Exercice 1 : f est la fonction définie par $f(x)=2x-1$

1) Rappel : pour calculer l'image d'un nombre par une fonction f, on calcule $f(ce\ nombre)$, c'est-à-dire que dans la formule de $f(x)$, on remplace x par ce nombre.

Ici : $f(-1)=2\times(-1)+1=-2+1=-1$ L'image de -1 par f est $\boxed{-1}$.

$f(0)=2\times0-1=-1$ L'image de 0 par f est $\boxed{(-1)}$.

$f\left(\frac{2}{3}\right)=2\times\frac{2}{3}-1=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}-\frac{1\times3}{1\times3}=\frac{4}{3}-\frac{3}{3}=\frac{1}{3}$ L'image de $\frac{2}{3}$ par f est $\boxed{\frac{1}{3}}$.

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)-1=-\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}-1=-3-1=-4$ L'image de $-\frac{3}{2}$ par f est $\boxed{-4}$.

2) Rappel : pour trouver les antécédents d'un nombre par f, on cherche x tel que $f(x)=ce\ nombre$.
Cela revient à résoudre l'équation $f(x)=ce\ nombre$.

Pour trouver un/des antécédents par f de 5, résolvons l'équation : $f(x)=5$.

$$
\begin{aligned}
f(x)=5 &\Leftrightarrow 2x-1=5\\
&\overset{+1}{\Leftrightarrow} 2x=6\\
&\overset{\div2}{\Leftrightarrow} x=3
\end{aligned}
$$

(je laisse les connecteurs avec les flèches pour aider les débutants, mais à partir d'un certain niveau, on ne les écrit plus, on les « pense »)

S={3}

5 admet un antécédent par f, qui est $\boxed{3}$.

Pour trouver un/des antécédents par f de $-\frac{4}{5}$, résolvons l'équation $f(x)=-\frac{4}{5}$.

$$
\begin{aligned}
f(x)=-\frac{4}{5} &\Leftrightarrow 2x-1=\frac{4}{5}\\
&\overset{+1}{\Leftrightarrow} 2x=\frac{4}{5}+1\\
&\Leftrightarrow 2x=\frac{9}{5}\\
&\overset{\div2}{\Leftrightarrow} x=\frac{9}{10}
\end{aligned}
$$

Or $\frac{4}{5}+1=\frac{4}{5}+\frac{1\times5}{1\times5}=\frac{4}{5}+\frac{5}{5}=\frac{9}{5}$

car $\frac{9}{5}\div2=\frac{9}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$

$S=\left\{\frac{9}{10}\right\}$ ou $S=\{0{,}9\}$

$-\frac{4}{5}$ admet un antécédent par f qui est $\boxed{\frac{9}{10}}$.

3) $\boxed{\text{Oui, tout réel } y \text{ admet un antécédent par } f}$. Car il est possible d'ajouter 1 et de diviser par 2 n'importe quel réel y, comme on l'a fait avec 5 et avec $-\frac{4}{5}$ dans la question 2)

Si je veux aller plus loin, je peux expliquer que pour tout réel y, l'équation $f(x)=y$ se résout comme suit :

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2x-1=y \Leftrightarrow 2x=y+1 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{y+1}{2}}$$

Tout réel y admet un antécédent par f, et cet antécédent est égal à $\frac{y+1}{2}$.

Exercice 2 : 1) $g(0)=0^2-2\times 0-3=-3$ L'image de 0 par g est $\boxed{-3}$.

$g(-2)=(-2)^2-2\times(-2)-3=4+4-3=5$ L'image de -2 par g est $\boxed{5}$.

$g(2)=2^2-2\times 2-3=4-4-3=-3$ L'image de 2 par g est $\boxed{-3}$.

2) Développons et réduisons l'expression proposée pour voir si nous trouvons la formule donnée pour $g(x)$.

Pour tout réel x, $(x-1)^2-4=x^2-2x+1-4=x^2-2x+1$. On trouve bien l'expression de $g(x)$.

Ici, on a utilisé la deuxième identité remarquable : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Point méthode : pour montrer que deux expressions sont égales, on peut « transformer »[1] l'une (la plus compliquée) pour obtenir l'autre, comme ici. Mais on peut aussi « transformer » à part chacune des deux expressions pour obtenir les deux fois le même « résultat ».

3) On cherche les antécédents de -4 par g. On résout donc l'équation $g(x)=-4$.

$$\begin{aligned} g(x)=-4 &\Leftrightarrow (x-1)^2-4=-4 \quad \text{puisqu'on a montré précédemment que } g(x)=(x-1)^2-4 \text{ pour tout } x\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \quad (+4 \text{ de chaque côté})\\ &\Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{car le seul réel dont le carré soit égal à 0 est 0 lui-même.}\\ &\Leftrightarrow x=1 \quad (+1 \text{ de chaque côté}) \qquad S=\{1\}\end{aligned}$$

-4 admet un antécédent et un seul par g, et cet antécédent est 1.

On cherche les antécédents de 0 par g. On résout donc l'équation $g(x)=0$.

$g(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2-4=0$

Point méthode : pour obtenir une équation qu'on sait résoudre, vu que le second membre est zéro, on factorise le premier membre, car ainsi on obtiendra une équation du type « produit nul » : $A\times B=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$.

On va utiliser dans le sens factorisation la troisième identité remarquable : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

sens développement →

← *sens factorisation*

Ici : $(x-1)^2-4=(x-1)^2-2^2=(x-1+2)(x-1-2)$ En prenant $a=x-1$ et $b=2$

$$\begin{aligned} g(x)=0 &\Leftrightarrow (x-1+2)(x-1-2)=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0\\ &\Leftrightarrow x+1=0 \quad \text{ou} \quad x-3=0\\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ou} \quad x=3 \qquad S=\{-1;3\}\end{aligned}$$

0 admet deux antécédents par g qui sont -1 et 3.

---

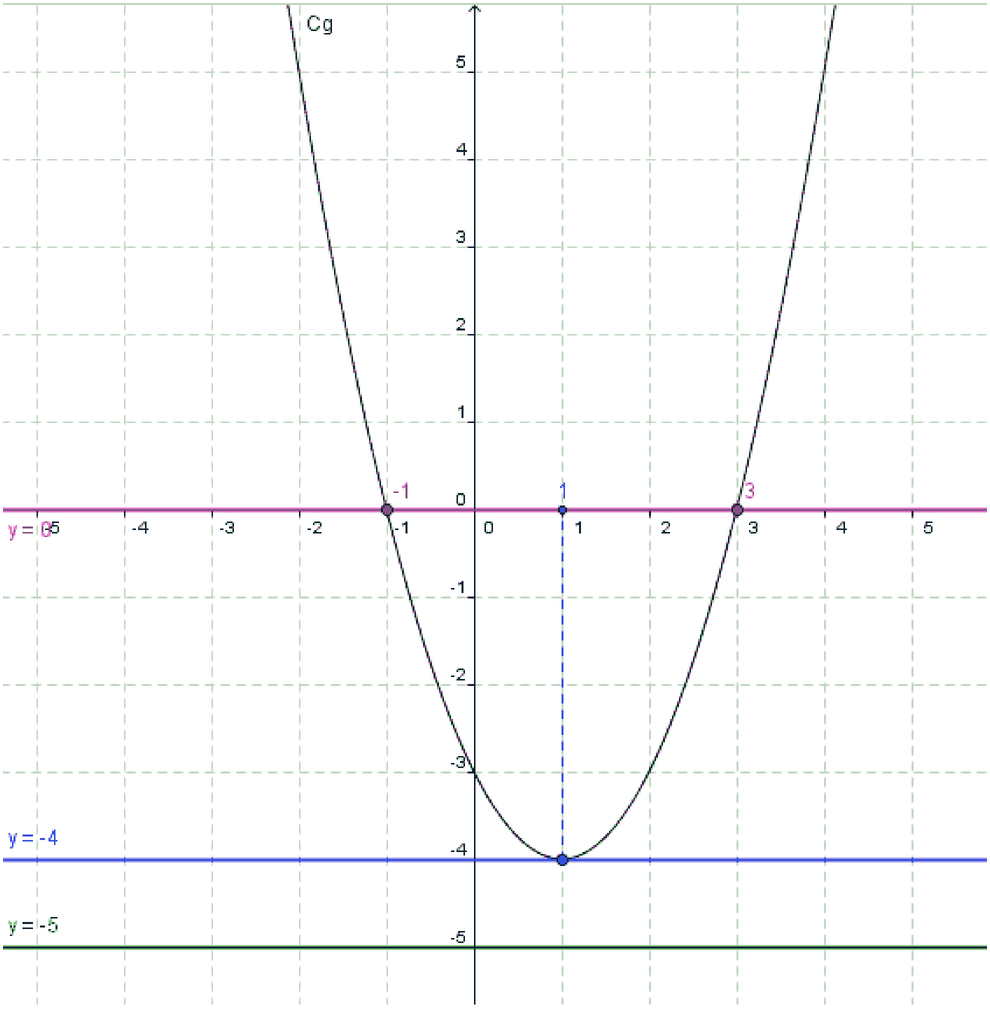
1 En développant et réduisant par exemple.

On cherche les antécédents de -5 par g . On résout l'équation $g(x)=-5$.

$g(x)=-5 \Leftrightarrow (x-1)^2-4=-5$
$\Leftrightarrow (x-1)^2=-1$
(en ajoutant 4 aux deux membres)

L'équation $(x-1)^2=-1$ n'admet pas de solution, parce que, dans le premier membre, on a $(x-1)^2$. Pour tout réel x , $(x-1)$ est aussi un réel, positif ou négatif, et le carré de tout réel, d'après la règle des signes (+ par + donne + et – par – donne –) est un nombre positif. Quel que soit le réel x , $(x-1)^2$ ne peut être égal à un nombre strictement négatif, comme -1 ici. L'équation n'admet donc pas de solution (voir, dans le chapitre des équations, les équations du type $x^2=a$)

Si on demande à la calculatrice ou à un grapheur de tracer une courbe représentative de g ,



On peut constater par lecture graphique que la courbe n'a aucun point commun avec la droite d'équation $y=-5$. Donc aucun point de la courbe n'a pour ordonnée -5 . -5 n'admet donc pas d'antécédent par g .

En revanche, la droite d'équation $y=0$ a deux points communs avec la courbe représentative de g . Celle-ci a dont deux points d'ordonnée 0. Il existe donc deux antécédents de 0 par g , qui sont les abscisses de ses points d'ordonnée 0 : -1 et 3.

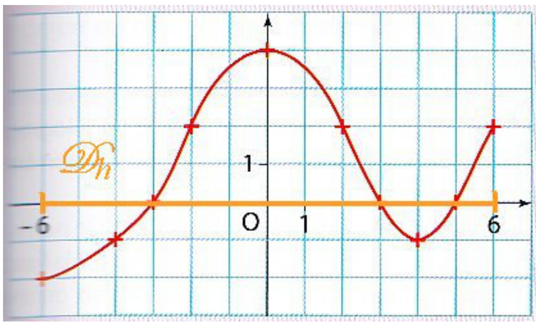
Quant à la droite d'équation $y=-4$, elle a un point commun avec la courbe représentative de g . Celle-ci admet donc un point d'ordonnée -4 . -4 admet donc un antécédent par g . Cet antécédent est l'abscisse du point de la courbe représentative de g qui a pour ordonnée -4 . C'est 1.

Note : la lecture graphique permet une vérification visuelle des résultats trouvés par le calcul. Mais dans certains cas, les apparences peuvent être trompeuses : une lecture graphique n'a pas valeur de preuve, en mathématiques, contrairement à un calcul, avec, par exemple, une résolution rigoureuse d'équation.

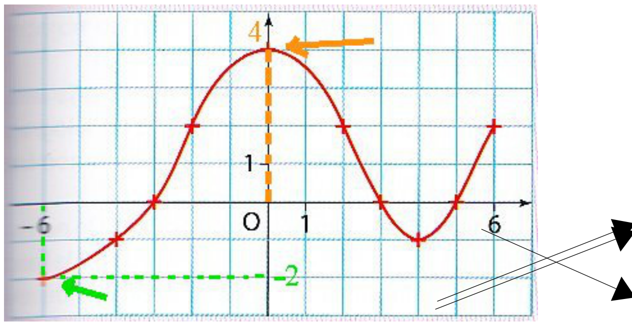
Exercice 3 :

1) Rappel de cours : L'ensemble de définition d'une fonction, c'est l'ensemble des nombres qui admettent une image par cette fonction.

Sur le graphique, c'est l'ensemble des abscisses des points de la courbe représentative de h. Ici, c'est l'intervalle $\boxed{[-6;6]}$.



2) Le maximum de h est 4. Il est atteint pour $x=0$.
Le minimum de h est -2 , il est atteint pour $x=-6$.



3) Tableau de variations :

x	-6	0	3	6
$h(x)$		4		2
	-2		-1	

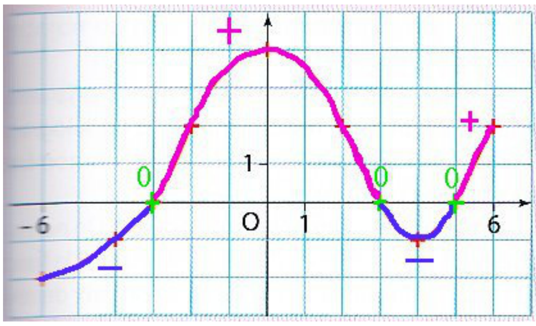
Rappel : Dans un tableau de variations comme dans un tableau de signes :
- Dans la première ligne, on lit les x , les antécédents, les abscisses des points de la courbe. (x varie entre la borne inférieure de l'ensemble de définition (ici : -6) et sa borne supérieure (ici : 6)
- Dans la seconde ligne, on lit les valeurs de $h(x)$, les images, les ordonnées du point de la courbe.

Ensuite :
- Dans le tableau de variations, on met des sur les intervalles où la fonction est croissante, et des sur les intervalles ou la fonction est décroissante. Dans la deuxième ligne, on lit donc les maxima et minima locaux, et dans la première, les valeurs de x en lesquelles ils sont atteints.

- Dans un tableau de signes, on indique des +, des – et des 0 dans la deuxième ligne, selon les intevalles où les images par la fonction sont positives, négatives ou nulles, et dans la première ligne, on indique les valeurs en lesquelles la fonction s'annule.

5) Tableau de signes :

x	-6		-3		3		5		6
$h(x)$		–	0	+	0	–	0	+	



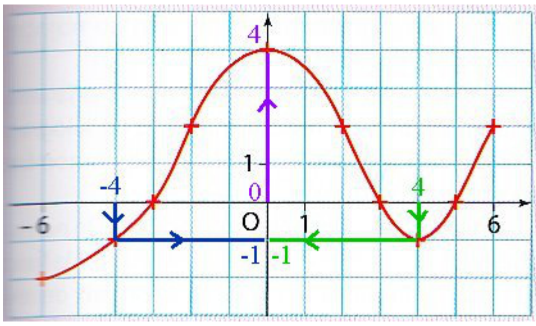
Remarquez bien que les abscisses qui figurent dans la première ligne, à l'exception des bornes, ne sont en général pas les mêmes que ceux qui figuraient dans le tableau de variations.

6) Rappel : les images se lisent sur l'axe des ordonnées.

L'image de -4 par h est -1 : $\boxed{h(-4)=-1}$

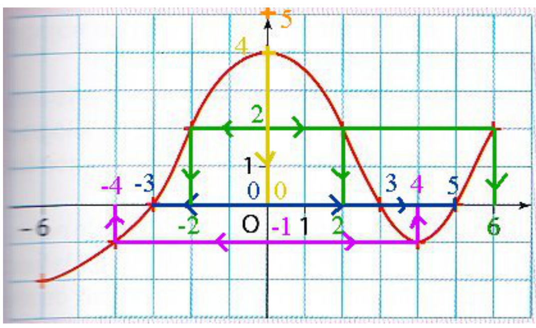
L'image de 4 par h est -1 aussi : $\boxed{h(4)=-1}$

L'image de 0 par h est 4 : $\boxed{h(0)=4}$

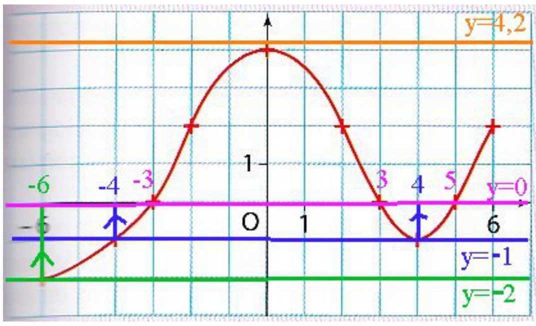


7) Les antécédents se lisent sur l'axe des abscisses.

-1 a deux antécédents par h : -4 et 4.
0 a trois antécédents par h : -3 , 3 et 5.
2 a trois antécédents par h : -2 , 2 et 6.
4 a un antécédent par h : 0
5 n'a pas d'antécédent par h .



8) Remarque : résoudre graphiquement l'équation $h(x)=-1$ revient exactement au même que lire sur le graphique les antécédents de -1 .

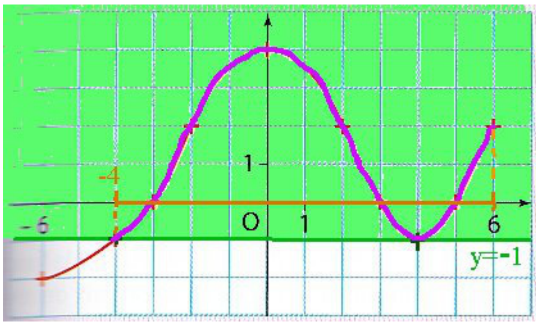


$h(x)=-1$ admet deux solutions : -4 et 4. $\boxed{S=\{-4;4\}}$

$h(x)=-2$ admet une solution : -6 . $\boxed{S=\{-6\}}$

$h(x)=0$ admet trois solutions : -3 , 3 et 5. $\boxed{S=\{-3;3;5\}}$

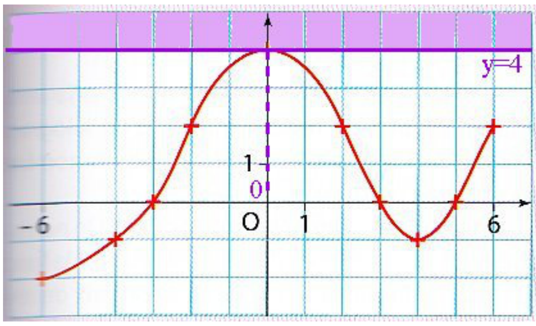
$h(x)=4{,}2$ n'admet aucune solution : $\boxed{S=\emptyset}$



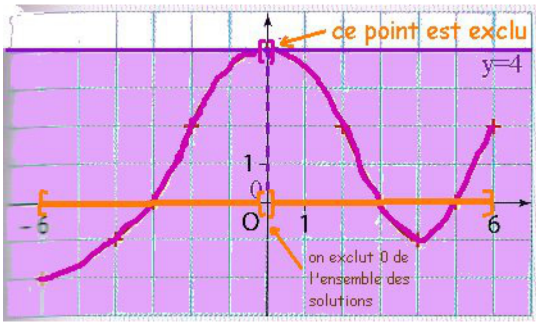
9) Résoudre graphiquement l'équation $\boxed{h(x)\geqslant -1}$, c'est donner l'ensemble des abscisses des points de la courbe dont l'ordonéne est supérieure ou égale à -1 .

On peut procéder ainsi : on trace la droite d'équation $y=-1$.
On colorie les points de la courbe qui sont sur ou au-dessus de cette droite.
On lit l'ensemble des abscisses des points coloriés.

$\boxed{S=[-4;6]}$



$\boxed{h(x)\geqslant 4}$ $\boxed{S=\{0\}}$
car le seul point de la courbe ayant une ordonnée supérieure ou égale à 4 a pour abscisse 0.

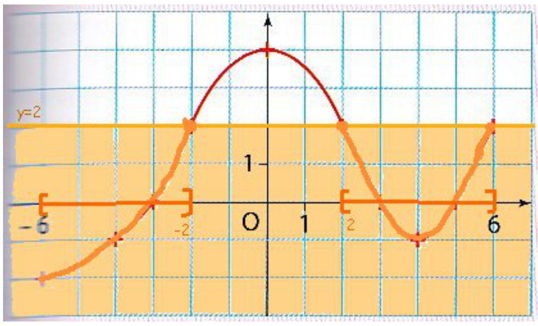


$\boxed{h(x)<4}$. Attention, ici l'inégalité est stricte : si $h(x)=4$, x n'est pas solution de l'inéquation.

On doit donc ôter 0 de l'ensemble des solutions.

Mais on garde le reste de l'ensemble de définition de h car tous les points de la courbe sauf celui d'abscisse 0 sont en-dessous de la droite d'équation $y=4$.

$\boxed{S=[-6;0[\cup]0;6]}$



$\boxed{h(x)\leqslant 2}$

Les solutions sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 2.

$\boxed{S=[-6;-2]\cup[2;6]}$

<u>Petite astuce mnémotechnique pour le pas confondre</u> :
l'axe des **A**bscisses / l'axe des **O**rdonnées
l'axe **H**orizontal / l'axe **V**ertical
l'axe de **X**/l'axe des **Y**
les **A**ntécédents/les **I**mages

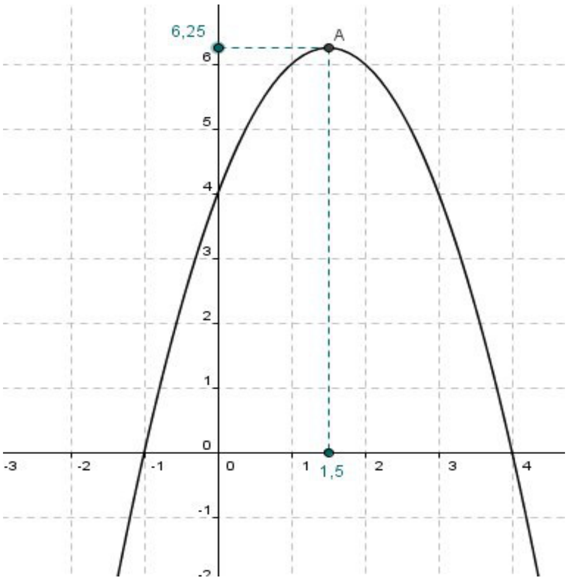
L'ordre (ci-dessus) est alphabétique :

L'axe des **A**bscisses	ou des **X** est	l'axe **H**orizontal	et on y lit les **A**ntécédents.
L'axe des **O**rdonnées	ou des **Y** est	l'axe **V**ertical	et on y lit les **I**mages.

<u>Exercice 4</u> : 1) La formule à entrer en B2 est :

=25/4-(A2-3/2)^2

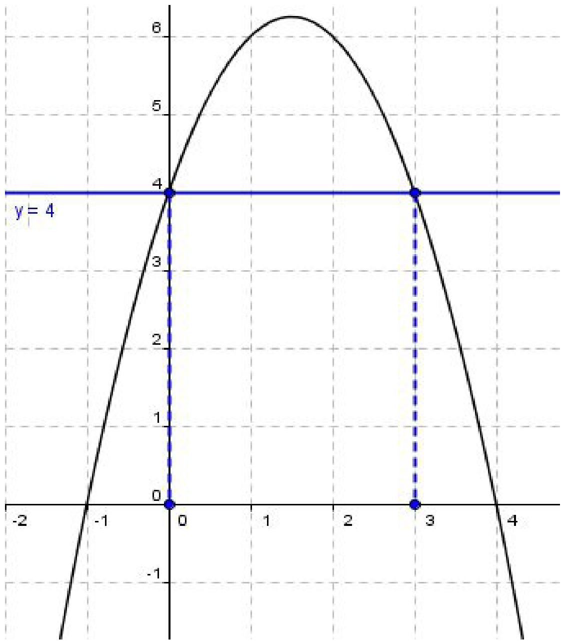
B2		fx =25/4-(A2-3/2)^2
	A	B
1	x	k(x)
2	-5	-36
3	-4	-24
4	-3	-14
5	-2	-6
6	-1	0
7	0	4
8	1	6
9	2	6
10	3	4
11	4	0
12	5	-6
13	6	-14
14	7	-24
15	8	-36
16	9	-50
17	10	-66
18	11	-84
19	12	-104



3) Le maximum de la fonction k semble être 6,25 et il semble être atteint pour $x=1,5$. (voir ci-dessus)

4) La droite d'équation y=4 coupe la courbe représentative de k en deux points dont les abscisses sont 0 et 3. 4 semble donc avoir 2 antécédents par k : 0 et 3.

Les nombres strictement supérieurs à 6,25 ne semblent pas admettre d'antécédents par k . On peut citer 7 par exemple.



5) Un point appartiendra à la courbe représentative de k si et seulement si son ordonnée est l'image de son abscisse par k. Par exemple, un point $M(x_M, y_M)$ appartiendra à la courbe représentative de k si et seulement si $y_M=k(x_M)$.

$A(11;-84)$.

$$k(11)=\frac{25}{4}-\left(11-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\left(\frac{22}{2}-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\left(\frac{19}{2}\right)^2$$

$k(11)=\frac{25}{4}-\frac{19^2}{2^2}=\frac{25}{4}-\frac{361}{4}=\frac{-336}{4}=-84$ On a bien $y_A=k(x_A)$ donc A appartient à $\mathscr{C}k$.

$B(-2;6)$. $k(-2)=\frac{25}{4}-\left(-2-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\left(\frac{-4}{2}-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\left(-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\frac{49}{4}=-\frac{24}{4}=-6$ $\quad -6\neq 6$

$y_B\neq k(x_B)$ Donc B $\notin \mathscr{C}k$

$C\left(\frac{3}{4};7\right)$. $k\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{25}{4}-\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\left(\frac{3}{4}-\frac{6}{4}\right)^2=\frac{25}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{4}-\frac{9}{16}=\frac{25\times 4}{4\times 4}-\frac{9}{16}=\frac{100}{16}-\frac{9}{16}=\frac{91}{16}$

$7\neq\frac{91}{16}$

$y_C=k(x_C)$ donc C $\notin \mathscr{C}k$

$D(20;-336)$ $k(20)=\frac{25}{4}-\left(20-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\left(\frac{40}{2}-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\left(-\frac{37}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\frac{1369}{4}=-\frac{1344}{4}=336$

$y_D=k(x_D)$ donc D $\in \mathscr{C}k$