

Exercice 1.

1) $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ 2) $\vec{BD} + \vec{DE} = \vec{BE}$ 3) $\vec{AE} + \vec{EF} = \vec{AF}$

4) $\vec{AR} + \vec{RC} = \vec{AC}$ 5) $\vec{JK} + \vec{KE} = \vec{JE}$ 6) $\vec{AI} + \vec{IS} = \vec{AS}$

Exercice 2.

1) SCAE est un parallélogramme donc $\vec{CA} = \vec{SE}$ (E₁)

SALE est un parallélogramme donc $\vec{SE} = \vec{AL}$ (E₂)

(E₁) et (E₂) $\Rightarrow \vec{CA} = \vec{AL}$

Donc $\vec{AB} + \vec{AL} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB} + \vec{AB} = \vec{CB}$

d'après la relation de Chasles

2) $\vec{AB} + \vec{BL} + \vec{LA} = \vec{AA} = \vec{0}$ d'après la relation de Chasles

3) $\vec{AB} - \vec{AL} = \vec{AB} + \vec{LA} = \vec{LA} + \vec{AB} = \vec{LB}$ (E₃)

d'après la relation de Chasles

4) $\vec{AB} + \vec{AL} + \vec{AE} = \vec{LB} + \vec{AE}$ d'après (E₃)

Or BAEI est un parallélogramme, donc $\vec{LB} = \vec{EI}$

Donc $\vec{AB} + \vec{AL} + \vec{AE} = \vec{EI} + \vec{AE} = \vec{EE} = \vec{0}$ d'après la relation de Chasles.

5) $\vec{EL} - \vec{IB} = \vec{EL} + \vec{BI} = \vec{EL} + \vec{LA}$ car LAIB est un parallélogramme d'après la relation de Chasles.

$\vec{EL} - \vec{IB} = \vec{EA}$

6) $\vec{AE} - (\vec{CA} + \vec{SC}) = \vec{AE} + \vec{AC} + \vec{CS} = \vec{AE} + \vec{AS}$ d'après la relation de Chasles

SCAE est un parallélogramme donc $\vec{AE} = \vec{CS}$ (E₄)

SAIC est un parallélogramme donc $\vec{CS} = \vec{IA}$ (E₅)

(E₄) et (E₅) $\Rightarrow \vec{AE} = \vec{IA}$

Donc $\vec{AE} - (\vec{CA} + \vec{SC}) = \vec{IA} + \vec{AS}$ en remplaçant $\vec{AE}$ par $\vec{IA}$

Soit $\vec{AE} - (\vec{CA} + \vec{SC}) = \vec{IS}$ d'après la relation de Chasles.

7) $\vec{SA} - \vec{LB} = \vec{SA} + \vec{BL}$

BAEL est un parallélogramme donc $\vec{BL} = \vec{AE}$

Or $\vec{SA} - \vec{LB} = \vec{SA} + \vec{AE} = \vec{SE}$ d'après la relation de Chasles.

8) $\vec{SI} - \vec{EL} - \vec{BL} = \vec{SI} + \vec{LE} + \vec{LS} = \vec{LS} + \vec{SI} + \vec{LE} = \vec{LI} + \vec{LE}$ d'après la relation de Chasles

BAEL est un parallélogramme donc $\vec{LE} = \vec{BA}$ (E₆)

BACI est un parallélogramme donc $\vec{BA} = \vec{IC}$ (E₇)

(E₆) et (E₇) $\Rightarrow \vec{LE} = \vec{IC}$

On a donc : $\vec{SI} - \vec{EL} - \vec{BL} = \vec{LI} + \vec{IC} = \vec{LC}$

d'après la relation de Chasles.

9) $\vec{SI} - \vec{EL} + \vec{SL} = \vec{SI} + \vec{SL} + \vec{LE}$

$= \vec{SI} + \vec{SE}$ d'après la relation de Chasles

SALE est un parallélogramme donc $\vec{SE} = \vec{AL}$ (E₈)

LAIB est un parallélogramme donc $\vec{AL} = \vec{IB}$ (E₉)

(E₈) et (E₉) $\Rightarrow \vec{SE} = \vec{IB}$

Donc $\vec{SI} - \vec{EL} + \vec{SL} = \vec{SI} + \vec{IB} = \vec{SB}$

d'après la relation de Chasles.

Exercise 3:

a) Four trace joints A, B, C, D, on a

$$\begin{aligned} \vec{AD} + \vec{BC} &= \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{BC} \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \vec{AC} + \vec{BC} + \vec{CD} \\ &= \vec{AC} + \vec{BD} \quad \text{d'après la relation de Chasles} \end{aligned}$$

$$2) \underline{\vec{AB} - \vec{CD} - (\vec{AC} - \vec{BA})} = \vec{AB} + \vec{DC} - (\vec{AC} + \vec{AB})$$

$$= \cancel{\vec{AB}} + \vec{DC} + \vec{CA} + \cancel{\vec{BA}}$$

$$= \underline{\vec{DA}} \quad \text{d'où la relation de Chasles}$$

C.Q.F.D

Exercice 4 :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}\end{aligned}$$

d'où la relation de Chasles

$$\begin{aligned} &= \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} - \vec{BA} \\ &= \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC} + \vec{AB} \\ &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} \\ &= \vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AB} \end{aligned}$$

di qui la relazione
de Charni

$$\begin{aligned} & \vec{u} = \vec{AB} \\ & \vec{m} = \vec{MA} - \vec{MB} - \vec{AB} \\ & = \vec{MA} + \vec{BM} + \vec{BA} \\ & = \vec{BM} + \vec{MA} + \vec{BA} \\ & = \vec{BA} + \vec{BA} \\ & = 2\vec{BA} \end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles.

Exercise 5:

$$\begin{aligned} & \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} - \vec{BA} \\ = & \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC} + \vec{AB} \\ = & \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AB} \\ = & \vec{CB} + \vec{AB} \\ = & \boxed{\vec{AB}} \end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

On a donc : $\vec{IH} + \vec{EF} = \vec{AE} + \vec{EF} = \vec{AF}$
d'après la relation de Chasles.

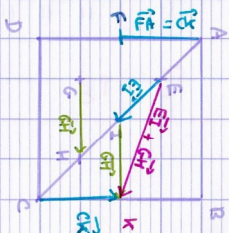
$$\vec{EA} = \vec{FE} - \vec{GH}$$

J'ai commencé par une lecture graphique pour "deviner" le point marquant, puis j'ai cherché une justification par le calcul.

$$\sum_m \text{eff} : \vec{EA} = \vec{HI}$$

3) si l'appelle K le milieu de $[BC]$, on trouve

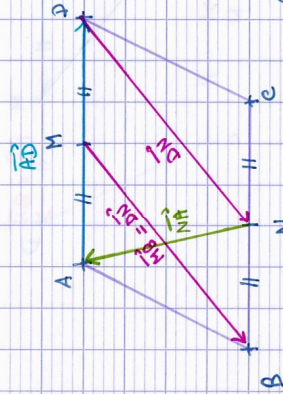
$$\vec{F_K} = \vec{F_C} + \vec{F_A}$$



Justification? EI + GI

$$= \vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{E} + \vec{A} \cdot \vec{A} \quad (\text{Chakra})$$

Exercice 6:



1) $\vec{AD} + \vec{MB} + \vec{NA} = \vec{0}$

car $\vec{MB} = \vec{DN}$
 puisque MONB est
 un parallélogramme
 car $\vec{MB} = \vec{DN}$
 puisque $\vec{MD} = \frac{1}{2} \vec{AD}$
 (car M est le milieu de [AD])
 et $\vec{BN} = \frac{1}{2} \vec{BC}$ (car N est le
 milieu de [BC]) or $\vec{AD} = \vec{BC}$
 puisque ABCD est un //.

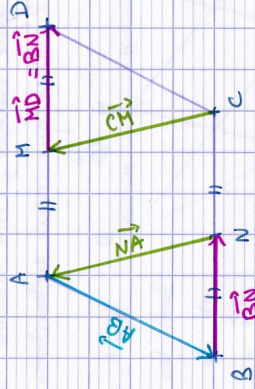
$\vec{AD} + \vec{MB} + \vec{NA} = \vec{AD} + \vec{DN} + \vec{NA}$

$= \vec{AN}$

$= \vec{0}$

d'après la relation de Chasles.

2)



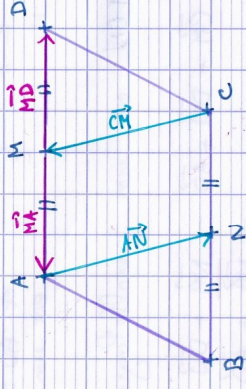
$\vec{AB} + \vec{MD} + \vec{CN} = \vec{AB} + \vec{BN} + \vec{NA}$

$= \vec{AN}$

$= \vec{0}$

d'après la relation de Chasles

3)



$\vec{MA} = -\vec{MD}$ (E1)

car M est le milieu de [AD]

obten aussi : $\vec{AN} = -\vec{CN}$ (E2)

car AMCN est un parallélogramme

puisque $\vec{AM} = \vec{NC}$ car $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AD}$

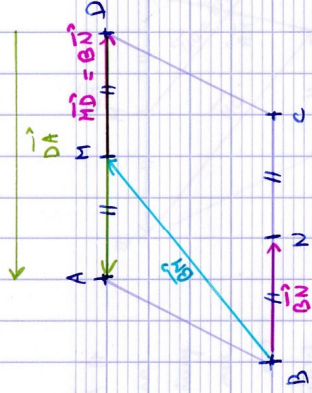
et $\vec{NC} = \frac{1}{2} \vec{BC}$ puisque M

et N sont les milieux respectifs de [AD] et [BC], et on sait que $\vec{AD} = \vec{BC}$ car ABCD est un parallélogramme.

D'ici : $\vec{CM} + \vec{MA} + \vec{MD} + \vec{AN} = \vec{CM} - \vec{MD} + \vec{MD} - \vec{CN}$

$= \vec{CM} - \vec{CN}$

$= \vec{0}$



4)

$\vec{BM} + \vec{BN} + \vec{DA} = \vec{BM} + \vec{MD} + \vec{DA}$

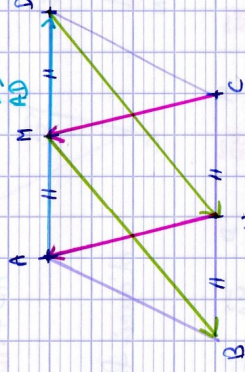
$= \vec{BA}$

$= \vec{0}$

d'après la relation de Chasles.

Contrairement aux autres, cette somme n'est pas le vecteur nul. Elle est donc l'intensité que nous recherchons.

5)



$\vec{AM} = \vec{NC}$ car M et N

sont les milieux de [AD]

et de [BC] donc

$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AD}$ et $\vec{NC} = \frac{1}{2} \vec{BC}$

et $\vec{AD} = \vec{BC}$ car ABCD

est un parallélogramme.

D'ici AMCN est un parallélogramme, donc $\vec{CM} = \vec{NA}$

E' est presque : $\vec{CM} + \vec{DN} + \vec{AD} = \vec{NA} + \vec{DN} + \vec{AD}$

$= \vec{NA} + \vec{AD} + \vec{DN}$

$= \vec{ND}$

$= \vec{0}$

d'après la relation de Chasles.

Conclusion de l'exercice : l'intensité est la somme

$n = 4 : \vec{BM} + \vec{DN} + \vec{DA}$

Exercice 3 :

$$\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CE} + \vec{DA} + \vec{EB} = \vec{AC} - \vec{EB} + \vec{BD} + \vec{DA} + \vec{AC} + \vec{CE} = \vec{EF} \text{ d'après la relation de Chasles.}$$

Le fait que $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CE} + \vec{DA} + \vec{EB} = \vec{0}$ implique que $\vec{EF} = \vec{0}$.

Donc que E et F sont confondus.

Il est donc **VRAI** que si $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CE} + \vec{DA} + \vec{EB} = \vec{0}$, alors il est impossible que les points A, B, C, D, E, F soient tous distincts.

Exercice 8 :

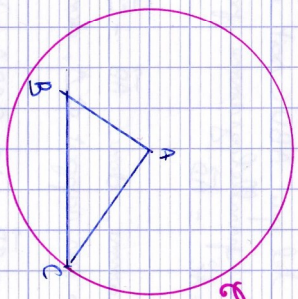
$$\vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AM} \text{ d'après la relation de Chasles.}$$

$$\text{or } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\text{car } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \text{ aussi.}$$

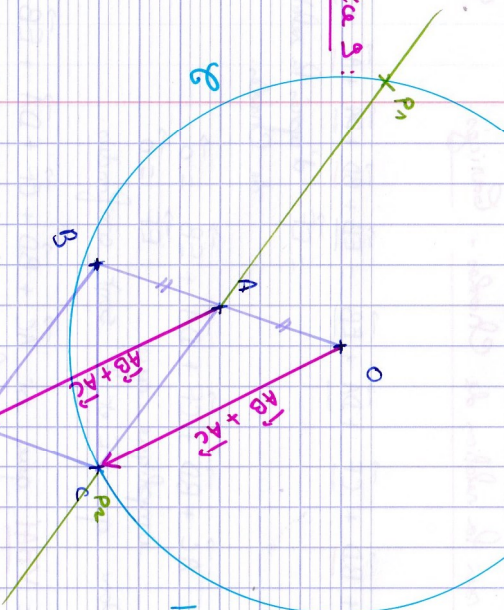
$$\|\vec{AB} + \vec{BM}\| = \|\vec{AM}\| \Leftrightarrow \|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$$

$$\Leftrightarrow AM = AC$$



L'ensemble des points M du plan tels que $AM = AC$ est l'ensemble des points du plan situés à la même distance de A que C. Il s'agit donc du cercle de centre A qui passe par C.

Exercice 9 :



← ensemble des points M du plan tels que $\|\vec{AB} + \vec{AM}\| = \|\vec{AB} + \vec{AC}\|$

1) Soit tout point M du plan, $\vec{AB} + \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AO} + \vec{OM}$ d'après la relation de Chasles.

Or $\vec{AB}$ et $\vec{AO}$ sont opposés, puisque O est la symétrique de B par rapport à A. Donc $\vec{AB} + \vec{AO} = \vec{0}$.

$$\vec{AB} + \vec{AM} = \vec{OM} \quad \text{C.A.E.D}$$

2) Soit D le point tel que ABD est un parallélogramme. D'après la caractérisation du parallélogramme par une somme vectorielle, on a : $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$

ABDC est un parallélogramme, donc $\vec{AB} = \vec{CD}$. (E1)

O est la symétrique de B par rapport à A, donc $\vec{OA} = \vec{AB}$. (E2)

$$(E1) \text{ et } (E2) \Rightarrow \vec{OA} = \vec{CD}$$

$$\Leftrightarrow \text{OCDA est un parallélogramme}$$

$$\|\vec{AB} + \vec{AM}\| = \|\vec{AB} + \vec{AC}\| \Leftrightarrow$$

$$\|\vec{OM}\| = \|\vec{OC}\|$$

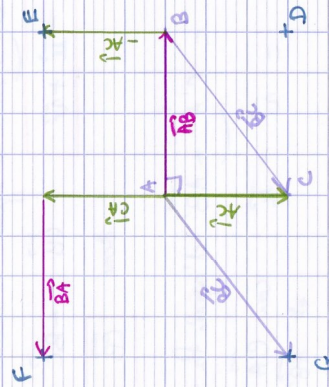
d'après la question 1) fait que $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

Suite de l'exercice 9 : question 2 - L'ensemble des points M du plan tels que $\|\vec{AB} + \vec{AM}\| = \|\vec{AB} + \vec{AC}\|$ est donc le cercle de centre O passant par C → je le nomme $\mathcal{C}$.

3) Les points P recherchés
→ doivent se trouver sur la droite (AC)
→ doivent se trouver sur $\mathcal{C}$ puisque $\|\vec{AB} + \vec{AP}\| = \|\vec{AB} + \vec{AC}\|$
Le sont donc les points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et la droite (AC). Il en existe 2 car C est un point de $\mathcal{C}$ et A un point intérieur à $\mathcal{C}$ (situé au milieu de son rayon [OB]).

Je les nomme P_1 et P_2 . L'un des deux est le point C.

Exercice 10 :

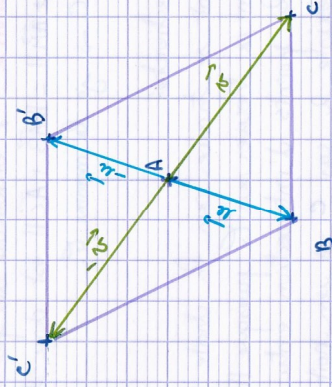


1) $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \Rightarrow D$ est le point tel que ABDE est un parallélogramme.

2) $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AE}$ 3) $\vec{CA} + \vec{BA} = \vec{AF} \Leftrightarrow \vec{AF} = \vec{CA} + \vec{BA}$

4) $\vec{AG} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BA} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$
d'après la relation de Chasles.

Exercice 11 :



B' est le symétrique de B par rapport à A signifie que A est le milieu de [BB']

C' est le symétrique de C par rapport à A signifie que A est le milieu de [CC']

1) $\vec{B'A} = \vec{AB}$ car A est le milieu de [BB']. Donc $\vec{B'A} = \vec{u}$

$\vec{AC'} = -\vec{AC}$ car A est le milieu de [CC'] donc $\vec{AC'} = -\vec{v}$

$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ d'après la relation de Chasles

$\vec{BC} = -\vec{u} + \vec{v}$ donc $\vec{CB} = \vec{u} - \vec{v}$

donc $\vec{CB} = \vec{u} - \vec{v}$

$\vec{C'B'} = \vec{C'A} + \vec{AB'}$ d'après la relation de Chasles

car $\vec{C'A} = \vec{AC} = \vec{v}$

et $\vec{AB'} = -\vec{AB} = -\vec{u}$

$\vec{C'B'} = -\vec{u} + \vec{v}$

2) A est le milieu de [BB'] et de [CC'].
BCB'C' est donc un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Il s'agit donc d'un parallélogramme.

Exercice 12: Question 3)

a) $\boxed{\vec{AB}' + \vec{AB} = \vec{0}}$ car A est le milieu de $[BB']$.

b) $\boxed{\vec{CA} + \vec{CA} = \vec{0}}$ car A est le milieu de $[CC']$.

c) $\boxed{\vec{BC} + \vec{B'C'}} = \vec{BC} + \vec{CB} = \vec{BB} = \boxed{\vec{0}}$
 d'après la relation de Chasles

car $BCB'C'$ est un parallélogramme.

d) $\boxed{\vec{C'B} + \vec{CB'}} = \vec{C'B} + \vec{BC'} = \vec{CC'} = \boxed{\vec{0}}$
 d'après la relation de Chasles

car $BCB'C'$ est un parallélogramme.