2nde – Chapitre 0 – Calcul fractionnaire et valeurs interdites.

Plan de la leçon :

I- Règle fondamentale du calcul fractionnaire. (vidéo 1)

II- Simplifications d'écritures fractionnaires. (vidéo 1)

III- Valeurs interdites. (vidéo 2)

IV- Réductions au même dénominateur.
1. De fractions. (vidéo 3)
2. D'écritures fractionnaires. (vidéo 4)

V- Additions et soustractions
1. De fractions. (vidéo 5)
2. D'écritures fractionnaires. (vidéos 6 et 7)

VI- Multiplications de fractions entre elles. (vidéo 8)

VII- Inverse et opposé – Diviser par une fraction (vidéo 9)

2^{nde} - Chapitre 0
Calcul fractionnaire et valeurs interdites

I- Règle fondamentale du calcul fractionnaire
une règle « pas de jaloux »

Règle fondamentale du calcul fractionnaire :

à savoir par ❤ !

On ne change pas la valeur d'une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie (respectivement : divise) son numérateur **et** son dénominateur par un même nombre non nul.

non nul signifie **différent de 0**

nul signifie **égal à 0**

$$\left.\frac{\text{NUMÉRATEUR}}{\text{DÉNOMINATEUR}}\right\}\ \text{écriture fractionnaire}$$

On parle de **FRACTION** quand le numérateur et le dénominateur sont des NOMBRES ENTIERS.

Exemples :

Comme 10 est non-nul, on a le droit de multiplier le numérateur et le dénominateur par 10

$$\frac{2{,}5}{10} = \frac{2{,}5 \times 10}{10 \times 10} = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

$$\frac{25}{100} = \frac{1 \cancel{\times 25}}{4 \cancel{\times 25}} = \frac{1}{4}$$

c'est aussi égal à 0,25

barrer "x25" au numérateur et au dénominateur revient à les diviser tous les deux par 25. 25 est non nul, on a le droit.

II- Simplifications d'écritures fractionnaires.

simplifier une fraction (d'entiers positifs) : l'écrire avec un numérateur et un dénominateur les plus petits possibles

Pour simplifier une fraction : on décompose son numérateur et son dénominateur, et on barre les multiplications identiques, ce qui revient à diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre (non nul, bien sûr).

Exemples de simplifications de fractions :

$$\frac{84}{70} = \frac{2 \times 42}{7 \times 10} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{7} \times 6}{\cancel{7} \times \cancel{2} \times 5} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

$$\frac{130}{26} = \frac{\cancel{13} \times \cancel{2} \times 5}{\cancel{13} \times \cancel{2} \times 1} = \frac{5}{1} = \boxed{5}$$

$$\frac{5400}{2250} = \frac{54 \times 100}{9 \times 25 \times 10} = \frac{\cancel{9} \times 3 \times 2 \times \cancel{10} \times \cancel{5} \times 2}{\cancel{9} \times 5 \times \cancel{5} \times \cancel{10}} = \boxed{\frac{12}{5}}$$

Retenir : Ça ne change pas un nombre de le multiplier ou de le diviser par 1.

Pourquoi le nombre par lequel on multiplie ou divise le numérateur et le dénominateur doit être non-nul :

⚠ Équation : $\dfrac{\cancel{(x-2)} \times x^2}{\cancel{x-2}} = 4$

n'équivaut pas à $x^2 = 4$

En effet : $x^2 = 4$ a deux solutions : 2 et -2.

or, -2 n'est pas solution de l'équation $\dfrac{(x-2) \times x^2}{x-2} = 4$

car $\dfrac{0 \times 4}{0}$ n'est pas défini. **MATH ERROR**

parce que : **ON NE PEUT PAS DIVISER PAR ZÉRO** ⚠

Résolution de l'équation : On pose pour condition : $\boxed{x \neq 2}$

Alors : $\dfrac{\cancel{(x-2)}\times x^2}{\cancel{x-2}} = 4 \underset{\text{équivaut à}}{\Leftrightarrow} x^2 = 4$

-4 $\qquad$ -4

3ème identité remarquable :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

FACTORISATION

Règle du produit nul :

$$A\times B=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2=0 \text{ ou } x-2=0$$

-2 $\quad$ -2 $\qquad$ $+2$ $\quad$ $+2$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=-2} \text{ ou } \cancel{x=2}$$

Seule solution

non, car on a posé $x \neq 2$

$$S=\{-2\}$$

L'ensemble des solutions

est

l'ensemble

qui contient uniquement le nombre -2

À vous de simplifier les écritures fractionnaires suivantes :

$$\frac{21}{14} \qquad \frac{16}{12} \qquad \frac{27}{36} \qquad \frac{56}{49} \qquad \frac{5400}{2250} \qquad \frac{0{,}2}{16}$$

$$\frac{0{,}005}{0{,}75} \qquad \frac{12\times 10^{3}}{16\times 10^{2}} \qquad \frac{35\times 10^{-4}}{7{,}5\times 10^{-6}}$$

Simplifiez ces trois écritures fractionnaires en vérifiant à chaque fois que l'expression par laquelle on simplifie ne puisse pas valoir zéro :

$$\frac{(3-\pi)\times 7\pi}{4\pi\times(3-\pi)} \qquad \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{3\times(\sqrt{2}-1)} \qquad \frac{7x(x-7)}{49(x-7)}$$

\+ Exercices : 1-2-3 de la feuille d'exercices n°1

1

⚠ Erreur fréquente :

$$\frac{3n-\cancel{4}}{4p-\cancel{4}} = \frac{3n}{4p} \quad \text{FAUX !}$$

Barrer les -4 revient à additionner 4.

⚠ Additionner ou soustraire un même nombre au numérateur et au dénominateur d'une écriture fractionnaire change sa valeur.

$$\frac{3+\cancel{x}}{5+\cancel{x}} = \frac{3}{5} \quad \text{FAUX !}$$

Barrer les $+x$ revient à soustraire x

⚠ Simplifier, ce n'est PAS "barrer la même chose" au numérateur et au dénominateur.

On ne peut barrer qu'une même multiplication ou une même division par un nombre non nul.

$$\frac{\frac{16}{\cancel{7}}}{\frac{5}{\cancel{7}}} = \frac{16}{5}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par 7.

$7 \neq 0 \longrightarrow$ on a le droit !

2

III- Valeurs interdites

Voici deux expressions littérales : (avec des lettres dedans)

$$\frac{x+7}{2x-10} \quad \text{et} \quad \sqrt{2t-3}$$

pour $x=5$?

```
Ma ERROR
  Press:[EXIT]
```

→ Parce que ça donnerait 0 au dénominateur et qu'on ne peut pas diviser par 0.

pour $t=1$?

```
Non-Real ERROR
  Press:[EXIT]
```

→ parce que ça donnerait un nombre négatif sous la racine carrée, or seuls les nombres positifs peuvent figurer sous ce symbole.

Une "valeur interdite" dans une expression littérale, c'est une valeur de la lettre qui rend l'expression "non calculable".
Ma ERROR ou Non-Real ERROR

Pour rechercher les valeurs interdites :

- Quand il y a des dénominateurs avec des lettres, on résout : $\boxed{\text{dénominateur(s)} = 0}$
- Quand il y a une racine carrée, on résout l'inéquation : $\boxed{\text{expression sous la racine} < 0}$

3

Exemples de recherches de valeurs interdites :

$$A(y) = \frac{5y}{12-y}$$ $\longrightarrow$ Ne doit pas valoir 0.

On résout : (E) $12-y=0$

(E) $\Longleftrightarrow$ (équivaut à) $12 = y$ ($+y$)

Valeur interdite : $\boxed{y=12}$

$$B(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$$

Il n'y a pas de valeur interdite, parce que x^2+4 ne peut jamais valoir 0.

x est soit :
- positif (signe +)
- négatif (signe −)
- nul (égal à 0)

Mais dans les 3 cas, $x^2 \geqslant 0$ et donc $x^2 + 4 > 0$

4

$$C(x) = \frac{13x-1}{x^2-4}$$ — peut valoir 0

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$x^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$$
$$\Longleftrightarrow x+2=0 \text{ ou } x-2=0$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{x=-2} \text{ ou } \boxed{x=2}$$

Deux valeurs interdites

$$D(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{-2x+6}$$

Aucun des deux dénominateurs ne doit pouvoir valoir 0.

Il faut que : $x \neq 0$ et $-2x+6 \neq 0$

Or $-2x+6 = 0 \Longleftrightarrow -2x = -6$

$\Longleftrightarrow x = 3$ ($\div(-2)$) car $\frac{-6}{-2} = 3$

On a donc deux valeurs interdites :

$\boxed{x=0}$ et $\boxed{x=3}$

D'autres sortes de valeurs interdites :

celles qui rendent une expression sous une racine carrée négative.

Dans $\sqrt{x - 5}$

Les valeurs interdites seront les valeurs de x qui rendent l'expression sous la racine carrée négative.

Quand est-ce que $x - 5$ est négative ?

$\boxed{\text{négative}} = \boxed{\text{plus petite que 0}} = \boxed{< 0}$

$$x - 5 < 0$$

lorsque

$$x < 5$$

(+5 de chaque côté)

Les valeurs interdites pour l'expression $\sqrt{x-5}$ sont tous les nombres x plus petits que 5.

Bilan de la vidéo n°2

Simplifier, ce n'est pas "barrer la même chose" au numérateur et au dénominateur. On ne peut barrer qu'une même multiplication ou une même division par un nombre non nul.

Une "valeur interdite" dans une expression littérale, c'est une valeur de la lettre qui rend l'expression "non calculable".

Ma ERROR ou Non-Real ERROR

Pour rechercher les valeurs interdites :

- Quand il y a des dénominateurs avec des lettres, on résout : $\boxed{\text{dénominateur(s)} = 0}$
- Quand il y a une racine carrée, on résout l'inéquation :

$$\boxed{\text{expression sous la racine} < 0}$$

Exercices : 4 et 5 de la feuille d'exercices n°1

IV - Réductions au même dénominateur.

1) de fractions.

La règle fondamentale vue au paragraphe I sert :

→ à simplifier fractions et expressions

→ à réduire au même dénominateur

réduire au même dénominateur sert :
- à comparer
- à additionner
- à soustraire

des écritures fractionnaires

Choix du dénominateur commun ?

Lorsque les fractions sont simplifiées,
le dénominateur commun à choisir,
c'est le plus petit multiple commun
(PPCM)
des dénominateurs des fractions.

Le PPCM de deux nombres premiers entre eux est leur produit

C'est pourquoi : Quand les fractions sont simplifiées et que leurs dénominateurs sont premiers entre eux, on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'une par le dénominateur de l'autre, et vice-versa.

⚠ Uniquement dans ce cas !

Exemple 1 : Réduisons au même dénominateur :

$$\boxed{\frac{1}{10}} \qquad \frac{7}{2} \qquad \frac{8}{5}$$

10 est un multiple de 2 et de 5

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \boxed{\frac{35}{10}}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{8 \times 2}{5 \times 2} = \boxed{\frac{16}{10}}$$

Exemple 2 : Réduisons $\boxed{5}$ et $\boxed{\frac{7}{11}}$ au même dénominateur.

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{5 \times 11}{1 \times 11} = \boxed{\frac{55}{11}}$$

Exemple 3 : Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 20}{7 \times 20} = \boxed{\frac{60}{140}}$$

$$\frac{13}{20} = \frac{13 \times 7}{20 \times 7} = \boxed{\frac{91}{140}}$$

Parce que les deux fractions à réduire sont simplifiées et leurs dénominateurs premiers entre eux.

Exemple 4 : Réduisons $\frac{15}{10}$ et $\frac{4}{8}$ au même dénominateur.

$$\frac{15}{10} = \frac{3 \times \cancel{5}}{2 \times \cancel{5}} = \boxed{\frac{3}{2}} \qquad \frac{4}{8} = \frac{1 \times \cancel{4}}{2 \times \cancel{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

⚠ Ne pas confondre les deux démarches :

Simplifier : $\frac{15}{10} = \frac{3 \times \cancel{5}}{2 \times \cancel{5}} = \frac{3}{2}$ Résultats des divisions

Multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre pour réduire au même dénominateur :

$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$ Résultats des multiplications

Exemple 5 : Réduisons $\frac{15}{16}$ et $\frac{7}{20}$ au même dénominateur.

Ma façon (personnelle, non obligatoire) de déterminer le PPCM de 16 et de 20 :

$16 = 4 \times 4 = \boxed{2 \times 2} \times \boxed{2 \times 2}$ partie spécifique pour 16

$20 = 4 \times 5 = \underbrace{\boxed{2 \times 2}}_{4} \times \boxed{5}$ partie spécifique pour 20

PGCD(16;20)

$$\begin{aligned} \text{PPCM}(16;20) &= \boxed{2 \times 2} \times \boxed{2 \times 2} \times \boxed{5} \\ &= 4 \times 4 \times 5 \\ &= 4 \times 20 \\ &= 80 \end{aligned}$$

$$\frac{15}{16} = \frac{15 \times 5}{16 \times 5} = \boxed{\frac{75}{80}}$$

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \times 4}{20 \times 4} = \boxed{\frac{28}{80}}$$

Exemple 6 : Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{2}{15} \qquad \frac{8}{25} \qquad \frac{7}{10}$$

sont toutes les trois simplifiées.

$15 = \boxed{3} \times \boxed{5}$ $\quad 25 = \boxed{5} \times \boxed{5}$ $\quad 10 = \boxed{2} \times \boxed{5}$

$$\begin{aligned} \text{PPCM}(15 ; 25 ; 10) &= \boxed{5} \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{2} \\ &= 15 \times 10 \\ &= 150 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2 \times 5 \times 2}{15 \times 5 \times 2} = \boxed{\frac{20}{150}}$$

$$\frac{8}{25} = \frac{8 \times 3 \times 2}{25 \times 3 \times 2} = \boxed{\frac{48}{150}}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{7 \times 3 \times 5}{10 \times 3 \times 5} = \boxed{\frac{105}{150}}$$

Exemple 7 : Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{4}{35} \qquad \frac{11}{14} \qquad \frac{17}{10}$$

$35 = \boxed{5} \times \boxed{7}$ $\quad 14 = \boxed{2} \times \boxed{7}$ $\quad 10 = \boxed{2} \times \boxed{5}$

PPCM (35;14;10) = $\boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{7} = 70$

$$\frac{4}{35} = \frac{4 \times 2}{35 \times 2} = \boxed{\frac{8}{70}}$$

$$\frac{11}{14} = \frac{11 \times 5}{14 \times 5} = \boxed{\frac{55}{70}}$$

$$\frac{17}{10} = \frac{17 \times 7}{10 \times 7} = \boxed{\frac{119}{70}}$$

Fiche-méthode : pour réduire des fractions au même dénominateur.

1- On regarde si elles sont simplifiées.

Si elles ne sont pas simplifiées, on les simplifie
sauf si on voit que ça ne sera pas utile, mais c'est rare.

Dans : $\frac{3}{25}$ et $\frac{10}{15}$

pas la peine de simplifier $\frac{10}{15}$ par 5 car "il y a du 5" dans le 25.

Ici, on procède comme au 4) :

$25 = \boxed{5} \times \underline{5}$ ce qui manque à 15.

$15 = \underline{3} \times \boxed{5}$ ce qui manque à 25.

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \times 3}{25 \times 3} = \frac{9}{75}$$

$$\frac{10}{15} = \frac{10 \times 5}{15 \times 5} = \frac{50}{75}$$

2- On regarde si l'un des dénominateurs est multiple des autres.

$\frac{7}{24}$ $\frac{8}{3}$ $\frac{1}{4}$

24 est multiple de 3 et de 4 ⟶ on réduira sur 24.

$$\frac{8}{3} = \frac{8 \times 8}{3 \times 8} = \frac{64}{24}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 6}{4 \times 6} = \frac{6}{24}$$

3- On regarde si les dénominateurs sont premiers entre eux.

Si oui : on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'une avec le dénominateur de l'autre et vice-versa.

$\frac{4}{15}$ et $\frac{3}{8}$

$15 = 3 \times 5$

$8 = 2 \times 2 \times 2$

15 et 8 sont premiers entre eux car il n'y a pas de facteur commun dans leurs décompositions en facteurs premiers.

$$\frac{4}{15} = \frac{4 \times 8}{15 \times 8} = \frac{32}{120}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 15}{8 \times 15} = \frac{45}{120}$$

<u>Remarque</u> : pour savoir si une fraction est simplifiée, on fait pareil : elle sera simplifiée si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

4- Si les conditions 1-2-3 ne sont pas vérifiées :

a) on décompose au maximum les dénominateurs

$\frac{4}{15}$ et $\frac{3}{20}$

$15 = \underline{3} \times \boxed{5}$ "ce qui manque à 20"

$20 = \underline{2 \times 2} \times \boxed{5}$ "ce qui manque à 15"

b) on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'une avec "ce qui manque à l'autre" dénominateur.

$$\frac{4}{15} = \frac{4 \times 2 \times 2}{15 \times 2 \times 2} = \frac{16}{60}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \times 3}{20 \times 3} = \frac{9}{60}$$

...Et s'il y a 3 fractions à réduire au même dénominateur, même principe (cf : exemples 6-7 du cours.)

IV - Réductions au même dénominateur.

2) D'expressions littérales.

Exemple 8 : Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{3}{1} \qquad \frac{-2t+7}{5} \qquad \frac{10-t}{15}$$

multiple

$$\frac{3}{1} = \frac{3 \times 15}{1 \times 15} = \boxed{\frac{45}{15}} \qquad \boxed{\frac{10-t}{15}}$$

$$\frac{-2t+7}{5} = \frac{(-2t+7) \times 3}{5 \times 3} = \boxed{\frac{-6t+21}{15}}$$

Exemple 9 : Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{x^2}{12} \quad \text{et} \quad \frac{-2x+5}{8}$$

$12 = \boxed{4} \times \boxed{3}$

$8 = \boxed{4} \times \boxed{2}$

PGCD

$\text{PPCM}(8;12) = \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} = 24$

$$\frac{x^2}{12} = \frac{x^2 \times 2}{12 \times 2} = \boxed{\frac{2x^2}{24}} \qquad \frac{-2x+5}{8} = \frac{(-2x+5) \times 3}{8 \times 3} = \boxed{\frac{-6x+15}{24}}$$

Exemple 10 : Réduisons au même dénominateur : 2 et $\dfrac{4}{3a+2}$

Recherche des valeurs interdites :

On résout : $3a+2 = 0 \Leftrightarrow 3a = -2$

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{2}{3}$

$\div 3$ $\div 3$

Valeur interdite : $\boxed{a = -\dfrac{2}{3}}$

$$2 = \frac{2 \times (3a+2)}{1 \times (3a+2)} = \boxed{\frac{6a+4}{3a+2}}$$

analogue à : $2 = \dfrac{2 \times 7}{1 \times 7} = \boxed{\dfrac{14}{7}}$

Exemple 11 : Réduisons au même dénominateur : $\dfrac{7}{x+1}$ et $\dfrac{2x}{3x+3}$

Recherche des valeurs interdites :

$x+1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -1}$

$3x+3 = 0 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow \boxed{x = -1}$

On calcule pour : $x \neq -1$

$\dfrac{7}{x+1}$ et $\boxed{\dfrac{2x}{3x+3}}$

multiple de

car $3x + 3 \times 1 = 3 \times (x+1)$

$ka + kb = k(a+b)$

$$\frac{7}{x+1} = \frac{7 \times 3}{(x+1) \times 3} = \boxed{\frac{21}{3x+3}}$$

Exemple 12 : Réduisons au même dénominateur : $\dfrac{3}{2y-1}$ et $\dfrac{5}{y+7}$

Recherche des valeurs interdites :

$2y-1 = 0 \Leftrightarrow 2y = 1 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}}$

$y+7 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = -7}$

On calcule pour : $y \neq \dfrac{1}{2}$ et $y \neq -7$

$\dfrac{3}{2y-1}$ et $\dfrac{5}{y+7}$

$$\frac{3}{2y-1} = \frac{3\,(y+7)}{(2y-1)(y+7)} = \boxed{\frac{3y+21}{(2y-1)(y+7)}}$$

$$\frac{5}{y+7} = \frac{5\,(2y-1)}{(y+7)(2y-1)} = \boxed{\frac{10y-5}{(2y-1)(y+7)}}$$

analogue :

$\dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{7}{3}$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \boxed{\frac{12}{15}}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{7 \times 5}{3 \times 5} = \boxed{\frac{35}{15}}$$

Exemple 13 :

$\dfrac{x}{x+3}$; $\dfrac{3}{x-3}$ et $\dfrac{2x}{x^2-9}$

$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ car $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Valeurs interdites : $x+3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -3}$

$x-3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$

$x^2-9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x+3=0$ ou $x-3=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x=-3}$ ou $\boxed{x=3}$

car : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$
Règle du produit nul

$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ car $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$\frac{x}{x+3} = \frac{x\,(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \boxed{\frac{x^2-3x}{(x+3)(x-3)}}$$

$$\frac{3}{x-3} = \frac{3\,(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \boxed{\frac{3x+9}{(x+3)(x-3)}}$$

$$\frac{2x}{x^2-9} = \boxed{\frac{2x}{(x+3)(x-3)}}$$

$10 = 2 \times 5$

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \boxed{\frac{35}{2 \times 5}}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{8 \times 2}{5 \times 2} = \boxed{\frac{16}{2 \times 5}}$$

$$\frac{1}{10} = \boxed{\frac{1}{2 \times 5}}$$

V- Additions et soustractions

1) De fractions.

Méthode : Pour additionner/soustraire des fractions :

1- On les réduit au même dénominateur.

2- On garde le dénominateur commun.

3- On additionne/soustrait entre eux les numérateurs.

Ne JAMAIS additionner ou soustraire des dénominateurs entre eux !

$$\frac{8}{5} - \frac{3}{4} \neq \frac{8-3}{5-4}$$

Exemple 1 : $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$A = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1}{6}$

$A = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$

$A = \frac{4}{6}$

$A = \frac{2 \cancel{\times 2}}{3 \cancel{\times 2}}$ $\boxed{A = \frac{2}{3}}$

Exemple 2 : $B = \frac{7}{20} - \frac{8}{35}$

$20 = \underbrace{2 \times 2}_{4} \times \boxed{5}$

$35 = \boxed{5} \times \underline{7}$

$PGCD(20;35) = \boxed{5}$

$B = \frac{7 \times 7}{20 \times 7} - \frac{8 \times 4}{35 \times 4}$

$B = \frac{49}{140} - \frac{32}{140}$

$B = \boxed{\frac{17}{140}}$ } pas simplifiable

Exemple 3 : $C = \frac{10}{7} + \frac{5}{14} - \frac{3}{4}$

$7 = 7$

$14 = 2 \times 7$

$4 = 2 \times 2$

$PPCM(7;14;4) = 2 \times 2 \times 7$

$C = \frac{10 \times 2 \times 2}{7 \times 2 \times 2} + \frac{5 \times 2}{14 \times 2} - \frac{3 \times 7}{4 \times 7}$

$C = \frac{40}{28} + \frac{10}{28} - \frac{21}{28}$

$\boxed{C = \frac{29}{28}}$

Exemple 4 : $D = 7 - \frac{9}{15} - \frac{3}{25}$

$D = 7 - \frac{3 \cancel{\times 3}}{5 \cancel{\times 3}} - \frac{3}{25}$

$D = 7 - \frac{3}{5} - \frac{3}{25}$

$D = \frac{7 \times 25}{1 \times 25} - \frac{3 \times 5}{5 \times 5} - \frac{3}{25}$

$D = \frac{175}{25} - \frac{15}{25} - \frac{3}{25}$

$\boxed{D = \frac{157}{25}}$ } simplifiée

V- Additions et soustractions

2) D'expressions littérales.

Exemple 1 : Résolvons l'inéquation

$$\text{(I)} \quad \underbrace{\frac{16 - x}{12} - 3}\leqslant \underbrace{\frac{2x + 1}{9}}$$

But : Réduire les deux membres
au même dénominateur,
pour ensuite multiplier les deux membres
par le dénominateur commun,
pour se retrouver avec une
inéquation sans dénominateur.

$$12 = \overbrace{2 \times 2}^{4} \times \boxed{3}$$

$$9 = \boxed{3} \times 3$$

$$\text{PGCD}(12;9) = \boxed{3}$$

$$\text{PPCM}(12;9) = \boxed{3} \times 4 \times 3 = 36$$

$$\text{(I)} \quad \frac{16 - x}{12} - 3 \leqslant \frac{2x + 1}{9}$$

On va réduire chaque terme
de chaque membre
sur 36.

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \frac{(16 - x) \times 3}{12 \times 3} - \frac{3 \times 36}{1 \times 36} \leqslant \frac{(2x + 1) \times 4}{9 \times 4}$$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \frac{48 - 3x - 108}{\cancel{36}} \leqslant \frac{8x + 4}{\cancel{36}}$$

× 36   × 36

$$\text{(I)} \Leftrightarrow 48 - 3x - 108 \leqslant 8x + 4$$

Règle "pas de jaloux" des inéquations : Quand on multiplie ou divise les deux membres d'une inéquation par un nombre STRICTEMENT POSITIF, on ne change pas le sens de l'inégalité.

$$\text{(I)} \Leftrightarrow -3x - 60 \leqslant 8x + 4$$

$-8x + 60$ $-8x + 60$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow -11x \leqslant 64$$

$\div(-11)$ $\div(-11)$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{64}{11}$$

simplifiée

$$\boxed{S = \left[-\frac{64}{11} ; +\infty\right[}$$

L'inégalité est "large" (il y a un "ou égal")

Une fonction sera HOMOGRAPHIQUE si sa formule peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{avec :} \begin{cases} \text{a ou b (au moins) non nul} \\ c \neq 0 \end{cases}$$

On a fait préalablement la recherche des valeurs interdites

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+4} - 5$$

On calcule pour $x \neq -4$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+4} - \frac{5 \times (x+4)}{1 \times (x+4)}$$

$$f(x) = \frac{2x-3 - 5 \times (x+4)}{x+4}$$

$$f(x) = \frac{2x-3 - 5x - 20}{x+4}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{-3x - 23}{1x+4}} = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{avec} \begin{cases} a = -3 \\ b = -23 \\ \boxed{c = 1} \\ d = 4 \end{cases}$$

On a bien : a ou b (au moins) non nul

→ f est une fonction HOMOGRAPHIQUE.

(Suite du V-2 du chapitre 0)

Exemple 2 :

Les fonctions f et g sont données par les formules :

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+4} - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{3x+2} + \frac{1}{x}$$

On veut savoir si elles sont homographiques.

→ Il faut les écrire sur un seul dénominateur commun.

On a recherché les valeurs interdites

$$g(x) = \frac{x+1}{3x+2} + \frac{1}{x}$$

On calcule pour : $x \neq -\frac{2}{3}$ et $x \neq 0$

$$g(x) = \frac{x+1}{3x+2} + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{(x+1) \times x}{(3x+2) \times x} + \frac{1 \times (3x+2)}{x \times (3x+2)}$$

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 3x + 2}{x(3x+2)}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x(3x+2)}}$$

Calcul analogue :

$$B = \frac{10}{7} + \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{10 \times 3}{7 \times 3} + \frac{1 \times 7}{3 \times 7}$$

$$B = \frac{30 + 7}{3 \times 7}$$

$$B = \frac{37}{21}$$

pas de la forme : $\frac{ax+b}{cx+d}$ → g n'est pas une fonction HOMOGRAPHIQUE.

VI - Multiplier des fractions entre elles.

Pour multiplier des fractions entre elles :

1- On fait (mentalement) le produit des numérateurs entre eux, et celui des dénominateurs entre eux, sans effectuer.

2- On décompose et simplifie.

3- On effectue les multiplications restantes au numérateur et au dénominateur pour obtenir le résultat.

Rappel : si on a tout simplifié au numérateur ou au dénominateur, on ajoute un petit $\times 1$, car

Ça ne change pas un nombre
de le multiplier (ou de le diviser)
par 1.

Calculons : $A = 130 \times \dfrac{18}{25} \times \dfrac{15}{39}$

$$\left(A = \frac{130 \times 18 \times 15}{25 \times 39} \right)$$

$$A = \frac{\cancel{13} \times 2 \times \cancel{5} \times 18 \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{3} \times \cancel{13} \times 1}$$

$$\boxed{A = 36}$$

Calculons : $B = \dfrac{-15}{14} \times \dfrac{10}{-17} \times \dfrac{-28}{12}$

$$B = -\frac{\cancel{3} \times 5 \times \cancel{2} \times 5 \times \cancel{7} \times \cancel{4}}{\cancel{2} \times \cancel{7} \times 17 \times \cancel{3} \times \cancel{4}}$$

$$\boxed{B = -\frac{25}{17}}$$

Si, dans un produit ou un quotient,
on a des facteurs négatifs,

- S'il y a un nombre pair de facteurs négatifs, le résultat sera du signe +.

- S'il y a un nombre impair de facteurs négatifs, Le résultat sera du signe -.

$$B = \frac{-15}{14} \times \frac{10}{-17} \times \frac{-28}{12}$$

$$B = - \ \cdots$$

$$B' = \frac{-15}{14} \times \frac{10}{-17} \times \frac{-28}{-12}$$

$$B' = + \ \cdots$$

$A = 130 \times \dfrac{18}{25} \times \dfrac{15}{39}$ bien aligner

$f(x) = \dfrac{5+x}{10} - 12$

PAS BIEN !

$$Z = -\frac{5+2}{3} = \boxed{-\frac{7}{3}}$$

Ce n'est pas pareil !!

$$Z' = \frac{-5+2}{3} = \frac{-3}{3} = \boxed{-1}$$

1

VII- Inverse et opposé - diviser par une fraction

1- Inverse et opposé

Définition : Deux nombres sont opposés l'un de l'autre quand leur somme vaut 0.

Exemple : 4 et -4 sont opposés, car $4 + (-4) = \boxed{0}$.

Définition : Deux nombres sont inverses l'un de l'autre quand leur produit vaut 1.

Exemple : 4 et $\frac{1}{4}$ sont inverses, car $4 \times \frac{1}{4} = \frac{\cancel{4} \times 1}{1 \times \cancel{4}} = 1$

Règle : Ça ne change pas un nombre de le multiplier ou de le diviser par 1. Car 1 est l'élément neutre pour la multiplication.

Règle : Ça ne change pas un nombre de lui ajouter ou de lui soustraire 0. Car 0 est l'élément neutre pour l'addition.

2

Tous les nombres ont un opposé.

Celui de 4 est -4, celui de -3,5 est +3,5, celui de $-\frac{5}{8}$ est $+\frac{5}{8}$.

Mais il y a un nombre qui n'a pas d'inverse.

L'inverse de 4, c'est $\frac{1}{4}$, l'inverse de -8, c'est $-\frac{1}{8}$,

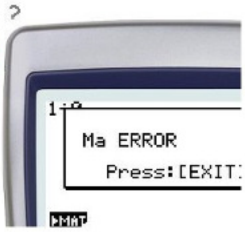
l'inverse d'un nombre, c'est $\frac{1}{\text{ce nombre}}$.

n'importe quel nombre ?

pas zéro

L'inverse de 0 ne peut pas être $\cancel{\frac{1}{0}}$

$0 \times \boxed{\text{n'importe quel nombre}} = 0$, jamais 1.



→ Zéro n'a pas d'inverse.

Tous les nombres ont un inverse, sauf 0.

3

L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$, lorsque $\begin{cases} a \neq 0 \\ \text{et} \\ b \neq 0 \end{cases}$, est la fraction $\frac{b}{a}$.

En effet : $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{b} \times 1}{\cancel{b} \times \cancel{a} \times 1} = 1$

Exemples : L'inverse de $\frac{5}{6}$ est $\frac{6}{5}$. L'inverse de $-\frac{9}{2}$ est $-\frac{2}{9}$.

Remarque importante : Un nombre et son inverse ont toujours le même signe.

Alors qu'un nombre et son opposé sont de signes contraires.

4

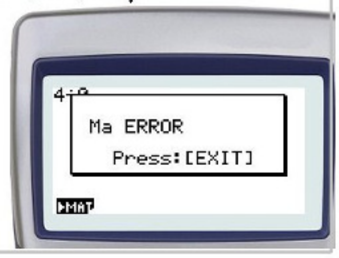
Et quel est l'inverse de $\frac{x + 5}{4}$?

C'est $\frac{4}{x + 5}$, mais avec une valeur interdite : $x = -5$.

Lorsque $x = -5$, $\frac{x + 5}{4} = \frac{-5 + 5}{4} = \frac{0}{4} = 0$.

Mais $\frac{4}{x + 5}$ n'est pas défini lorsque $x = -5$.

$\cancel{\frac{4}{0}}$



5

2- Diviser par une fraction.

Règle : pour diviser par une fraction, on multiplie par l'inverse de cette fraction.

Exemple 1 :

$C = 2 : \frac{6}{5}$

$C = 2 \times \frac{5}{6}$

$C = \frac{\cancel{2} \times 5}{\cancel{2} \times 3}$

$\boxed{C = \frac{5}{3}}$

Exemple 2 :

$D = \frac{17}{4} : \frac{15}{12}$

$D = \frac{17}{4} \times \frac{12}{15}$

$D = \frac{17 \times \cancel{3} \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 5}$

$\boxed{D = \frac{17}{5}}$

Exemple 3 :

$E = \frac{\frac{6}{21}}{\frac{30}{35}}$ $\quad E = \frac{6}{21} \times \frac{35}{30}$

$E = \frac{1 \times \cancel{6} \times \cancel{7} \times \cancel{5}}{\cancel{7} \times 3 \times \cancel{6} \times \cancel{5}}$

$\boxed{E = \frac{1}{3}}$

6

Erreur fréquente.

$\frac{10}{7} : \frac{4}{9} = \frac{10}{7} \times \frac{9}{4}$

Bien remplacer le ÷ par un ×

ne pas inverser cette fraction !
On inverse seulement la fraction par laquelle on divise.

Exemple 4 :

$F = \frac{3}{\frac{6}{5}}$

$F = 3 \times \frac{5}{6}$

$F = \frac{\cancel{3} \times 5}{2 \times \cancel{3}}$

$\boxed{F = \frac{5}{2}}$

$F' = \frac{\frac{3}{6}}{5}$ ← multiplier par : $\frac{1}{5}$

$F' = \frac{3}{6} \times \frac{1}{5}$

$F' = \frac{\cancel{3} \times 1}{2 \times \cancel{3} \times 5}$

$\boxed{F' = \frac{1}{10}}$

Noter à la main le bilan