'après (1) et (2)

$\vec{CU} = \vec{RN}$ (1') d'après la relation de Chasles

$\vec{ZB} = \vec{ZN} + \vec{ZD} \iff$ ZDBN est un parallélogramme

$\iff \vec{DB} = \vec{ZN}$ (3)

$\vec{ZE} = \vec{ZD} + \vec{ZR} \iff$ ZDER est un parallélogramme

$\iff \vec{RZ} = \vec{ED}$ (4)

$\vec{EB} = \vec{ED} + \vec{DB}$ d'après la relation de Chasles

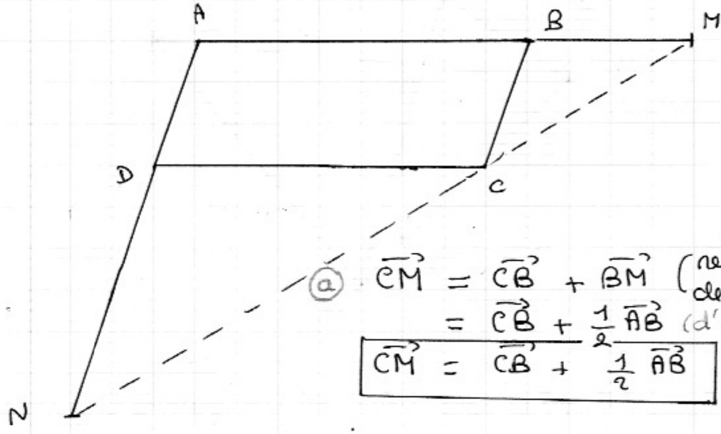
$= \vec{RZ} + \vec{ZN}$ d'après (3) et (4)

$\vec{EB} = \vec{RN}$ (2') d'après la relation de Chasles.

(1') et (2') $\implies \vec{CU} = \vec{EB}$ (donc CUBE est un parallélogramme)

Exercice 2.

On sait que $\begin{cases} 2\vec{BM} = \vec{AB} \iff \boxed{\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{AB}} \ (1) \\ \vec{AN} = 3\vec{AD} \ (2) \end{cases}$



ⓐ $\vec{CM} = \vec{CB} + \vec{BM}$ (relation de Chasles)

$= \vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ (d'après (1))

$\boxed{\vec{CM} = \vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AB}}$

ⓑ $\vec{NC} = \vec{NA} + \vec{AC}$ d'après la relation de Chasles

$= \vec{NA} + \vec{AB} + \vec{AD}$ car $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ puisque ABCD est un parallélogramme

$= 3\vec{DA} + \vec{AB} + \vec{AD}$ d'après (2)

$= 2\vec{DA} + \vec{AB}$

$\boxed{\vec{NC} = 2\vec{DA} + \vec{DC}}$ car $\vec{AB} = \vec{DC}$ puisque ABCD est un parallélogramme.

ⓒ ABCD est un parallélogramme. Donc $\vec{DA} = \vec{CB}$ et $\vec{DC} = \vec{AB}$

donc $\vec{NC} = 2\vec{DA} + \vec{DC}$

devient. $\vec{NC} = 2\vec{CB} + \vec{AB}$ Or on sait que :

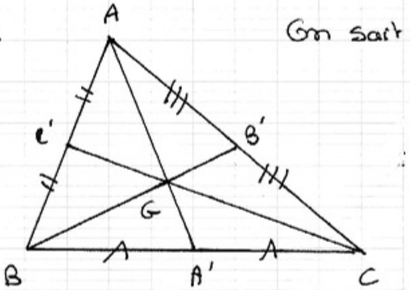
$\vec{CM} = \vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

donc $\vec{NC} = 2\vec{CM}$ donc $\vec{NC}$ et $\vec{CM}$ sont colinéaires

donc les points M, N, C sont alignés.

2nde Corrigé de la feuille d'exercices sur les démonstrations avec des vecteurs et la relation de Chasles

Exercice 3 :



On sait que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

soit $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

D'après la relation de Chasles, on a

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \underline{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}} + \underline{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}}$

$= 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= 3 \times \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\right) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= -2\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Or, d'après le théorème de la médiane vectoriel*, on sait que $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ donc $-2\overrightarrow{AA'} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

donc $\underline{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \underline{\vec{0}}$

* Ce théorème fait l'objet d'un des exercices de la feuille 14.
Il dit que si ABC est un triangle et A' le milieu de [BC] alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$

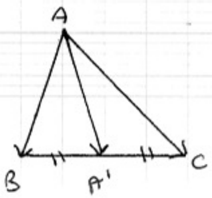
Preuve 1 : $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}$ (d'après la relation de Chasles)

Or $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'} = \vec{0}$

car A' est le milieu de [BC]

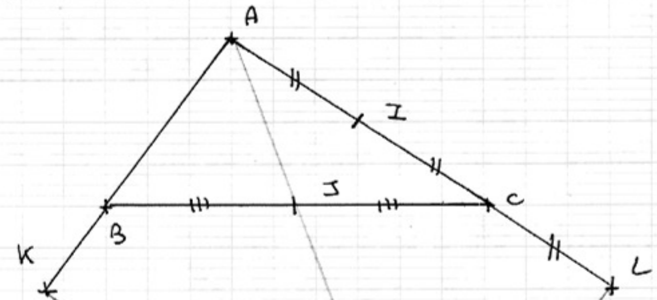
donc $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



Preuve 2 : Soit D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. ABDC est un parallélogramme. Donc ses diagonales se coupent en leur milieu. Donc A', qui est le milieu de [BC], est aussi celui de [AD]. Donc $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

donc $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Exercice 4.



a) $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{BK}$

$\overrightarrow{AK} = 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK})$ d'après la relation de Chasles

$\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AK}$

$\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{BA}$

$-2\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}}$

b) $\boxed{\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IJ}}$ d'après le théorème des milieux vectoriel.

Démonstration de ce théorème : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ d'après la relation de Chasles

donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{CJ}$.

En effet : I est le milieu de [AC] donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IC}$

J est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CJ}$

On a donc $\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}) = 2\overrightarrow{IJ}$ d'après la relation de Chasles

c) $\boxed{\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}$ d'après le théorème vectoriel de la médiane que nous avons prouvé à l'exercice 3

d) $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

donc $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AJ}$ donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires

donc les points A, J, D sont alignés.

Exercice 4 (suite) e) $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CA}$ (relation de Chasles)

On, comme L est le symétrique de I par rapport à C, cela signifie que C est le milieu de [IL] et donc que $\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{CI}$

Comme I est le milieu de [AC], $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

L'égalité $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CA}$ devient

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{LA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \boxed{\overrightarrow{LA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}} \ (*)$$

$\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles)

$$= \underbrace{\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}}_{\text{d'après } (*)} + \underbrace{\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}_{\text{d'après l'hypothèse de la question d)}}$$

$$\overrightarrow{LD} = \cancel{\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cancel{+ \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{LD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}}$

f) On sait que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (question c))

et que $\overrightarrow{LD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

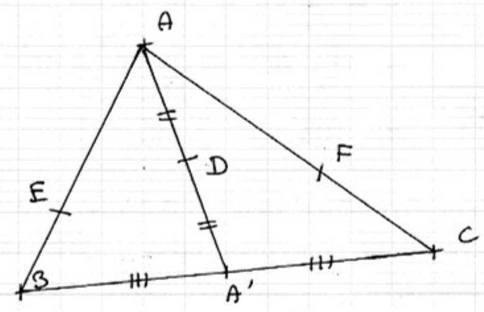
donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{LD}$ donc ALDK est un parallélogramme.

Exercice 5.

Hypothèses:

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$



a) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ (relation de Chasles)

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})\right) + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

car $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (théorème de la médiane)

donc $\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{1\times 3}{4\times 3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{12}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{1\times 4}{3\times 4}\overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{3}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{12}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{12}\overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DE} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$$

b) $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ (relation de Chasles)

$= -\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

$= -\frac{2}{5}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

$= \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

$\boxed{\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}}$

c) Pour montrer que (ED) et (BF) sont parallèles, cherchons à prouver que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont colinéaires, c'est à dire, comme ils sont non nuls, qu'il existe un réel k tel que

$\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{FC}$

Si un tel réel k existe, $k = \frac{5}{12}$.

Calculons $\frac{5}{12}\overrightarrow{FC} = \frac{5}{12}\left(\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{\cancel{5}}{12} \times \frac{3}{\cancel{5}}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{12}\overrightarrow{AC}$

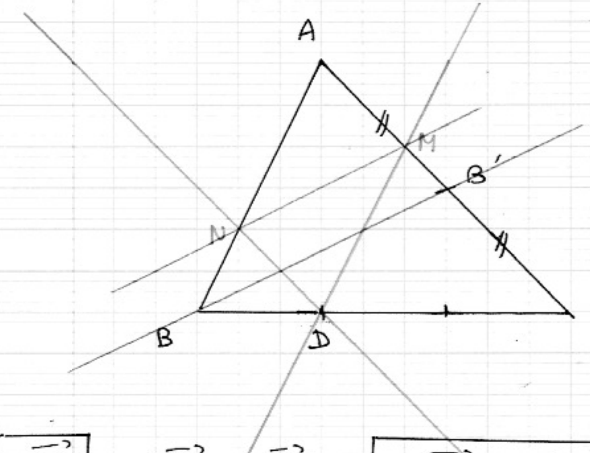
$= \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{DE}$ d'après la question a)

donc $\overrightarrow{DE} = \frac{5}{12}\overrightarrow{FC}$ donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont colinéaires donc les droites (ED) et (BF) sont parallèles.

2nde. Corrigé de la feuille d'exercices sur les démonstrations à l'aide des vecteurs et de la relation de Chasles.

Exercice 6.



Idée : décomposer les vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{BB'}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ * afin de montrer qu'ils sont colinéaires.

* C'est à dire les exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{BB'}} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \boxed{-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ car B' est le milieu de [AC]

$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM}$

Dans le triangle BAC, on a : • N ∈ (BA) • D ∈ (BC) et • (ND) // (AC)

On applique le théorème de Thalès : $\frac{BN}{BA} = \frac{BD}{BC}$

Or $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc, en particulier, $BD = \frac{1}{3}BC$

donc $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$

On en déduit que $\frac{BN}{BA} = \frac{1}{3}$ donc $BN = \frac{1}{3}BA$ et comme N ∈ [AB], $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même sens et même direction, donc on a $\boxed{\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}}$

De même, en appliquant le théorème de Thalès à ABC avec (M ∈ (AC), D ∈ (BC) et (MD) // (AB)), on montre que $\boxed{\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{NA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$

$\overrightarrow{NM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ donc $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont colinéaires donc (NM) // (BB')