2nde- Programme 2010 – Chapitre IX : La fonction inverse

I- Présentation de la fonction inverse.

Dans cette leçon, nous nommerons f la fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$: $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$.

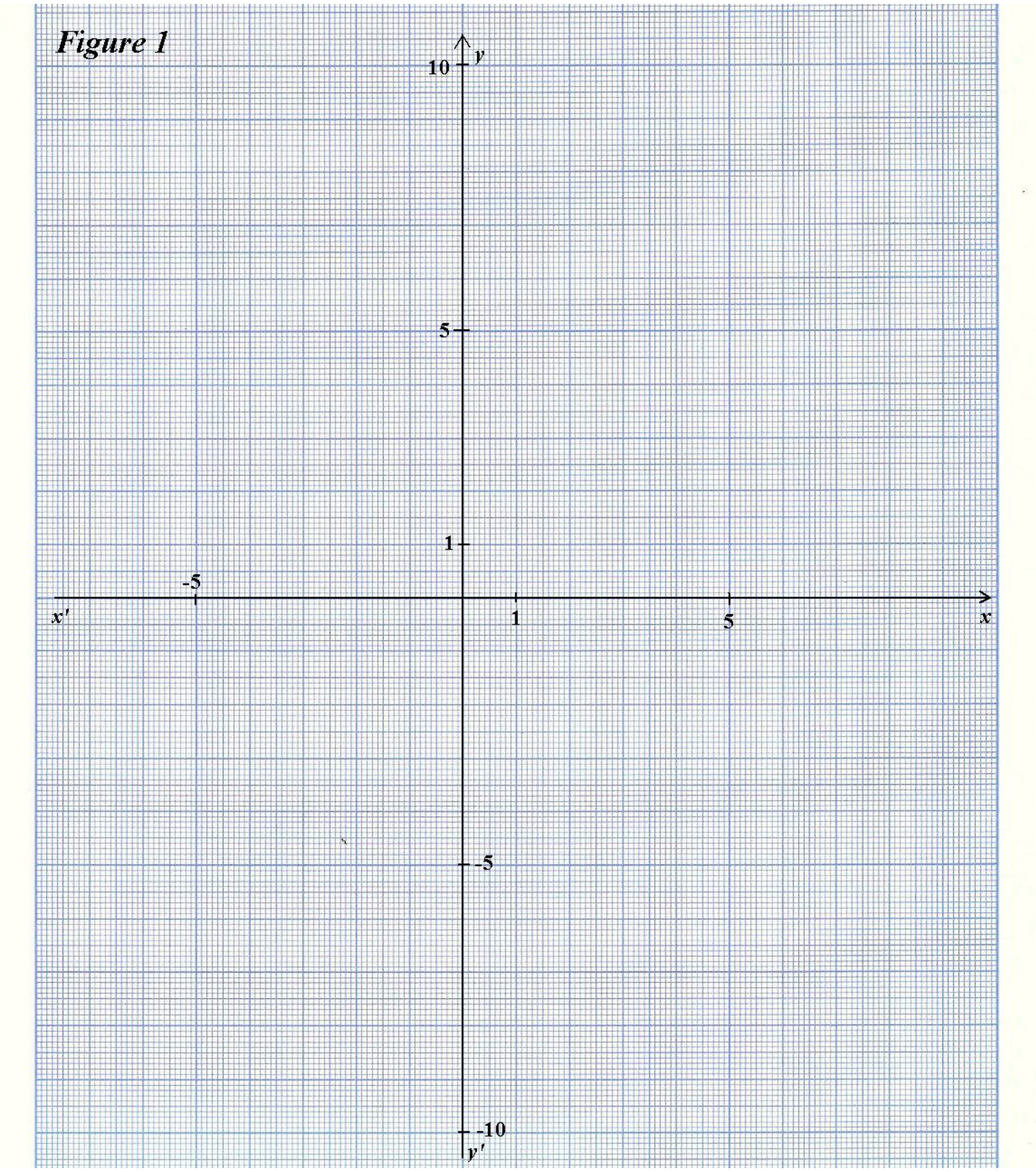
Il s'agit de la fonction qui, à un nombre, associe son **inverse**.

Rappel : l'inverse d'un nombre, c'est le nombre par lequel il faut le multiplier pour obtenir 1. (Ne pas confondre avec l'opposé = le nombre qu'il faut lui ajouter pour obtenir 0)

Remplissez le tableau de valeurs suivant (arrondir au besoin à 10^{-2} près) et tracez la courbe dans le repère :

x	-7	-5	-4	-3	-2	-1	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	$-0,2$	$-0,15$	$-0,1$	0
$f(x)$													

x	0,1	0,15	0,2	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4	5	7
$f(x)$													



On remarque que 0 n'a pas d'image par *f* (la calculatrice indique : « error »).
En effet, quand on essaie de calculer l'inverse de 0, on fait : « 1 divisé par 0 ». Or la division par zéro n'existe pas ! 0 est ici **valeur interdite**.

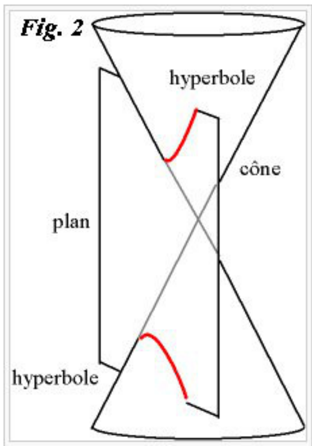
La fonction inverse n'est donc pas définie en 0. Tout autre nombre réel que 0 admet un inverse, donc :

la fonction inverse est définie sur l'ensemble des réels privé de 0, noté $\mathbb{R}$-{0}, ou $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ou encore $\mathbb{R}^*$.

La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole**, composée de deux « branches » et **ayant pour centre de symétrie l'origine du repère**.

Pour les curieux : comme la parabole et l'ellipse, l'hyperbole est une courbe de la famille des coniques. Les coniques sont des courbes obtenues par l'intersection d'un cône avec un plan.

Fig. 2



Les fonctions dont les courbes représentatives sont symétriques par rapport à l'origine du repère sont appelées **fonctions impaires**.

Lorsqu'une fonction est impaire, les images de deux nombres opposés sont opposées : ici, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) = -f(x)$.

(Vous avez pu le vérifier sur quelques valeurs lors du remplissage du tableau de valeurs : $f(-5)=-0{,}2$ et $f(5)=0{,}2$, donc $f(-5)=-f(5)$ par exemple.)

Figure 3

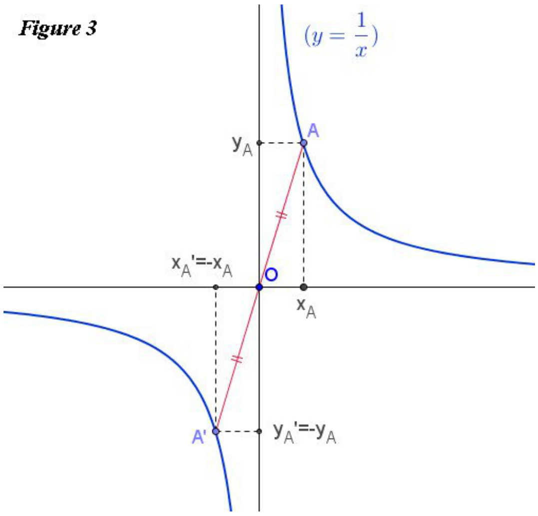


Illustration graphique pour la notion de fonction impaire :

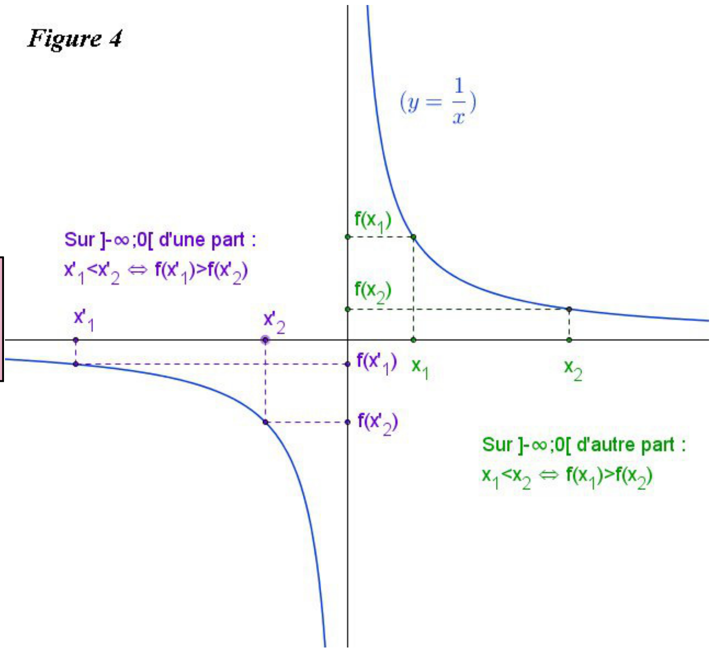
A et A' sont deux points de l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ d'abscisses opposés.
Ils sont symétriques par la symétrie centrale de centre O, l'origine du repère.
Leurs ordonnées sont donc, elles aussi, opposées.

Variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

Pour noter la valeur interdite

Figure 4



La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles]–∞;0[et]0;+∞[. (preuve en exercice)

⚠ La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$!

La preuve : $-2<1$, $f(-2)=-\dfrac{1}{2}$ et $f(1)=1$, donc $f(-2)<f(1)$: f n'inverse pas l'ordre sur $\mathbb{R}^*$, seulement sur]–∞;0[d'une part et sur]0;+∞[d'autre part.

Se rappeler : on le parle de croissance ou de décroissance d'une fonction que sur des intervalles, histoire de n'être pas dérangés par d'éventuels « trous » ou « ruptures de courbes » comme ici où l'hyperbole est en deux morceaux.