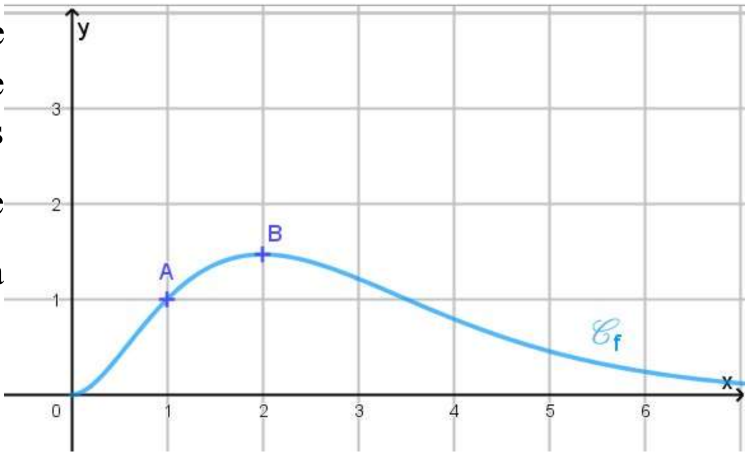
Problème 1 : La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On admet que $\mathscr{C}_f$ passe par les points O (0;0) , A (1 ; 1) et B (2 ; $\frac{4}{e}$), et que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.



1) Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $f'(2)$

2) On admet que $f(x)=x^2 e^{-x+1}$.

a) Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

3) a) Calculer $f''(x)$. En déduire l'étude de la convexité de f.

b) Déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

4) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=e^{-f(x)}$. Dresser le tableau de variations de g.

5) On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{f(x)}$. Dresser le tableau de variations de h.

D'après Baccalauréat ES Métropole-La Réunion, septembre 2006

Problème 2 : On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+8x-3$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1) Calculer $f'(x)$

2) Étudier le signe de $f'(x)$

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.

b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de la solution α.

5) Calculer $f''(x)$.

6) a) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction *f* est convexe ou concave.

b) La courbe représentative de la fonction *f* admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, calculer leurs coordonnées.

Problème 3 : On considère la fonction *f* définie et dérivable sur ℝ par $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-3}{x^2+3}$.

Partie A

1) Montrer que, pour tout réel *x*, $f'(x)=\dfrac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2}$, où f' est la fonction dérivée de *f* sur ℝ.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variations de *f*.

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;2]$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de la solution α.

Partie B

On admet que la dérivée seconde de la fonction *f* est la fonction définie sur ℝ par :

$$f''(x)=\frac{-6x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}$$

1) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction *f* est convexe ou concave.

2) La courbe représentative de la fonction *f* admet-elle des points d'inflexion ?

Problème 4 : Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x\,e^{x^2-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que, pour tout réel *x*, $f'(x)=(2x^2+1)e^{x^2-1}$.

b) En déduire le sens de variations de *f* sur ℝ.

2) a) Montrer que, pour tout réel x, $f''(x)=2x(2x^2+3)e^{x^2-1}$.

b) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction *f* est convexe.

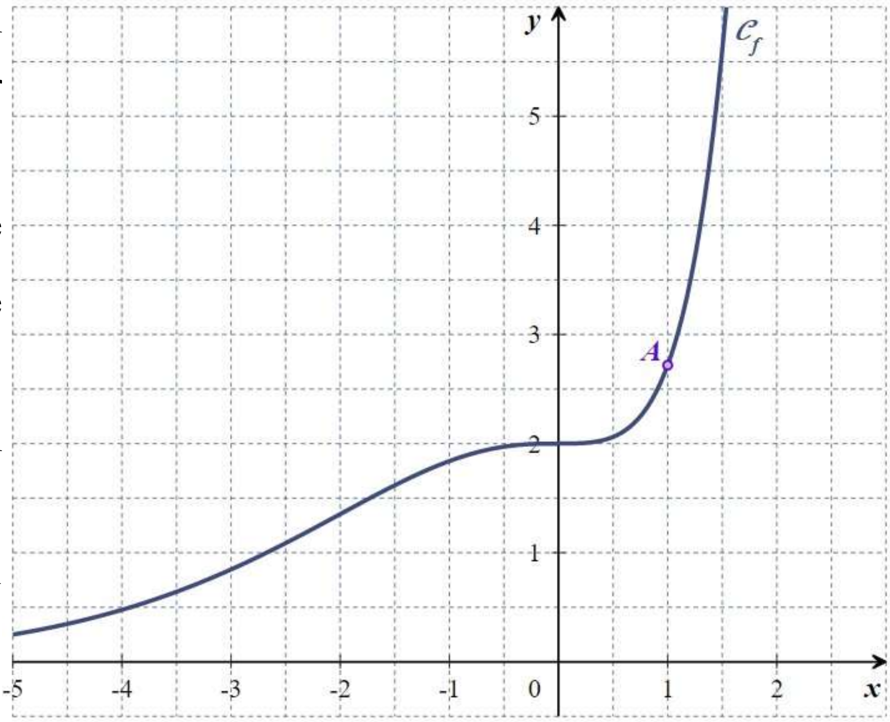
3) Soit *h* la fonction définie sur ℝ par $h(x)=x-f(x)$

a) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=x(1-e^{x^2-1})$

b) On admet que l'inéquation $1-e^{x^2-1}\geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1;1]$. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[-1;1]$ et en déduire la position relative de la courbe et de la droite D d'équation $y=x$ sur $[-1;1]$. *D'après Centres Étrangers, 2014*

Problème 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x$.

Sa courbe représentative est notée $\mathscr{C}_f$. On l'a tracée ci-contre dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1) a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f'(x)=x^2\mathrm{e}^x$

b) Étudier les variations de f.

2) Montrer que, sur l'intervalle $[1;2]$, l'équation $f(x)=4$ admet une solution unique α.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au dixième près de α.

3) Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe de $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1. Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère de la question 1.

4) a) On note f'' la dérivée seconde de la fonction f. Calculer $f''(x)$.

b) Étudier la convexité de la fonction f.

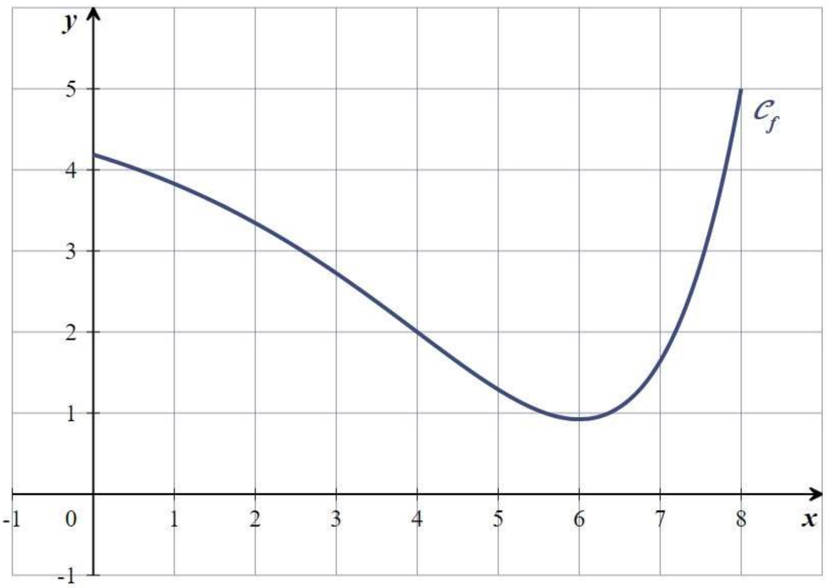
c) Calculer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Problème 6 : Partie A Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;8]$ par :

$$f(x)=\left(\frac{3}{4}x-6\right)\mathrm{e}^{0,5x-2}+5$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-contre dans un repère orthonormé.



1) Montrer que, pour tout réel x de

l'intervalle $[0;8]$, on a : $f'(x)=\left(\frac{3}{8}x-\frac{9}{4}\right)e^{0,5x-2}$.

2) a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;8]$.

b) En déduire le tableau des variations de la fonction *f* sur ce même intervalle.

3) a) Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point A d'abscisse 4.

b) Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère de la question 1)

c) En déduire graphiquement la valeur de $f''(4)$

4) Montrer que, dans l'intervalle $[6;8]$, l'équation $f(x)=2$ admet une deuxième solution α. Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

Partie B

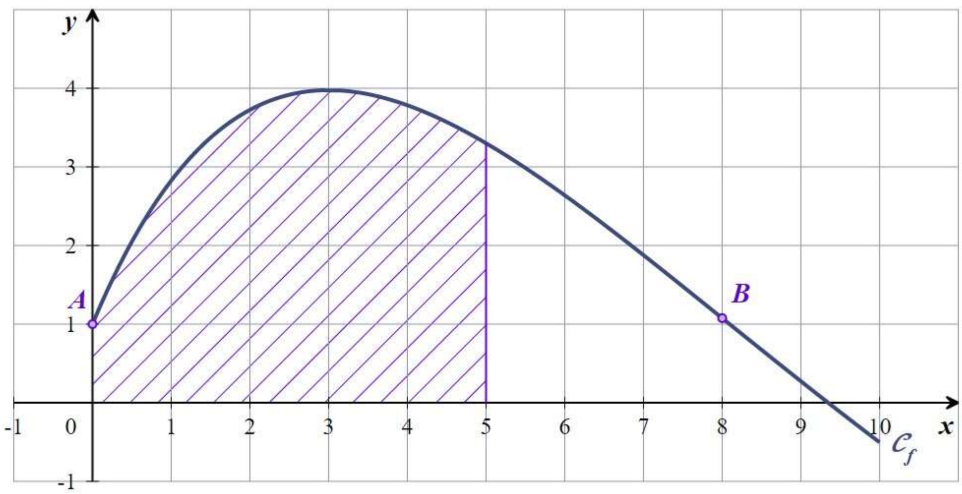
Une entreprise fabrique un certain type d'article. Sa capacité de production est limitée à 800 articles par jour. Après avoir fait une étude, le directeur constate que si l'entreprise produit chaque jour x centaines d'articles (où x est un nombre de l'intervalle $[0;8]$) alors le coût moyen de production d'un article, en centaines d'euros, est donné par la fonction *f* définie dans la partie A.

1) Si le prix de vente d'un article est de 92 €, l'entreprise fait-elle un bénéfice ?

2) Déterminer l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour que le coût moyen de production soit inférieur ou égal à 200 € ?

Problème 7 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par : $f(x)=(4x+8)e^{-0,2x}-7$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (tracée ci-contre)



1) On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour seul point d'inflexion le point B d'abscisse 8. À l'aide du graphique : a) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction *f* est concave.

b) Donner le tableau des variations de la dérivée $f\,'$ de la fonction f.

2) Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;10]$, on a :

$$f\,'(x)=(-0{,}8x+2{,}4)\mathrm{e}^{-0{,}2x}$$

3) a) Étudier le signe de $f\,'(x)$ sur l'intervalle $[0;10]$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle. On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée à 0,001 près.

4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 0,001 près de α.

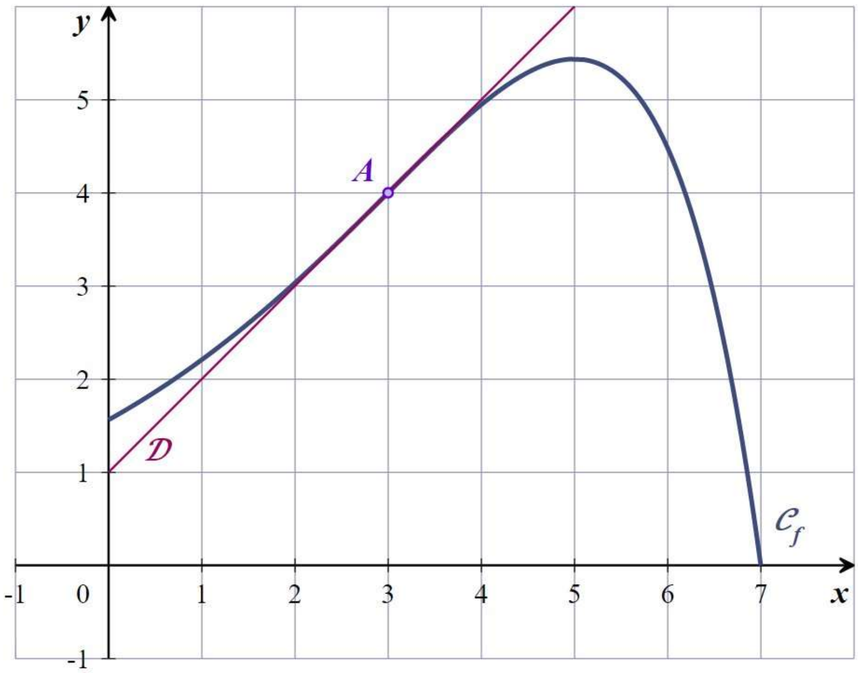
5) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0. La tracer sur le graphique.

Problème 8 : Partie A

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;7]$ par :

$f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{0{,}5x-1{,}5}$, où a et b sont deux nombres réels. On admet que la fonction f est deux fois dérivable. On note $f\,'$ sa dérivée et $f\,''$ sa dérivée seconde.

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-contre dans un repère orthonormé.



La droite $\mathcal{D}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1) Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(3)$ et de $f\,'(3)$.

2) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;7]$, on a : $f\,'(x)=(0{,}5ax+a+0{,}5b)\mathrm{e}^{0{,}5x-1{,}5}$

3) a) Déduire des deux questions précédentes, en résolvant un système, que $a=-1$ et $b=7$

b) Donner des expressions de $f(x)$ et de $f\,'(x)$

4) a) Étudier le signe de $f\,'(x)$ sur l'intervalle $[0;7]$.

b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

5) Montrer que, dans l'intervalle $[5;7]$, l'équation $f(x)=4$ admet une deuxième solution α.

6) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu le résultat ci-contre :

1	$g(x) := (2{,}5 - 0{,}5x) * \exp(0{,}5x - 1{,}5)$ $\rightarrow g(x) = \dfrac{(5-x)e^{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}}{2}$
2	Dériver $[g(x)]$ $\rightarrow \dfrac{(3-x)e^{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}}{4}$

En s'appuyant sur ce résultat, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie B : Une entreprise fabrique un certain type d'articles. Sa capacité de production est limitée à 7000 articles par jour.

Après avoir fait une étude, le directeur constate que si l'entreprise vend chaque jour x milliers d'articles (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0;7]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A par $f(x)=(7-x)e^{0{,}5x-1{,}5}$.

1) Quelle quantité d'articles l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre afin de réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors le montant, arrondi à la centaine d'euros près, de ce bénéfice maximal ?

2) Déterminer l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice supérieur ou égal à 4000 €.