T$^{\text{le}}$ Spé – Exercices sur les calculs de dérivées avec fonctions composées.

Exercice 1 : *f* et *g* sont les fonctions définies sur ℝ par $f(x)=\mathrm{e}^x$ et $g(x)=2x$.

Calculer : $g'(1)$ $(f' o g)(1)$ $(f o g)'(1)$.

Exercice 2 : *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=(x^2+1)^4$.

Pourquoi a-t-on $f'(x)=8x(x+1)^3$?

Exercice 3 : *u* et *v* sont deux fonctions définies sur ℝ par $u(x)=-3x+4$ et $v(x)=x^3$.

1) Exprimer, pour tout réel *x*, $(v o u)(x)$ en fonction de *x*.

2) Déterminer de 2 façons différentes $(v o u)'(x)$

Exercice 4 : *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}}$.

1) Pourquoi *f* est-elle bien définie sur ℝ ?

2) Décomposer la fonction *f* sous la forme $v o u$ en précisant les fonctions *u* et *v*.

3) Pourquoi *f* est-elle dérivable sur ℝ ?

4) Déterminer les fonctions dérivées de *u*, de *v*, puis de *f*.

Exercice 5 : *f* est une fonction dérivable sur l'intervalle [1 ; 10 [. Dans chaque cas, déterminer $f'(1)$:

1) $f(x)=\sqrt{5x+1}$ 2) $f(x)=(2-x)^5$ 3) $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}$

4) $f(x)=(1+\mathrm{e}^{-x+1})^2$

Exercice 6 : Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction *f* définie sur l'intervalle I.

1) $f(x)=(x^2+5x)^4$ I = ℝ 2) $f(x)=(x-5)(1-8x)^2$ I = ℝ

3) $f(x)=\dfrac{1}{(4-x)^2}$ I = $]4;+\infty[$ 4) $f(x)=\dfrac{x+1}{(1+x^2)^3}$ I = ℝ

5) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ I = $]-1;1[$ $\qquad$ 6) $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2+1}$ $\quad$ I = $\mathbb{R}$

7) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-8\,\mathrm{e}^{x+3}$ $\quad$ I = $\mathbb{R}$ $\qquad$ 8) $f(x)=(x^2+5)\mathrm{e}^{x^2-1}$ $\quad$ I = $\mathbb{R}$

Exercice 7 : g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=(1-2x)^3$

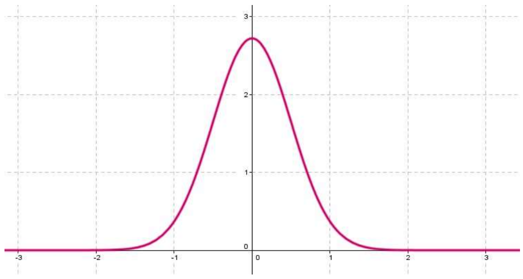
1) Étudier la limite de g en $+\infty$

2) Démontrer que la fonction g est décroissante sur $[0;+\infty[$

3) En déduire le tableau de variations de g.

Exercice 8 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x^2+1}$

Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.



1) Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Démontrer ces conjectures

3) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 9 : g est la fonction définie par $g(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et a désigne un nombre réel.

1) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

2) Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point $A(1;0)$? Si oui, précisez l'équation de cette tangente.

Exercice 10 :

f est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{2x}}$.

1) Vérifier que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{3x^2-4}{2x\sqrt{2x}}$.

2) Montrer que f admet un minimum local. Préciser en quelle valeur de x il est atteint, en en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.