II - Les équations du type "produit nul" ou s'y rapportant.

Règle : Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

Pour deux facteurs : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Pour trois facteurs : $A \times B \times C = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$ ou $C = 0$.

Le ou n'est pas exclusif.

Il est possible que plusieurs des trois facteurs soient nuls.

La règle s'étend à autant de facteurs

que l'on souhaite.

Exemples :

$$(E_4) - 7x(x-3)(4-x)(-5x+15) = 0$$

$$(E_5) \quad 4x^2 - 25 = 0$$

$$(E_6) \quad (3x-4)^2 = (3x-4)(x+2)$$

$$(E_7) \quad -4(t^2-49)(t-13) = 0$$

$$(E_8) \quad (7x-3)(x-1) = 3$$

$$(E_4)\ \underbrace{-7x(x-3)(4-x)(-5x+15)}_{\text{produit}} = \underbrace{0}_{\text{zéro}}$$

$(E_4) \Leftrightarrow -7x=0$ ou $x-3=0$ ou $4-x=0$ ou $-5x+15=0$

÷(-7) ↓ ↓ ÷(-7) ; +x ↓ +x ↓ ; -15 ↓ ↓ -15

$(E_4) \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$ ou $4=x$ ou $-5x=-15$

÷(-5) ↓ ↓ ÷(-5)

$(E_4) \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$ ou $x=4$ ou $x=3$

$$S = \{ 0 ; 3 ; 4 \}$$

$$(E_5)\quad \underbrace{4x^2-25}_{\text{une "somme" mais pas un produit !}} = \underbrace{0}_{\text{zéro}}$$

→ **On ne peut pas appliquer la règle du produit nul !**

...à moins de transformer le premier membre en produit !

Transformer une somme en produit = La factoriser

(E_5) $\underbrace{4x^2 - 25}_{\text{factorisable ?}} = \underbrace{0}_{\text{zéro}}$

oui :

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ← factorisation

$(E_5) \Leftrightarrow (2x)^2 - 5^2 = 0$

$(E_5) \Leftrightarrow \underbrace{(2x+5)(2x-5)}_{\text{produit}} = \underbrace{0}_{\text{nul}}$

$(E_5) \Leftrightarrow 2x + 5 = 0$ (-5) (-5) ou $2x - 5 = 0$ (+5) (+5)

$(E_5) \Leftrightarrow 2x = -5$ (÷2) (÷2) ou $2x = 5$ (÷2) (÷2)

$(E_5) \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$

$$S = \left\{ -\frac{5}{2} ; \frac{5}{2} \right\}$$

$$(E_6) \quad \underbrace{(3x-4)^2}_{\text{produit}} = \underbrace{(3x-4)(x+2)}_{\text{produit}}$$

a priori non nuls

⟶ On ne peut pas appliquer la règle du produit nul avec une équation sous cette forme.

$$(E_6) \quad (3x-4)^2 = (3x-4)(x+2)$$

$-(3x-4)(x+2)$ $\qquad$ $-(3x-4)(x+2)$

$$(E_6) \Leftrightarrow \underbrace{(3x-4)^2}_{k\,a} - \underbrace{(3x-4)}_{k}\underbrace{(x+2)}_{b} = 0$$

$$(E_6) \Leftrightarrow \underbrace{(3x-4)}_{k}\left[\underbrace{(3x-4)}_{a} - \underbrace{(x+2)}_{b}\right] = 0$$

⚠

distributivité simple : $k(a-b) = ka - kb$ (factorisation)

$(E_6) \Leftrightarrow \underbrace{(3x-4)\qquad(2x-6)}_{\text{produit}} = \underbrace{0}_{\text{zéro}}$

D'après la règle du produit nul :

$(E_6) \Leftrightarrow 3x-4=0$ ou $2x-6=0$

$(E_6) \Leftrightarrow 3x=4$ (+4) ou $2x=6$ (+6)

$(E_6) \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ (÷3) ou $x=3$ (÷2)

$S=\{\frac{4}{3}\ ;\ 3\}$

$(E_7) \quad -4(t^2-49)(t-13)=0$

$(E_7) \Leftrightarrow \cancel{-4=0}$ ou $t^2-49=0$ ou $t-13=0$ (+13)

faux quel que soit t

$(E_7) \Leftrightarrow (t+7)(t-7)=0$ ou $t=13$

$(E_7) \Leftrightarrow t+7=0$ (-7) ou $t-7=0$ (+7) ou $t=13$

$(E_7) \Leftrightarrow t=-7$ ou $t=7$ ou $t=13$

$S=\{-7\ ;\ 7\ ;\ 13\}$

$$(E_8) \quad \underbrace{(7x-3)(x-1)}_{\text{produit}} = 3 \quad \text{pas zéro}$$

→ On ne peut pas appliquer la règle du produit nul.

$$(E_8) \quad (7x-3)(x-1) = 3$$

$$(E_8) \Leftrightarrow 7x^2 - 7x - 3x + 3 = 3$$

$$(E_8) \Leftrightarrow 7x^2 - 10x + 3 = 3 \quad (-3)$$

$$(E_8) \Leftrightarrow 7x^2 - 10x = 0$$

a k b k

$$(E_8) \Leftrightarrow \underbrace{x\,(7x-10)}_{\text{produit}} = \underbrace{0}_{\text{nul}}$$

$$(E_8) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 7x - 10 = 0$$

$$(E_8) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 7x = 10 \quad (+10)$$

$$(E_8) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{10}{7} \quad (\div 7)$$

$$\boxed{S = \left\{0; \frac{10}{7}\right\}}$$