Chapitre 2 - Équations et inéquations du 1er degré et d'autres types d'équations.

I- Quelques règles, notations et définitions :

Au niveau lycée :

- On utilise le symbole $\Leftrightarrow$ "équivaut à" entre les équations (ou inéquations) équivalentes.

- À la fin, on indique l'ensemble S des solutions.

Définition : on dit que deux équations (ou deux inéquations) sont équivalentes quand elles ont le même ensemble de solutions.

Entre deux équations (ou inéquations) équivalentes, on écrit le symbole $\Leftrightarrow$ ("équivaut à") qui peut se lire aussi : "si et seulement si".

"équivaut à"

$$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow -2x = -6$$

"si et seulement si"

Les règles de base sont du type "pas de jaloux" .

Les opérations suivantes appliquées aux deux membres permettent de passer d'une équation à une équation qui lui est équivalente :

- additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres.

- multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre non nul ! ⚠

Et pour les inéquations, on peut :

- additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres.
- multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre :
  - strictement positif en conservant le sens de l'inégalité.

ou
  - strictement négatif en changeant le sens de l'inégalité.

Définition : on dit que deux équations (ou deux inéquations) sont équivalentes quand elles ont le même ensemble de solutions.

Entre deux équations (ou inéquations) équivalentes, on écrit le symbole $\Leftrightarrow$ ("équivaut à") qui peut se lire aussi : "si et seulement si".

"équivaut à"

$$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow -2x = -6$$

"si et seulement si"

Exemple 1 : Résolvons l'inéquation (I_1) :

et les termes "sans x" dans le premier.

On pouvait choisir de rassembler les termes "en x" dans le second membre

$$
\begin{aligned}
(I_1)\quad & \underbrace{-2x+6}\ <\ \underbrace{0} \\
(I_1)\ \Leftrightarrow\quad & 6 < 2\times x \quad (+2x) \\
(I_1)\ \Leftrightarrow\quad & 3 < x \quad (\div 2) \\
(I_1)\ \Leftrightarrow\quad & x > 3 \quad (\text{"miroir"})
\end{aligned}
$$

$\div 2$: strictement positif

$S =]3 ; +\infty[$

Retenons : Pour résoudre une équation, je peux, entre deux étapes :

- Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres.
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre non nul.

Pour résoudre une inéquation (avec : $\underbrace{>, <}_{\text{strict}}, \underbrace{\geqslant \text{ ou } \leqslant}_{\text{large}}$), on peut, entre deux étapes :

- Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres.
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre strictement positif.
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inégalité.

Exemple 3 : Une équation qui n'a pas de solution.

$$(E_3)\quad \overbrace{2x+5}\ \xrightarrow{+2}\ \overbrace{2x+7}$$

$$(E_3)\quad 2x + 5 = 2x + 7$$

$-2x$ $-2x$

$$(E_3) \Leftrightarrow \quad 5 = 7$$

Pour quelles valeur de x suis-je vraie ?

Je suis une équation d'inconnue x !

...malgré les apparences !

L'ensemble des solutions de cette équation

est

→ Pour aucune !

→ (E_3) n'a pas de solution.

$$S = \emptyset = \{\ \}$$

L'ensemble vide

Exemple 3 bis : Résolvons l'inéquation :

est toujours plus petit que

$$(I_3)\quad 2x + 5 < 2x + 7$$

$-2x$ $-2x$

$$(I_3) \Leftrightarrow \quad 5 < 7$$

Pour quelle(s) valeurs(s) de x suis-je vraie ?

→ Pour toutes !

→ Tous les nombres sont solutions de cette inéquation.

$S = \mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels

$\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$ crochets ouverts

$-\infty$ *La droite des réels* $+\infty$