Terminale Spé – 36 Exercices sur les calculs de primitives

Exercice 1 :

1) Déterminer une primitive sur ℝ de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=x^2-4x+9$

2) Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}$

Exercice 2 : Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de chacune des fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=6x(x^2-1)^3$ $\quad g(x)=\frac{5}{2x+3}$ $\quad h(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$ $\quad \mathrm{i}(x)=\frac{2}{\sqrt{3x+4}}$

Exercice 3 : Soient f, u et v les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x^2} \qquad u(x)=-\frac{1}{x} \qquad v(x)=\frac{3x-1}{x}$$

1) Montrer que u et v sont des primitives de f sur $]0;+\infty[$.

2) Simplifier $u(x)-v(x)$ et expliquer ce résultat.

Exercice 4 : Soient f et F deux fonctions définies sur ℝ par :

$f(x)=x\sin(x)$ et $\mathrm{F}(x)=\sin(x)-x\cos(x)$

1) Déterminer la dérivée de la fonction F sur ℝ.

2) Expliquer pourquoi la fonction F est une primitive de f sur ℝ.

Exercice 5 : Soient F et f les fonctions définies sur ℝ respectivement par :

$$\mathrm{F}(x)=x\mathrm{e}^{3x} \qquad \text{et} \qquad f(x)=(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$$

1) Justifier que, pour tout réel x, $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.

2) Que peut-on en déduire pour la fonction F ?

Exercice 6 : 1) Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=x\ln(x)$ est une primitive de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)-1$.

2) Donner deux autres primitives de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 7 : 1) Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

2) En déduire une primitive sur $]0;+\infty[$ des fonctions p, q et r définies par :

$$p(x)=\frac{7}{x} \qquad q(x)=\frac{1}{3x} \qquad \text{et} \qquad r(x)=\frac{x+1}{x}$$

Exercice 8 : Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier :

f et g sont des fonctions définies sur un intervalle I.

F et G sont des primitives respectives de f et de g sur I.

1) F + G est une primitive de $f+g$ sur I.

2) $\mathrm{F}\times\mathrm{G}$ est une primitive de $f\times g$ sur I.

3) $-\mathrm{F}$ est une primitive de $-f$ sur I.

4) F^2 est une primitive de f^2 sur I.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2$.

1) Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

Exercice 10 : Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=\frac{1}{x^5}$.

1) Écrire $u(x)$ sous la forme x^n, avec n entier.

2) En déduire une primitive de u sur $]0;+\infty[$, puis l'écrire sous la forme $\frac{k}{x^4}$, où k est un réel.

Exercice 11 : Déterminer sur $]0;+\infty[$ une primitive de chacune des fonctions f, g, h définies par : $f(x)=\frac{1}{x^2}$; $\mathrm{g}(\mathrm{x})=x^{-3}$ et $\mathrm{h}(\mathrm{x})=\frac{2}{x^3}$.

Exercice 12 : 1) Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2\,\mathrm{e}^{2x}$.

2) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions g et h définies par :

$g(x)=\mathrm{e}^{2x}$ et $h(x)=\mathrm{e}^{ax}$, avec $a\in\mathbb{R}^*$.

Exercice 13 : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=2xe^{x^2}$,

1) Vérifier que f s'écrit sous la forme $u'e^u$, où u est une fonction dont on donnera l'expression.

2) En déduire une primitive de la fonction f sur ℝ.

Exercice 14 : Soit f la fonction définie sur I = $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{2}{2x-1}$.

1) Vérifier que f est de la forme $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction positive sur I dont on donnera l'expression.

2) En déduire une primitive de la fonction f sur I.

Exercice 15 : Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x)=\sin^2(x)\cos(x)$.

1) Vérifier que f est sous la forme u^2u', où u est une fonction définie sur ℝ à préciser.

2) En déduire une primitive de f sur ℝ.

Exercice 16 : Soit f la fonction définie sur I = $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$.

1) Écrire f sous la forme $k\frac{u'}{\sqrt{u}}$, où k est un réel et u une fonction à déterminer.

2) En déduire une primitive de f sur I.

Exercice 17 : Les fonctions f et g sont définies sur ℝ par : $f(x)=x\cos(x)$ et $g(x)=\cos(x)+x\sin(x)$. 1) Montrer que g est une primitive de f sur ℝ.

2) En déduire toutes les primitives de f sur ℝ.

Exercice 18 : Soient f et g les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x} \quad \text{et} \quad g(x)=-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

1) Montrer que g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2) Déterminer la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice 19 : Dans chaque cas, montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+5$ $\qquad$ $I=\left]0;+\infty\right[$

2) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ $\qquad$ $F(x)=x-\ln(x+1)$ $\qquad$ $I=\left]-1;+\infty\right[$

Exercice 20 : Le logiciel de calcul formel Xcas fournit une primitive d'une fonction avec la commande ***int*** .

Prouver le résultat ci-contre :

```
1  int(x^2*exp(x))
        (x^2-2*x+2)*exp(x)
```

Exercice 21 : Soit F la fonction définie sur $\left]-\infty;2\right[$ par $F(x)=(x-2)\sqrt{2-x}$.

1) Calculer $F'(x)$

2) En déduire une primitive sur $\left]-\infty;2\right[$ de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{2-x}$.

Piste 2 : remarquer que $\frac{u}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}$ *pour* $u>0$

Exercice 22 : Soient f , g et h les fonctions définies sur $\left]1;+\infty\right[$ par :

$f(x)=\frac{1}{x-1}$ $\quad$; $\quad$ $g(x)=\ln(x-1)$ $\quad$ et $\quad$ $h(x)=\ln(3x-3)$.

1) Montrer que g et h sont des primitives de f sur $\left]1;+\infty\right[$.

2) Expliquer pourquoi il existe un réel C tel que, pour tout $x>1$, $h(x)=g(x)+C$, et déterminer C.

Exercice 23 : Indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse, puis justifier.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x\cos(x)$ a pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=e^x\sin(x)$.

Exercice 24 : Soit f la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=x\ln(x)$.

Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $F(x)=x^2(a\ln(x)+b)$ soit une primitive de f .

Exercice 25 : Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1) Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

3) Toute primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction continue est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Une primitive de la dérivée d'une fonction f est la fonction $x \longmapsto f(x) + 10$

Exercice 26 : 1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=2x^3+3x^2-x+2$.

2) Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par
$g(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{2x}$.

Exercice 27 : Dans chaque cas, déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par leurs expressions.

1) $f(x)=5x^3-3x+7$ et $g(x)=2x^4-\dfrac{1}{2}x^3$

2) $f(x)=x^5-x$ et $g(x)=4x^4-7x+\sqrt{2}$

3) $f(x)=2\cos(x)-3\sin(x)$ et $g(x)=10-3\,\mathrm{e}^x+x$

4) $f(x)=(x-1)(x+2)$ et $g(x)=(2x+1)^2$

5) $f(x)=\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{1}{6}$ et $g(x)=12{,}4x^9-7x^6+15x^4$

Exercice 28 : Déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par leurs expressions.

1) $f(x)=3x+1+\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2}$

2) $f(x)=x+x^{-3}$ et $g(x)=x-\dfrac{1}{2x}$

3) $f(x)=\dfrac{7}{x^3}$ et $g(x)=\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$

4) $f(x)=\dfrac{3x^2-11}{x^2}$ et $g(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x}}-x+6$

(Suite de l'exercice 28) 5) $f(x)=\dfrac{4-x\sqrt{x}}{x^2}$ et $g(x)=\dfrac{1+x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Exercice 29 : Déterminer une primitive sur ℝ des fonctions f, g, h et i définies sur ℝ par :

$f(x)=3x^2(x^3+1)^2$ $\quad g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad h(x)=\mathrm{e}^{-x+3}$ $\quad \mathrm{i}(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+7}}$

Exercice 30 : Dans chaque cas, déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur ℝ par leurs expressions.

1) $f(x)=3\mathrm{e}^{3x+4}$ et $g(x)=x\mathrm{e}^{x^2-3}$

2) $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-3}$ et $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+4}$

3) $f(x)=5\mathrm{e}^{4-x}$ et $g(x)=\dfrac{4x^3}{x^4+5}$

4) $f(x)=4x(3x^2-8)^2$ et $g(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3+3}}$

5) $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+4)^3$ et $g(x)=(2x-1)^4$

6) $f(x)=\sin(3x)-\cos(2x)$ et $g(x)=\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

7) $f(x)=\sin(x)\cos(x)$ et $g(x)=\sin(x)\cos^2(x)$

8) $f(x)=\cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ et $g(x)=\sin(x)(1-\cos(x))^3$

9) $f(x)=\dfrac{4x+2}{x^2+x+1}$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{(x^2-2x+4)^2}$

10) $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ et $g(x)=\dfrac{3}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x+1)}$

Exercice 31 : Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=\dfrac{2}{x}(\ln(x)+2)^2$ $\quad \mathrm{I}=]0;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{2}{(3x-1)^2}+\dfrac{1}{3x-1}$ $\quad \mathrm{I}=\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

3) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad \mathrm{I}=]0;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\quad \mathrm{I}=]1;+\infty[$

Piste : reconnaître la forme $\dfrac{u'}{u}$

Exercice 32 : Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=\dfrac{-3-e^x}{(e^x+3x)^2}$ $\quad I=[0;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{-7}{x(\ln(x)+3)}$ $\quad I=]e^{-3};+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ $\quad I=]0;\pi[$

5) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad I=]0;+\infty[$

Exercice 33 :

1) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) $y'=x-\sin(x)$

2) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=2$

Exercice 34 : 1) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $]2;+\infty[$:

$$\frac{5x}{(x-2)(2x+1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{2x+1}$$

2) En déduire les primitives de la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x}{(x-2)(2x+1)}$

Exercice 35 : Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{x+1}$

2) En déduire les primitives de f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 36 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F une de ses primitives qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Trouver une primitive de la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x)=f(-x)+f(2x+1)+\dfrac{f(x)}{F(x)}$.