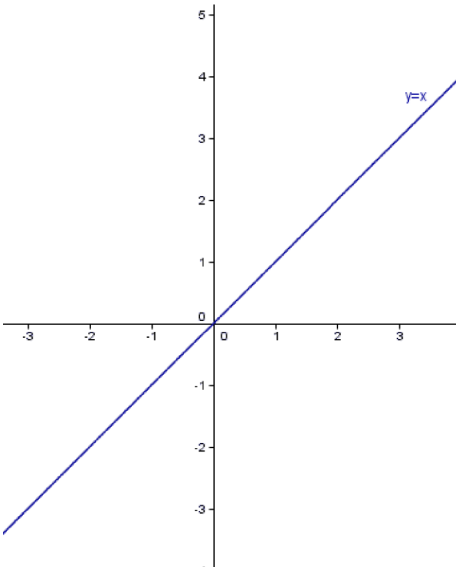
I- Pseudo-définition.

Idée intuitive : On appelle « limite de $f(x)$ quand x tend vers a », et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, le « nombre » b (s'il existe) duquel s'approche $f(x)$ quand x s'approche de a.

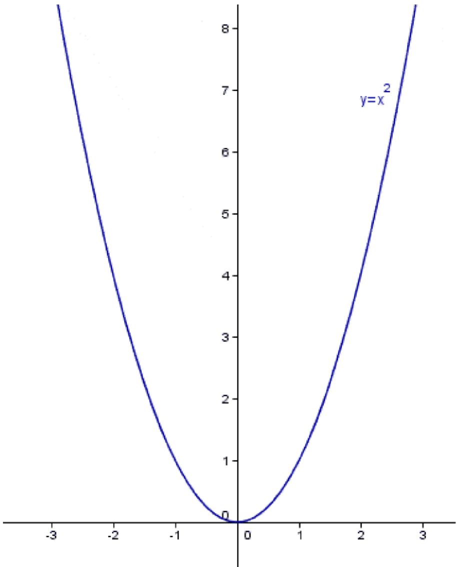
a et b peuvent être des réels, mais aussi $-\infty$ ou $+\infty$.

Remarque : lorsqu'une fonction f est définie et continue (pas de rupture de la courbe) en une valeur a, sa limite en a est $f(a)$. Exemples : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ car $0^2 = 0$. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$.

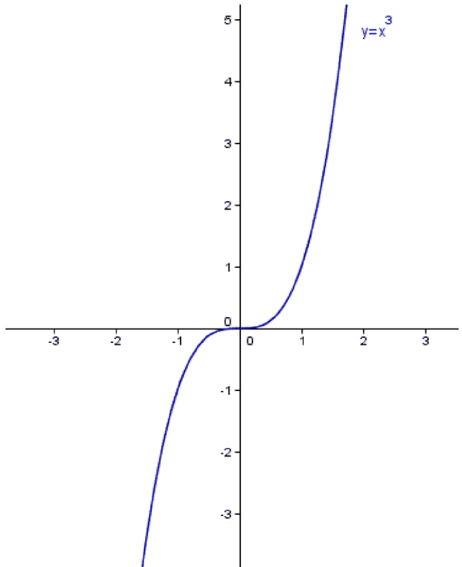
II- Limites des fonctions de référence (à connaître par ♥, facile quand on connaît les courbes !)



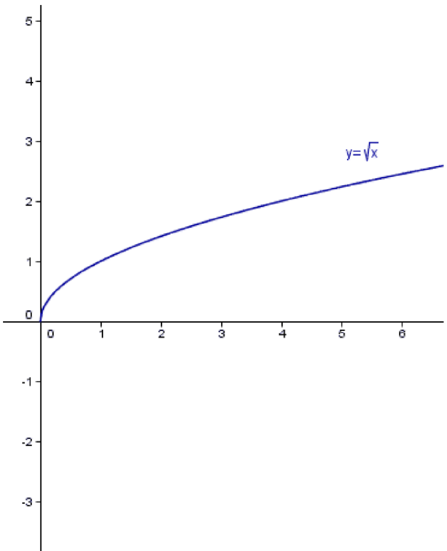
$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$



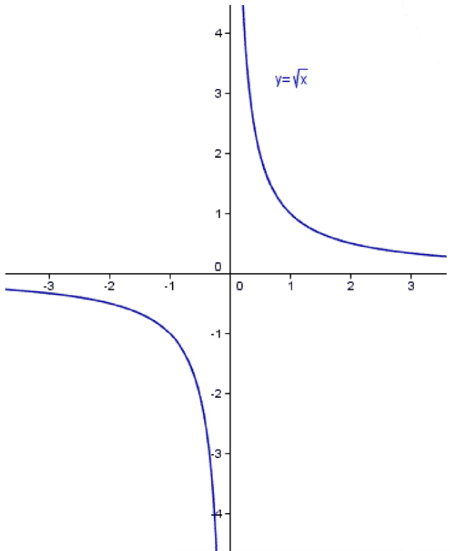
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$



$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Remarque : lorsqu'une fonction est constante, la valeur de la constante est égale à celle de ses limites.

Par exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} -4 = -4$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

à savoir aussi :

- La limite en l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
- La limite en zéro d'un polynôme est celle de son terme de plus bas degré.

Exemples : • $\lim_{x\to-\infty} x^3-2x^2-x+5 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$. • $\lim_{x\to0} x^3-2x^2-x+5 = \lim_{x\to0} 5 = 5$

II- Opérations sur les limites.

Dans ce paragraphe, ce qu'il faut retenir principalement, ce sont les cas d'indétermination, ceux dans lesquels on ne peut pas calculer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient. Les cas où « ça marche » sont assez intuitifs à deviner.

1) Limite du produit d'une fonction par un réel.

Soit k un réel strictement positif ($k>0$)			
Si $\lim_{x\to a} f(x) =$	$L \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{x\to a} k\,f(x) =$	$k\times L$	$+\infty$	$-\infty$

Soit k un réel strictement négatif ($k<0$)			
Si $\lim_{x\to a} f(x) =$	$L \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{x\to a} k\,f(x) =$	$k\times L$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples :

- Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et comme $\frac{3}{x} = 3\times\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 3\times0 = 0$.
- Comme $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et comme $-5<0$, $\lim_{x\to-\infty} -5x^2 = -\infty$.

2) Limite de la somme de deux fonctions.

L et L' sont deux réels

Si $\lim_{x\to a} f(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et si $\lim_{x\to a} g(x) =$	L'	L'	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) =$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

Exemples : • Si $f(x)=x^2$ et $g(x)=-4$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty} -4=-4\end{array}\right\} \text{Donc } \lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2-4=+\infty .$$

- Si $f(x)=4x-2$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} 4x-2=4\times0-2=-2 \\ \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x}=-\infty\end{array}\right\} \text{Donc } \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)+g(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} 4x-2+\frac{1}{x}=-\infty$$

Exemples pour l'indétermination : • Si $f(x)=4-x$ et $g(x)=x$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} 4-x=-\infty \\ \lim_{x\to+\infty} x=+\infty\end{array}\right\} \text{On ne peut pas déterminer ici la limite de } f(x)+g(x) \text{ en } +\infty.$$

Dans ce cas précis, on peut contourner l'indétermination en calculant pour tout $x \in \mathbb{R}$,:
$f(x)+g(x)=4-x+x=4$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4$.

Ici, on a trouvé 4, mais on pourrait trouver n'importe quelle autre valeur réelle ou infinie. Il y a même des cas où la limite n'existe pas ! Quand on est dans un cas d'indétermination, on transforme l'expression pour essayer de se retrouver dans un cas où la limite est déterminée.

3) Limite du produit de deux fonctions. L et L' sont deux réels.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	L	L $\neq$ 0	∞	0
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) =$	L $\times$ L'	∞	∞	?

Remarque : on n'a pas précisé les signes devant ∞ dans ce tableau : il suffit d'appliquer la règle des signes.

Par exemple : si $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x-3$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x-3 = 0-3 = \boxed{-3}$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)\times g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x}\times(x-3) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x-3}{x} = -\infty$

Car (+) $\times$ (–) = (–)

4) Limite du quotient de deux fonctions. L et L' sont deux réels

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	L	L $\neq$ 0	L	0	0	∞	∞	0	∞
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	L' $\neq$ 0	0	∞	∞	L' $\neq$ 0	L' $\neq$ 0	0	0	∞
Alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L'}{L}$	∞	0	0	0	∞	∞	?	?

Remarque : ici encore, on applique la règle des signes.

Exemple : on veut déterminer la limite à droite[1] en 0 de $\frac{x^3-3}{\sqrt{x}}$. On pose $f(x)=x^3-3$, $g(x)=\sqrt{x}$.

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^3-3 = 0^3-3 = \boxed{-3}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x} = 0^+$ (zéro par valeurs positives, puisque x>0 donc $\sqrt{x}>0$)

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x^3-3}{\sqrt{x}} = -\infty$

Car le – de -3 par le + de 0^+ donne –.

1 « à droite » signifie « par valeurs supérieures ». La limite à droite en 0 est celle qu'on calcule quand x → 0, $x>0$.
« à gauche », ce serait « par valeurs inférieures », c'est-à-dire quand $x<0$.

Exemple où l'on lève l'indétermination en l'infini :

On veut calculer la limite en $+\infty$ de $h(x)=\dfrac{1-x^2}{2x-1}$. $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x)=1-x^2$ et $g(x)=2x-1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = \boxed{-\infty} \\ \text{(car } \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty \text{)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = \boxed{+\infty} \end{array}\right\} \text{On est en présence d'une indétermination.}$$

La parade, dans le cas d'une limite en l'infini d'un quotient de deux polynômes, est de factoriser le numérateur et le dénominateur par leurs termes de plus haut degré.

Lorsque $x\to+\infty$, $x\neq 0$. On peut donc écrire : $h(x)=\dfrac{x^2+1}{2x+3} = \dfrac{x^2(1+\frac{1}{x})}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)} = \dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2-\frac{3}{x}}$ en simplifiant par x.

Au numérateur :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \text{Donc } \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

Au dénominateur :

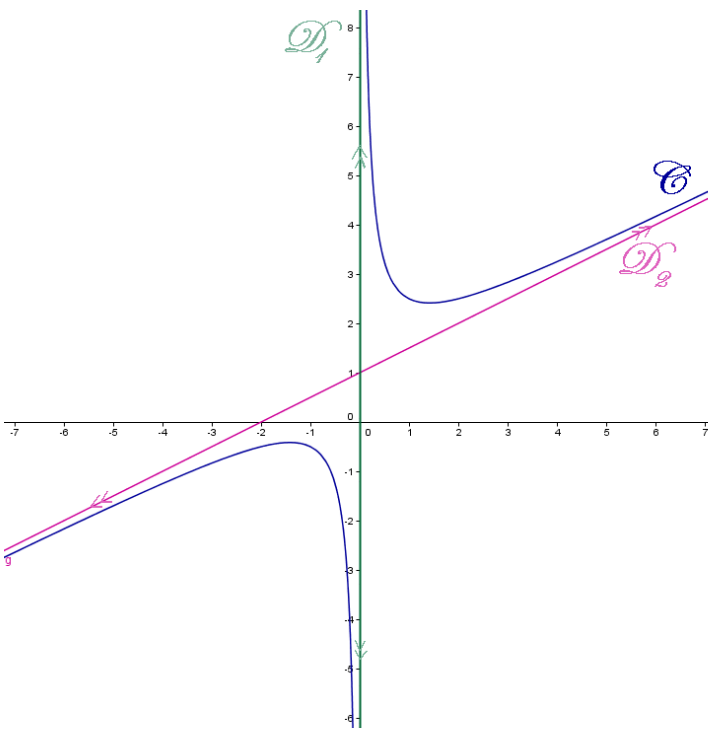
$$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x}=0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{x}=0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{3}{x}=2$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

III- Asymptotes à la courbe représentative d'une fonction.

Idée intuitive : on dit qu'une droite $\mathscr{D}$ (ou une autre courbe) est **asymptote à la courbe $\mathscr{C}$** représentative d'une fonction lorsque la droite et la courbe deviennent infiniment proches (généralement sans se toucher) si on les prolonge indéfiniment.

Exemple sur le graphique ci-contre : les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.



Théorème (asymptote horizontale) :
Lorsqu'une fonction *f* a une limite finie L quand $x\to+\infty$ ou $-\infty$, la courbe représentative de *f* admet pour asymptote la droite d'équation $y=L$.

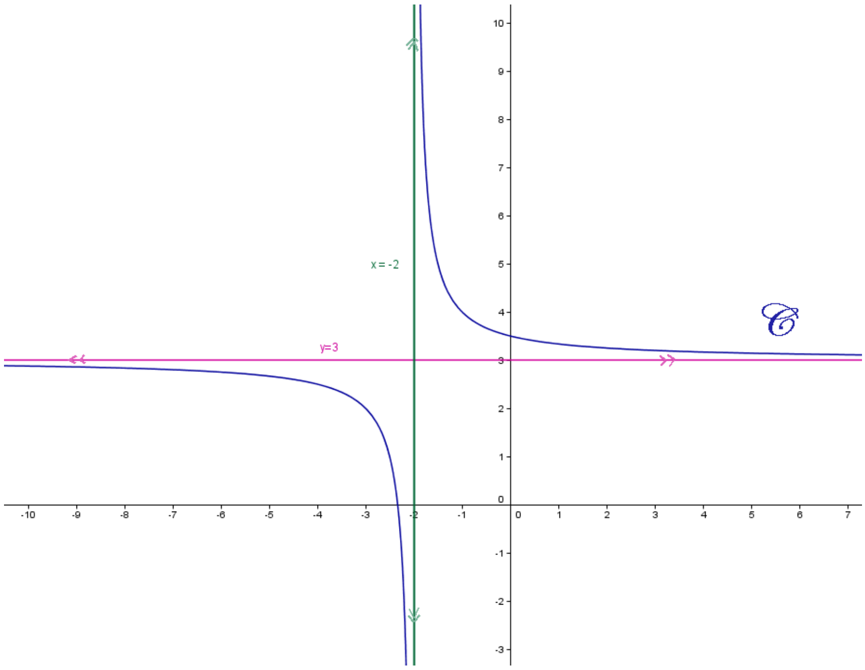
Par exemple, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, la droite d'équation $y=3$ sera asymptote horizontale à la courbe représentative de *f*.

(voir illustration page suivante)

<u>Théorème</u> (asymptote verticale) :
Lorsqu'une fonction f admet une limite infinie en une valeur finie a, la droite d'équation $x=a$ est asymptote à la courbe représentative de *f*.

<u>Exemple</u> : Si $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = -\infty$, alors la courbe représentative de *f* admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x=-2$.

Sur le graphique ci-contre, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction *f* définie sur ℝ-{-2} par $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+3$.



On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x+2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3}$

Et de même $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3}$

Donc la droite d'équation $\boxed{y=3}$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de *f* en +∞ et en –∞.

Et on a aussi : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} x+2 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = -\infty}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} x+2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = +\infty}$.

Donc la droite d'équation $\boxed{x=-2}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de *f* lorsque *x* tend vers -2.