2^{nde} – Chapitre VI - Les vecteurs dans le plan (égalité et somme)

I- Caractéristiques d'un vecteur, vecteurs égaux

Un vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par

- ..sa...direction.....
- ..son...sens.........
- ..sa...longueur... (appelée aussi **norme**)

La ..longueur.... ou ..norme......... d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$

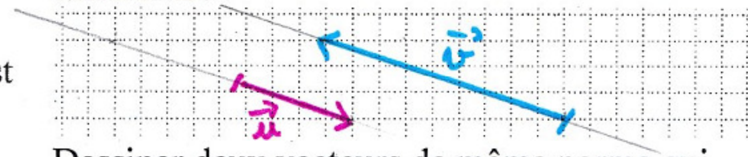
Propriété : la ..norme.... d'un vecteur est un nombre positif ou nul.

Définition : Deux **vecteurs** sont **égaux** quand ils ont

- ..même...direction............
- ..même....sens.................
- ..même...norme...............

Dessiner deux vecteurs de même direction (comprendre « parallèles ») ayant le même sens mais pas la même norme :

Dessiner deux vecteurs de même direction mais de sens contraires et de normes différentes :



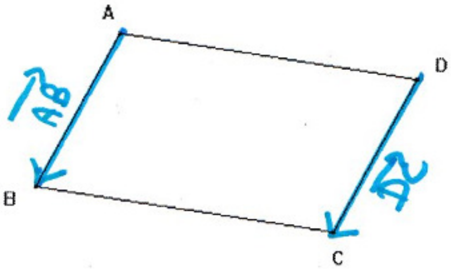
Dessiner deux vecteurs de même norme qui n'ont pas la même direction :

Cas particulier : le **vecteur nul** noté $\vec{0}$, qui n'a ni direction ni sens.

Propriété caractéristique[1] du parallélogramme par égalité de 2 vecteurs :
..ABCD..est..un..parallélogramme..si..et..seulement..si..$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$..........
($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont deux représentants du même vecteur)

Citer toutes les égalités vectorielles qui sont équivalentes à l'affirmation « ABCD est un parallélogramme » :

..$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.........$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
..$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.........$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$
....
....



⚠ Ne pas vous tromper dans le sens : dans $\overrightarrow{AB}$, A est l'origine et B l'extrémité.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ mais $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.

Définition : deux vecteurs qui ont même direction... et même norme... mais de .sens contraires sont deux **vecteurs opposés**. Le vecteur opposé de $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$.

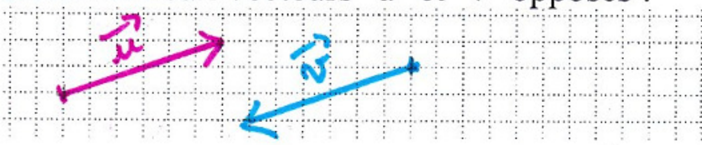
Citer des couples de vecteurs opposés dans le parallélogramme ABCD :
..$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$........ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$........... $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$.... ..$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$....etc ...

---

[1] Caractéristique = qui caractérise. Une propriété caractéristique du parallélogramme est une condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère soit un parallélogramme. ABCD est un parallélogramme ⇔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Remarque : Pour tous points A et B du plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

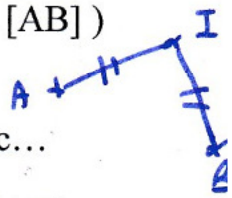
Dessiner deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ opposés :



Propriété caractéristique du milieu d'un segment par égalité de deux vecteurs :
I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

Citer 2 égalités vectorielles signifiant que I est le milieu de [AB]
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA}$

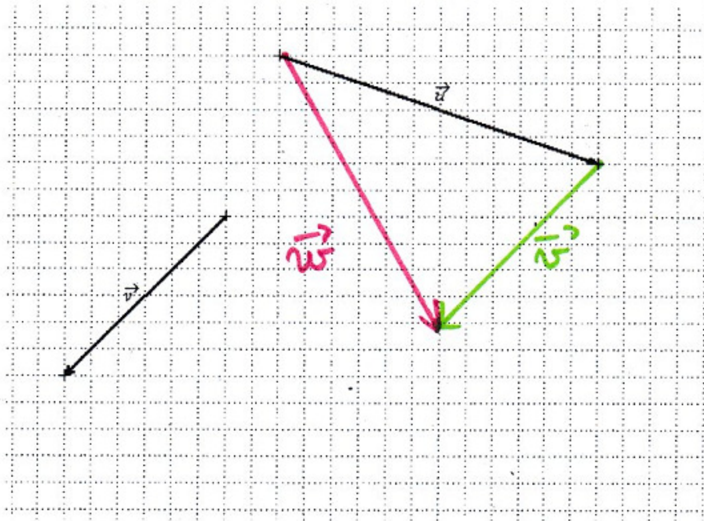
⚠ AI = IB (égalité de deux longueurs) ne suffit pas pour prouver que I est le milieu de [AB] (I est alors sur la médiatrice de [AB], mais pas forcément sur le segment [AB])



Remarque : $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$, $\boxed{2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}}$, $\boxed{\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}$, $\boxed{2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}}$, $\boxed{\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ etc…
Sont d'autres égalités vectorielles équivalentes à l'affirmation « I est le milieu de [AB]»

II- Somme de deux vecteurs.

Dessiner un représentant du vecteur $\vec{w}$, somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



Pour obtenir le vecteur somme, on place bout à bout les deux vecteurs, l'extrémité du premier se confondant avec l'origine du second. Le vecteur somme a l'origine du premier et l'extrémité du second.

D'où la Relation de Chasles :
Pour tous points A, M, B du plan,
$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}}$ **ou** $\boxed{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}}$

Applications courantes :

- Décomposition d'un vecteur en somme de plusieurs vecteurs :

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RK} + \overrightarrow{KN}$ ⚠ l'extrémité de l'un est l'origine du suivant

- Réduction d'une somme de vecteurs :

$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{KU} + \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{UL} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{KU} + \overrightarrow{UL} + \overrightarrow{LP} = \overrightarrow{AP}$

Propriété caractéristique du parallélogramme par la somme de 2 vecteurs :
ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Citer 4 égalités avec sommes de vecteurs équivalentes à l'affirmation « ABCD est un parallélogramme »
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$