Terminale Spécialité

2ème fiche de problèmes d'études de fonctions avec continuité, convexité, exponentielle

Problème 1 : Partie A :

Soir f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=-x^3+16{,}5x^2-30x+110$.

On note f' la dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde.

1) a) Déterminer $f'(x)$

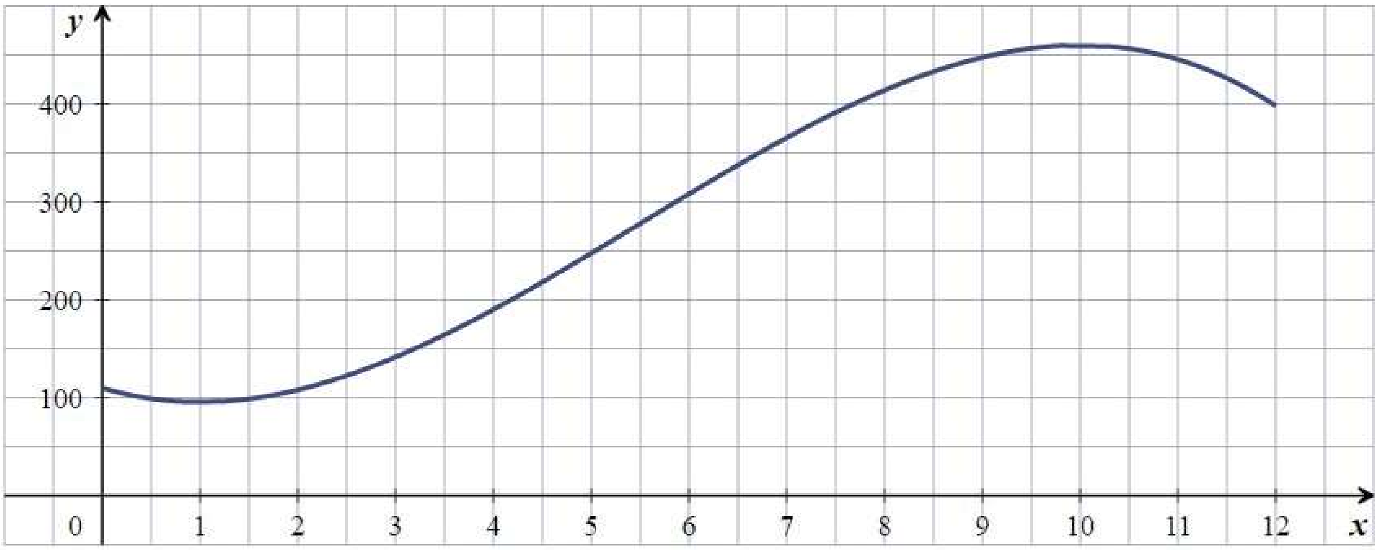
b) Étudier les variations de la fonction f

2) a) Déterminer $f''(x)$

b) Étudier la convexité de la fonction f .

Partie B :

La fonction f , définie dans la partie A, modélise sur l'intervalle $[0;12]$ le cours d'une action sur une année. x est le temps écoulé exprimé en mois et $f(x)$ est le cours de l'action en €.

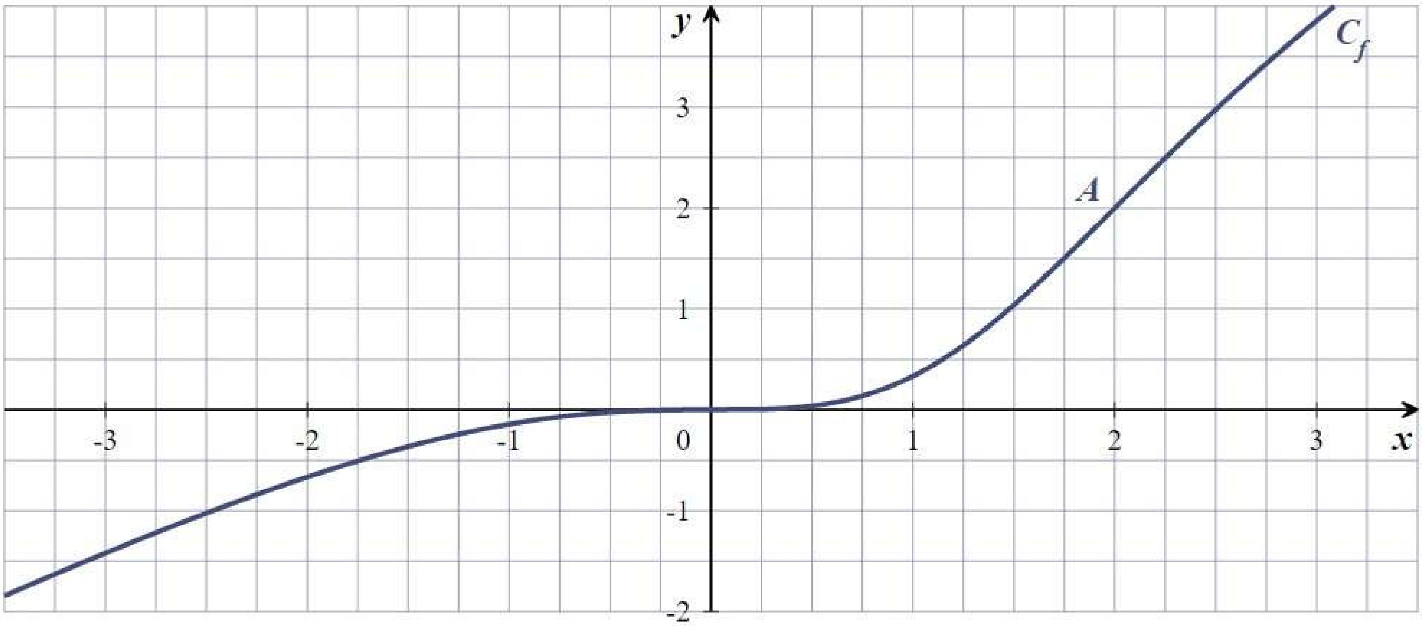


1) Sur un an, quel a été le cours le plus bas de cette action ? Le cours le plus haut ?

2) À quel moment la croissance du cours de cette action s'est-elle ralentie ?

Problème 2 : Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+4}$.

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.



1) On note f' la dérivée de la fonction f.

a) Calculer f' et vérifier que, pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-4x+12)}{(x^2-2x+4)^2}$

b) Étudier les variations de la fonction f.

2) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 2. Tracer la tangente T dans le repère ci-dessus.

3) La dérivée seconde de la fonction f est définie, pour tout réel x, par $f''(x)=\dfrac{-48x^2+96x}{(x^2-2x+4)^3}$.

a) Étudier la convexité de la fonction f.

b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui lesquels et quelles sont leurs coordonnées ?

Problème 3 : *(Baccalauréat ES, Amérique du Nord, 2018)*

On appelle fonction « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».

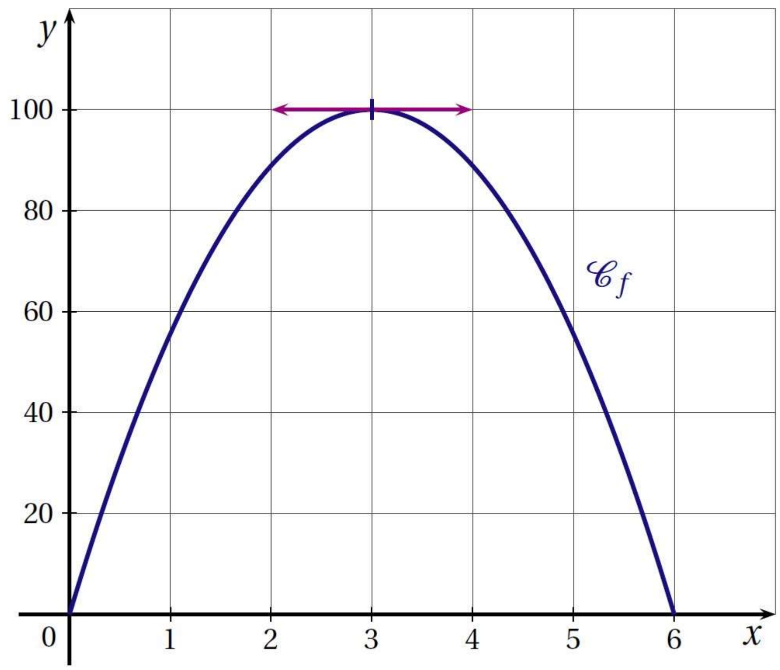
On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ».

On dira qu'il y a « souhait » lorsque la fonction envie est positive ou nulle, et qu'il y a « rejet » lorsque la fonction « envie » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « satisfaction » différent.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « satisfaction » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures)



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

1) Lire la durée de travail quotidien menant à « saturation ».

2) Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « rejet ».

Partie B : Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « satisfaction » g est définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $g(x)=12{,}5\,x\,e^{-0{,}125x+1}$ (x est exprimé en jours).

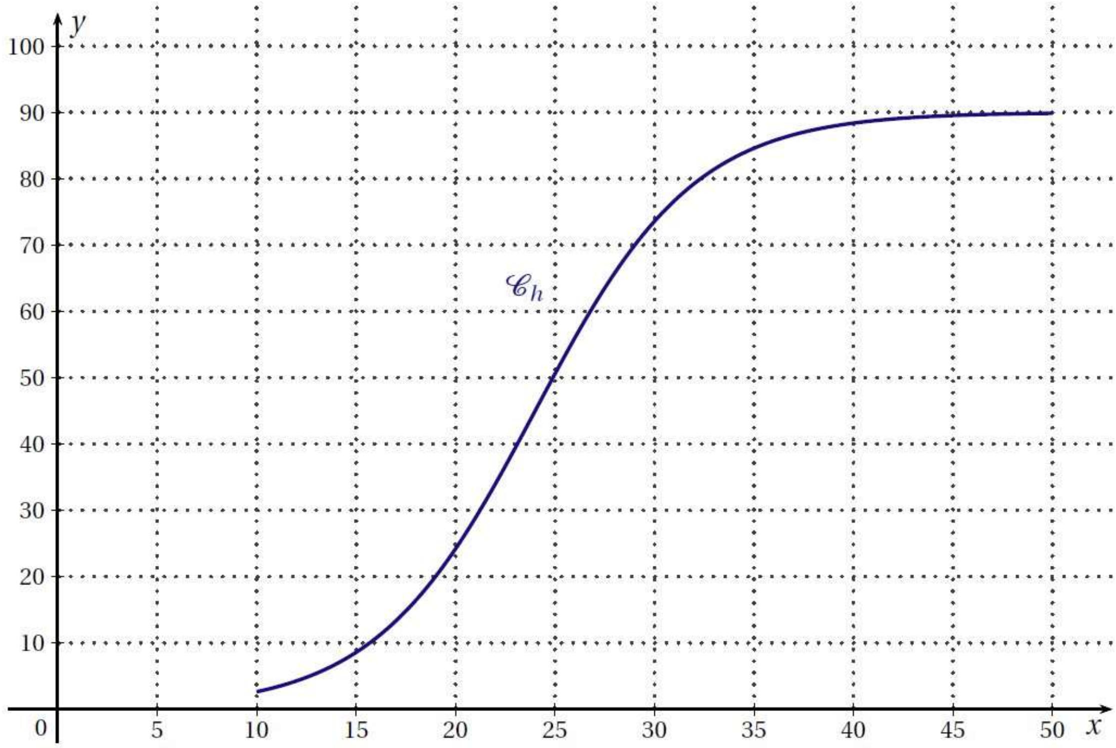
1) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;30]$, $g'(x)=(12{,}5-1{,}562\,x)e^{-0{,}125x+1}$.

2) Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0;30]$ puis dresser le tableau de variations de g sur cet intervalle.

3) Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « saturation » ?

Partie C : La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « satisfaction » h est définie sur l'intervalle $[10;50]$ par $h(x)=\dfrac{90}{1+e^{-0{,}25x+6}}$ (x est exprimé en millier d'euros)

La courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h est représentée ci-dessous :



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	`Dériver (90/(1 + exp(-0.25 * x +6)))` $\dfrac{22{,}5e^{-0{,}25x+6}}{(1+e^{-0{,}25x+6})^2}$
2	`Dériver (22.5 * exp(-0,25 x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6))`^{2}`)` $\dfrac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}(e^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+e^{-0{,}25x+6})^3}$

1) Donner sans justification une expression de $h''(x)$

2) Résoudre dans l'intervalle $[10;50]$ l'inéquation $e^{-0,25x+6}-1>0$

3) Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10;50]$

4) À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ? Justifier.

5) Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel la fonction « satisfaction » atteint 80. Arrondir au millier d'euros.

Problème 4 : f est la fonction définie sur $[0;12]$ par $f(x)=2xe^{-x}$.

Partie A : Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver $(2*x*\exp(-x))$ $-2*x*\exp(-x)+2*\exp(-x)$
2	Factoriser $(-2*x*\exp(-x)+2*\exp(-x))$ $2*(1-x)*\exp(-x)$
3	Dériver $(2*(1-x)*\exp(-x))$ $2*x*\exp(-x)-4*\exp(-x)$
4	Factoriser $(2*x*\exp(-x)-4*\exp(-x))$ $2*(x-2)*\exp(-x)$

1) Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel.

2) a) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;12]$ en le justifiant.

b) Démontrer que l'équation $f(x)=0,5$ admet 2 solutions dans $[0;12]$. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

3) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0;12]$.

Partie B : Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

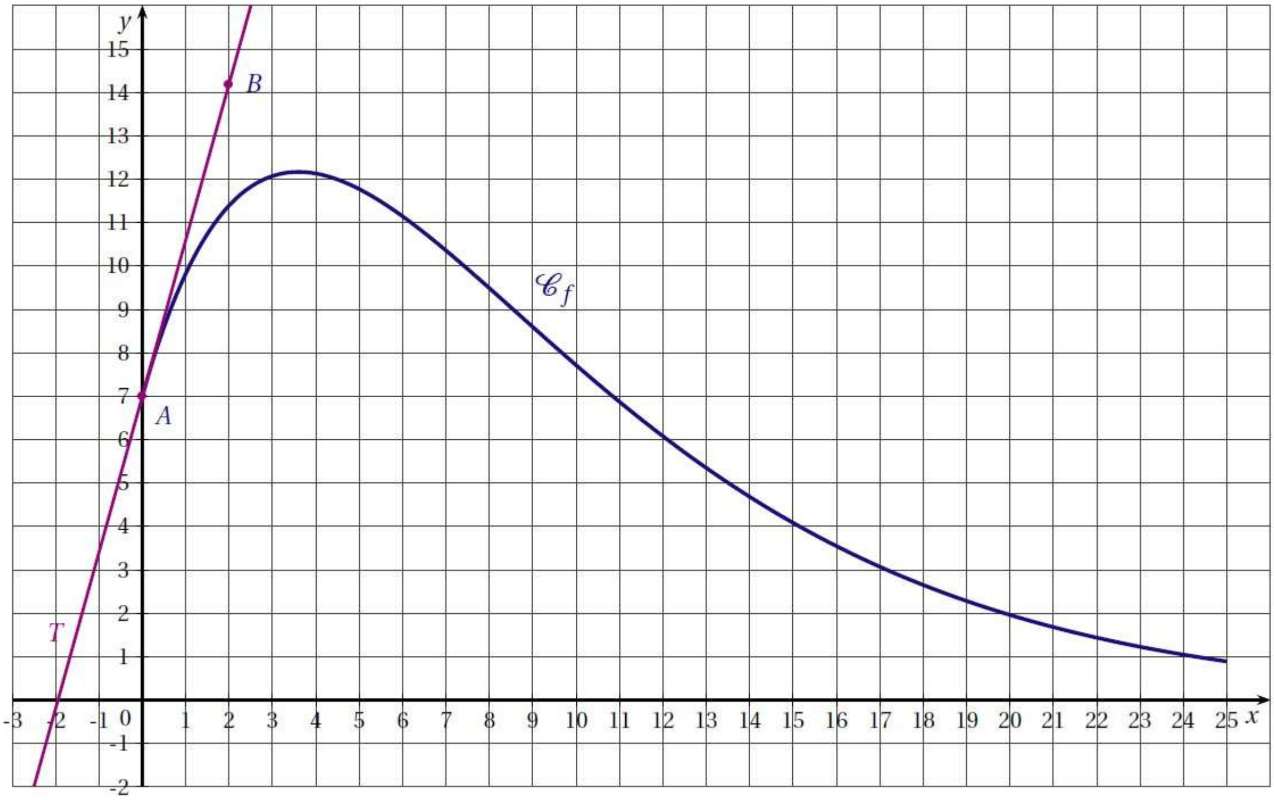
- x représente le temps (exprimé en heures) écoulé depuis la consommation d'alcool.
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

1) a) Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant sa consommation d'alcool.

b) À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Arrondir au centième.

2) Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L. Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?

Problème 5 : Partie A : On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0;25]$ par $f(x)=(ax+b)e^{-0,2x}$, où a et b sont deux nombres réels. On a représenté également sa tangente T au point $A(0;7)$. T passe par le point $B(2;14,2)$.



1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=6$.

2) a) Déterminer par un calcul le cœfficient directeur de la droite T.

b) Exprimer, pour tout x ∈ $[0;25]$, $f'(x)$ en fonction de a et b.

c) Montrer que a et b sont solutions du système : $\begin{cases} a-0,2b=3,6 \\ b=7 \end{cases}$. En déduire la valeur de a.

Partie B :

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;25]$ par $f(x)=(5x+7)e^{-0,2x}$

2) Montrer que l'équation $f(x)=6$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;25]$. Donner une valeur approchée au dixième de α.