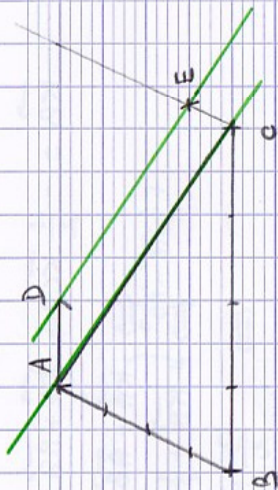


Exercices sur la colinéarité des vecteurs - Obtenir un généralisé: ①
Donner un alignement sans repère.

Exercice 1.



(H₁) A, B, C sont trois points non-alignés

(H₂) $\vec{AB} = \frac{1}{4} \vec{BC}$

(H₃) $\vec{CE} = -\frac{1}{4} \vec{AB}$

$\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AC} + \vec{CE}$ d'après la relation de Chasles.

$= -\vec{AD} + \vec{AC} - \frac{1}{4} \vec{AB}$ d'après (H₂)

$= -\frac{1}{4} \vec{BC} + \vec{AC} - \frac{1}{4} \vec{AB}$ d'après (H₁)

$= -\frac{1}{4} (\vec{BC} + \vec{AB}) + \vec{AC}$

$= -\frac{1}{4} (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{AC}$

$= -\frac{1}{4} \vec{AC} + \vec{AC}$ d'après la relation de Chasles.

$\vec{DE} = \frac{3}{4} \vec{AC}$

car $-\frac{1}{4} + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4}$

$\vec{DE}$ et $\vec{AC}$ sont donc colinéaires.

Les droites (AC) et (DE) sont donc parallèles.

Exercice 2: 1) $\vec{JC} = 2\vec{JA}$ d'après la relation de Chasles.
 $\vec{AC} = \vec{JA} + \vec{AC} = 2\vec{JA}$ solution de Chasles.
 $\vec{AC} = \vec{JA}$ d'après Chasles.
 $-\vec{AC} = -\vec{JA}$
 $\vec{AC} = \vec{JA}$

$\vec{AJ} = -\vec{AC}$ (A₁)

$\vec{KB} = -\frac{1}{2} \vec{KC} \Rightarrow \vec{KA} + \vec{AB} = -\frac{1}{2} (\vec{KA} + \vec{AC})$ d'après la relation de Chasles.

$\vec{KA} + \vec{AB} = -\frac{1}{2} \vec{KA} - \frac{1}{2} \vec{AC}$

$\vec{KA} + \frac{1}{2} \vec{KA} = -\vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}$

$\frac{3}{2} \vec{KA} = -\vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}$

(car $1 + \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{1 \times 2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$)

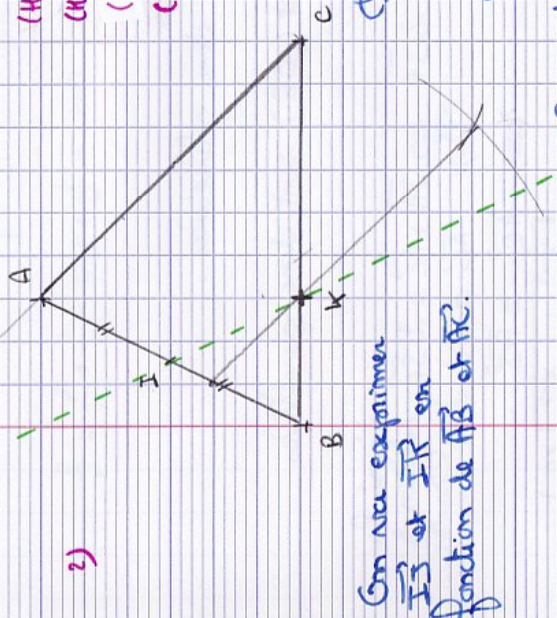
$\frac{3}{2} \vec{AK} = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$

en multipliant les 2 membres par $\frac{2}{3}$.

$\vec{AK} = \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC}$ (R₁)

En multipliant les 2 membres par $\frac{2}{3}$ car:

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$ et $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$



(H₁) ABC est un triangle.

(H₂) I est le milieu de [AB].

(R₁) $\vec{AJ} = -\vec{AC}$

(R₂) $\vec{AK} = \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC}$

$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$

d'après la relation de Chasles.

Donc $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{BA} - \vec{AC}$

car I est le milieu de [AB]

d'après (R₁)

(H₂)

On a donc: $\vec{IJ} = -\frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{AC}$ (R₃)

7 exercices sur la colinéarité des vecteurs - Étudier un parallélogramme (2)
ou un alignement, sans repère.

Suite de l'exercice 2:

$$\vec{IK} = \vec{IA} + \vec{AK} \quad \text{d'après la relation de Chasles.}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC}$$

car I est le milieu de [AB] d'après (R₂)

$$\vec{IK} = -\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC}$$

$$a \quad -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-1 \times 3 + 2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{-3 + 4}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Donc } \vec{IK} = \frac{1}{6} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} \quad (R_4)$$

$$\text{On a : } \vec{IJ} = -\frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{AC} \quad (R_3)$$

donc $\vec{IJ} \left(-\frac{1}{2}; -1 \right)$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$

$$\text{et } \vec{IK} = \frac{1}{6} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} \quad (R_4)$$

donc $\vec{IK} \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right)$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$

$$\det(\vec{IJ}, \vec{IK}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - (-1) \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

Donc $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ sont colinéaires.

Donc les points I, J, K sont alignés. C.Q.F.D.

et la place du calcul du déterminant, on pourrait remarquer que $\vec{IJ} = -3 \vec{IK}$ car que $\vec{IK} = -\frac{1}{3} \vec{IJ}$.

$$\text{En effet : } -3 \vec{IK} = -3 \left(\frac{1}{6} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} \right) = -\frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{IJ}$$

d'après (R₃)

$$a : -\frac{1}{3} \vec{IJ} = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{AC} \right) \quad \text{d'après (R}_3\text{)}$$

$$= \frac{1}{6} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC}$$

$$= \vec{IK} \quad \text{d'après (R}_4\text{).}$$

On pourrait remarquer que K appartient au segment [BC] de la manière suivante:

$$\vec{KB} = -\frac{1}{2} \vec{KC} \iff -2 \vec{KB} = \vec{KC} \quad \text{on multiplie par } -2$$

$$\iff 2 \vec{BK} = \vec{KB} + \vec{BC} \quad \text{d'après la relation de Chasles.}$$

$$\iff 2 \vec{BK} = -\vec{BK} + \vec{BC} \quad + \vec{BK}$$

$$\iff 3 \vec{BK} = \vec{BC}$$

$$\iff \vec{BK} = \frac{1}{3} \vec{BC}$$

$\vec{BK}$ et $\vec{BC}$ sont donc colinéaires. Les points B, K, C sont donc alignés.

$$\text{Comme } 0 \leq \frac{1}{3} \leq 1 \text{ et } \vec{BK} = \frac{1}{3} \vec{BC},$$

le point K se situe sur le segment [BC], à $\frac{1}{3}$ du segment en partant de B.

Exercice 3. 1)

$$\vec{JC} = \frac{1}{3} \vec{JA} \iff \vec{JA} + \vec{AC} = \frac{1}{3} \vec{JA} \quad \text{d'après la relation de Chasles.}$$

$$\iff \vec{JA} = \frac{1}{3} \vec{JA} - \vec{AC} \quad + \vec{AC}$$

$$\iff \frac{2}{3} \vec{JA} = -\vec{AC} \quad \text{car } 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\iff \frac{2}{3} \vec{JA} = \vec{AC} \quad \times (-1)$$

$$\iff \vec{JA} = \frac{3}{2} \vec{AC} \quad \times \frac{3}{2}$$

$$\iff \vec{AS} = \frac{3}{2} \vec{AC} \quad (R_1) \quad \times \frac{2}{3}$$

7 exercices sur la colinéarité des vecteurs. Obtenir un parallélisme ou un alignement, sans repère. (3)

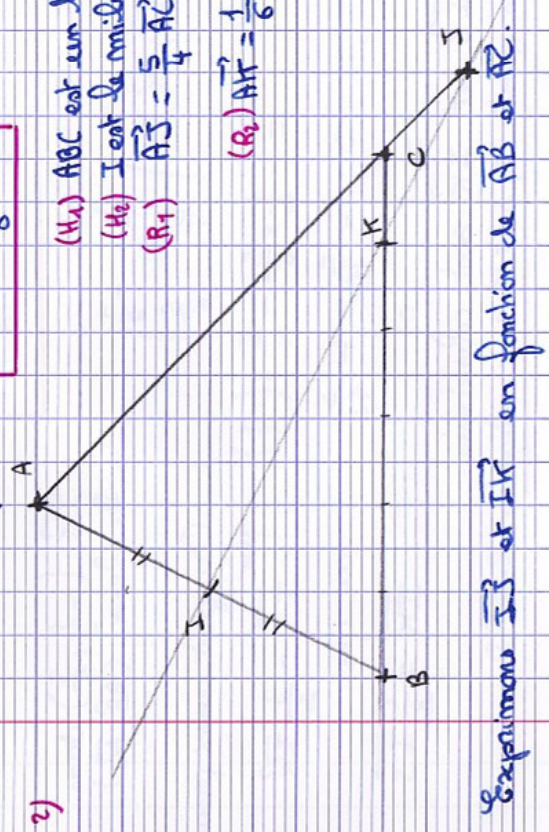
Suite de l'exercice 3.

$$\begin{aligned}
 \vec{KB} &= -5\vec{KC} \Rightarrow \vec{KA} + \vec{AB} = -5(\vec{KA} + \vec{AC}) \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
 \Rightarrow \vec{KA} + \vec{AB} &= -5\vec{KA} - 5\vec{AC} \\
 \Rightarrow 6\vec{KA} &= -\vec{AB} - 5\vec{AC} \\
 \Rightarrow -6\vec{AK} &= -\vec{AB} - 5\vec{AC} \quad \text{car } \vec{KA} = -\vec{AK} \\
 \Rightarrow \vec{AK} &= \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC} \quad \text{car } \vec{AK} = -\vec{AK} \quad (R_2)
 \end{aligned}$$

On m'aider à placer K sur [BC]:

$$\begin{aligned}
 \vec{KB} &= -5\vec{KC} \Rightarrow \vec{KB} = -5(\vec{KB} + \vec{BC}) \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
 \Rightarrow \vec{KB} &= -5\vec{KB} - 5\vec{BC} \\
 \Rightarrow 6\vec{KB} &= -5\vec{BC} \\
 \Rightarrow 6\vec{BK} &= -5\vec{BC} \quad \times (-1) \\
 \Rightarrow \vec{BK} &= \frac{5}{6}\vec{BC} \quad :6
 \end{aligned}$$

- (H1) ABC est un triangle.
- (H2) I est le milieu de [AB]
- (R1) $\vec{AJ} = \frac{5}{4}\vec{AC}$
- (R2) $\vec{AK} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC}$



Exprimer $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

$$\begin{aligned}
 \vec{IJ} &= \vec{IA} + \vec{AJ} \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
 &= \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{5}{4}\vec{AC} \quad \text{car I est le milieu de [AB] (H1)}
 \end{aligned}$$

donc: $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{5}{4}\vec{AC} \quad (R_3)$

$\vec{IJ}(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$

$$\begin{aligned}
 \vec{IK} &= \vec{IA} + \vec{AK} \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
 &= \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC} \quad \text{d'après (R2)}
 \end{aligned}$$

car I est le milieu de [AB]

$$\begin{aligned}
 \vec{IK} &= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC} \\
 \vec{IK} &= -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC}
 \end{aligned}$$

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$$\det(\vec{IJ}, \vec{IK}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{6} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} - \frac{5}{4} \times (-\frac{1}{3}) \\
 &= -\frac{5}{12} + \frac{5}{12} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

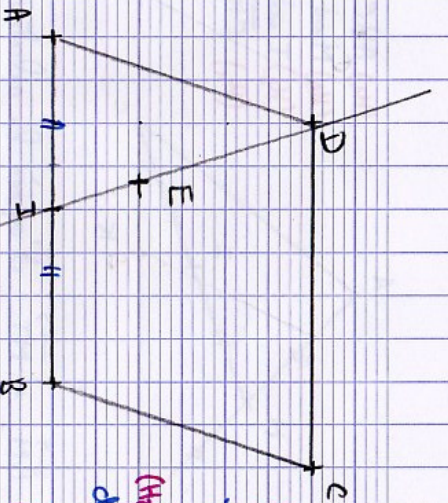
Donc $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ sont colinéaires.
Donc les points I, J et K sont alignés. C.Q.F.D

$\vec{IK}(-\frac{1}{3}; \frac{5}{6})$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$

On peut aussi prouver que: $\vec{IJ} = \frac{3}{2}\vec{IK}$ ou que $\frac{\vec{IJ}}{\vec{IK}} = \frac{3}{2}$

7 exercices sur la colinéarité des vecteurs - échantillon en parallélisme, 4 ou un alignement, sans rapport.

Exercice 4.



(M) ABCD est un parallélogramme.

(M) I est le milieu de [AB].

(H3) $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DI}$

1) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ d'après la relation de Chasles.

$= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DI}$ d'après (H3).

$= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})$ d'après la relation de Chasles.

$= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AI}$

$= \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ car I est le milieu de [AB] d'après (M).

$= \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$

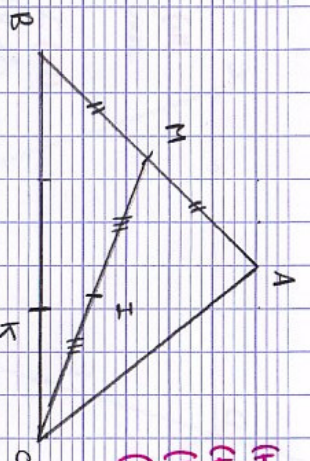
donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$ C.Q.F.D. (R1)

2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ car ABCD est un parallélogramme. (M)

Donc $\overrightarrow{AC} = 3 \overrightarrow{AE}$ car $3 \overrightarrow{AE} = 3 \times (\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont donc colinéaires. Les points A, C, E sont donc alignés.

Exercice 5.



(M) ABC est un triangle.

(M) M est le milieu de [AB].

(H3) I est le milieu de [BC].

(M) $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}$

1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI}$ d'après la relation de Chasles.

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MC}$ car M est le milieu de [AB] (M) et I celui de [BC] (H3).

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC})$ d'après la relation de Chasles.

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ car M est le milieu de [AB] (M).

$= \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$ d'après la relation de Chasles.

$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}$ d'après (M).

$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$ d'après la relation de Chasles.

$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ ($1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$)

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ (R2)

7 exercices sur la colinéarité des vecteurs. Choisir un parallélogramme ou un alignement, sans repère.

Suite de l'exercice 6. 3) $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF}$ d'après la relation de Chasles.

donc $\vec{EF} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$ d'après (H_3)

$= -\frac{1}{4}\vec{AB} + \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$ d'après (H_2) car $\vec{BC} = \vec{AD}$ puisque ABCD est un parallélogramme (H_1)

On a donc : $\vec{EF} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$ (R_2)

$\vec{HG} = \vec{HD} + \vec{DA} + \vec{AG} + \vec{BG}$ d'après la relation de Chasles.

$= -\vec{DH} - \vec{AD} + \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC}$ d'après (R_1)

$= -\frac{1}{12}\vec{DH} - \vec{AD} + \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$

d'après (H_3) car $\vec{BC} = \vec{AD}$ puisque ABCD est un parallélogramme (H_1)

$= +\frac{1}{12}\vec{AD} - \frac{1}{12}\vec{AD} + \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$

$= \vec{AB} + (\frac{7}{12} - \frac{1}{12} + \frac{9}{12})\vec{AD}$

$\vec{HG} = \vec{AB} + \frac{4}{12}\vec{AD}$ or $\frac{4}{12} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{1}{3}$

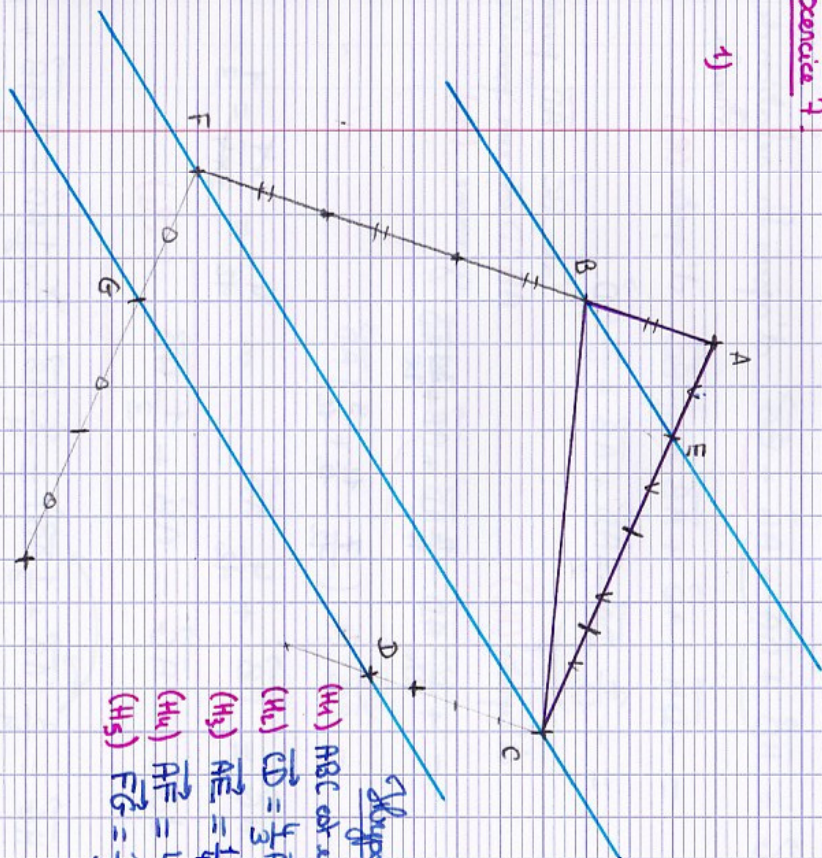
donc $\vec{HG} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$ (R_3)

$\frac{3}{4}\vec{HG} = \frac{3}{4}(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}) = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}\vec{AD} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$
d'après (R_2) $\vec{EF}$

On a donc $\vec{EF} = \frac{3}{4}\vec{HG}$.
→ Les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{HG}$ sont donc colinéaires.
→ Les droites (EF) et (HG) sont donc parallèles, à condition que $\vec{EF} \neq \vec{0}$ et $\vec{HG} \neq \vec{0}$, mais c'est la cas, puisque E et F d'une part, et H et G d'autre part, sont portés sur des côtés distincts du parallélogramme ABCD, qu'on suppose non réduit à un point.

Exercice 7.

1)



Hypothèse:

(H_1) ABC est un triangle.

(H_2) $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

(H_3) $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

(H_4) $\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

(H_5) $\vec{FG} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

7 exercices sur la colinéarité des vecteurs - Contrôler son parallélogramme (7)

ce sont alignement, sans repère.

Suite de l'exercice 7. 2) Expressions $\vec{BE}$ et $\vec{CF}$ en fonction de $\vec{AB}$ et de $\vec{AC}$, qui sont non-colinéaires car ABC est un triangle (H_1).

$$\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE}$$

$$\boxed{\vec{BE} = -\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}} \quad (R_1) \text{ d'après } (H_2)$$

$$\vec{CF} = \vec{CA} + \vec{AF}$$

$$= -\vec{AC} + 4\vec{AB} \text{ d'après } (H_4)$$

Soit $\boxed{\vec{CF} = 4\vec{AB} - \vec{AC}} \quad (R_2)$

$$4\vec{BE} = 4\left(-\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}\right) \text{ d'après } (R_1)$$

$$= -4\vec{AB} + \vec{AC}$$

$$= \vec{CF} \text{ d'après } (R_2)$$

car $4 \times \frac{1}{4} = 1$

$\vec{CF} = 4\vec{BE}$ donc $\vec{CF}$ et $\vec{BE}$ sont colinéaires.

On ne nous demande pas de justifier. (Ils sont aussi non nuls (E étant sur (AB) mais pas B et F étant sur (AC) distinct de A et C car (AC) distinct de A))

Donc les droites (BE) et (CF) sont parallèles. C.Q.F.D

3) Expressions aussi $\vec{DG}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

$$\vec{DG} = \vec{DC} + \vec{CF} + \vec{FG}$$

$$= -\vec{CD} - \vec{AC} + 4\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

d'après (H_4)

d'après (H_5)

$$\vec{DG} = -\frac{4}{3}\vec{AB} - \vec{AC} + 4\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

d'après (H_1)

$$\vec{DG} = \left(-\frac{4}{3} + 4\right)\vec{AB} + (-1 + \frac{1}{3})\vec{AC}$$

$$= -\frac{4}{3} + 4 = -\frac{4}{3} + \frac{4 \times 3}{1 \times 3} = -\frac{4}{3} + \frac{12}{3} = \frac{8}{3}$$

$$-1 + \frac{1}{3} = -\frac{1 \times 3}{1 \times 3} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

Donc $\boxed{\vec{DG} = \frac{8}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}} \quad (R_3)$

(A1) $\vec{BE} = -\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$ donc $\vec{BE} \left(-1; \frac{1}{4}\right)$ dans la base $(\vec{AB}; \vec{AC})$.

(A3) $\boxed{\vec{DG} = \frac{8}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}}$ donc $\vec{DG} \left(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ dans la base $(\vec{AB}; \vec{AC})$

$$\det(\vec{BE}; \vec{DG}) = \begin{vmatrix} -1 & \frac{8}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -1 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{4} \times \frac{8}{3}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1 \times 2 \times 4}{4 \times 3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

$\vec{BE}$ et $\vec{DG}$ sont donc colinéaires (et ils sont aussi non nuls)

→ Les droites (BE) et (DG) sont donc parallèles. C.Q.F.D.

(Ce qui il fallait démontrer.)