

Terminale ES – Exercices et problèmes sur probabilités conditionnelles, arbres de probabilités, variable aléatoire, indépendance et loi binomiale.

Exercice 1: Une urne contient 30 boules blanches et 20 boules rouges.
On tire successivement, avec remise, 5 boules de cette urne.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches tirées.

1) Expliquer pourquoi X suit une **loi binomiale**. Préciser les paramètres de cette loi.

2) a) Déterminer la loi de probabilité de X et compléter le tableau ci-contre en utilisant des arrondis au millième.

k	0	1	2	3	4	5
P(X=k)						

b) Quelle est la valeur la plus probable prise par X ?

c) Représenter la loi de probabilités de X par un diagramme en bâtons.

3) Quelle est la probabilité de chacun des événements : $X \leq 2$? $1 \leq X \leq 3$? $X \geq 4$?

Exercice 2 (Bac ES, Liban, 29 mai 2012)

Dans un salon de coiffure pour femmes, le coloriste propose aux clientes qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires :
– une coloration naturelle à base de plantes qu’il appelle « couleur-soin »,
– des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, qu’il appelle « effet coup de soleil ».

Ce coloriste a fait le bilan suivant sur ces prestations :
– 40 % des clientes demandent une « couleur-soin ».
– parmi celles qui n’en veulent pas, 30 % des clientes demandent un « effet coup de soleil ».
– de plus, 24 % des clientes demandent les deux à la fois.

On considère une de ces clientes.
On notera C l’évènement « la cliente souhaite une "couleur-soin" ».
On notera M l’évènement « la cliente souhaite un "effet coup de soleil" ».

- 1) Calculer la probabilité de M sachant C notée $P_C(M)$.
- 2) Construire un arbre pondéré qui illustre la situation.
- 3) Calculer la probabilité que la cliente ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil ».
- 4) Montrer que la probabilité de l’évènement M est égale à 0,42.
- 5) Les évènements C et M sont-ils **indépendants** ?
- 6) Une « couleur-soin » coûte 35 euros et un « effet coup de soleil » coûte 40 euros.

a) Recopier puis compléter sans justifier le tableau suivant donnant la loi de probabilité du gain en euros du coloriste par client :

x_i	75	40	35	0
p_i	0,24			0,42

b) Donner l’espérance E de cette loi. À quelle notion correspond-elle ?

c) Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Combien le coloriste doit-il facturer la réalisation d'un « effet coup de soleil » pour que l'espérance de gain par client augmente de 15% ?

Exercice 3 (Bac ES Polynésie, 8 juin 2012) :

L'Etat du Wyoming, aux Etats-Unis, accueille chaque année près de 3,5 millions de touristes, notamment venus visiter les parcs nationaux de Yellowstone et de Grand Teton.

92% de ces touristes visitent le parc de Yellowstone ; parmi ceux-là, 60% visitent aussi le parc du Grand Teton. Enfin, 6% des touristes se rendant au Wyoming ne visitent aucun des deux parcs.

On interroge au hasard un touriste s'étant rendu au Wyoming ; on suppose que tous ces touristes ont la même probabilité d'être interrogés.

On note Y l'événement : « le touriste a visité le parc de Yellowstone » ; \bar{Y} désigne l'événement contraire de Y .
On note G l'événement : « le touriste a visité le parc du Grand Teton » ; \bar{G} désigne l'événement contraire de G.

On note $p(A)$ la probabilité d'un événement A et, si B est un événement de probabilité non nulle, $p_B(A)$ la probabilité d'un événement A sachant que l'événement B est réalisé.
Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

- 1) Que vaut $p(\bar{Y} \cap \bar{G})$, la probabilité de l'événement " \bar{Y} et \bar{G} " ?
- 2) Construire un arbre pondéré décrivant la situation étudiée, en y indiquant les probabilités données par l'énoncé qui correspondent à certaines de ses branches.
- 3) Calculer $p_{\bar{Y}}(\bar{G})$. Interpréter ce résultat par une phrase.
- 4) Montrer que $p(G) = 0,572$.
- 5) Un touriste a visité le parc du Grand Teton. Calculer la probabilité qu'il ait aussi visité le parc de Yellowstone (le résultat sera arrondi à 10^{-3} près).
- 6) Le billet d'entrée pour le parc de Yellowstone est de 10 dollars, celui pour le parc du Grand Teton est de 7 dollars.
- a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la somme, en dollars, dépensée pour la visite des parcs de Yellowstone et du Grand Teton par un touriste se rendant au Wyoming.

Somme en dollars	0			17
Probabilité				

- b) Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.
- c) Calculer l'écart-type de cette loi (arrondir le résultat au centième).

Exercice 4 : 1) Un industriel produit des balances dans deux usines : A et B.
Pour une période donnée, l'usine A fabrique 2400 balances dont 6 % présentent des défauts, l'usine B fabrique 4000 balances dont 7 % présentent des défauts.
Ces deux productions sont stockées au centre d'expédition. On prélève au hasard l'une de ces balances.

- a) Quelle est la probabilité que la balance prélevée présente un défaut ?
- b) Quelle est la probabilité pour que cette balance ne soit pas défectueuse ?
- c) Sachant que la balance prélevée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine A ? De l'usine B ? (Donner les résultats arrondis à 10^{-4} près.)
- 2) Des tests sont effectués sur les balances vendues ont montré que 90 % de ces balances fonctionnaient encore parfaitement à la fin de la garantie d'un an. Un hôtelier en achète six.
Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de balances parmi ces six qui fonctionnent parfaitement au bout d'un an.
- a) Expliquer pourquoi la loi de probabilité de X est une loi binomiale.
- b) Quelle est la probabilité pour qu'au bout d'un an : (Donner un arrondi les résultats à 10^{-4} .)
- Toutes les balances fonctionnent ?
 - Aucune balance ne fonctionne ?
 - Au moins la moitié des balances fonctionnent ?
 - Au plus la moitié des balances fonctionnent ?
- c) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type (à 10^{-4} près) de X .

Exercice 5 (Bac ES Antilles-Guyane, septembre 2011) :

À l'occasion d'un festival culturel, une agence de voyages propose trois types de transport pour permettre à chaque client de se rendre dans la ville organisatrice, afin d'assister à la cérémonie d'ouverture.

Les trois moyens de transport proposés sont l'avion, le train ou le car.

À chacun des clients qui achètent un billet de transport, l'agence propose de souscrire une assurance multirisque qui permet, sous certaines conditions, une indemnisation en cas de retard ou de vol de bagages. Une enquête montre que 55 % des clients choisissent l'avion, que 40 % choisissent le train et que les autres choisissent le car.

De plus, parmi les clients ayant choisi l'avion, 20 % ont souscrit l'assurance multirisque ; ils sont 8 % à choisir cette assurance parmi ceux qui ont choisi le voyage en train et seulement 4 % parmi ceux qui ont choisi le car. On prend au hasard le dossier d'un client qui se rendra à la cérémonie d'ouverture du festival, chaque dossier ayant la même probabilité d'être choisi.

On note :

- A l'évènement : « Le client a acheté un billet d'avion » ;
- T l'évènement : « Le client a acheté un billet de train » ;
- C l'évènement : « Le client a acheté un billet de car » ;
- S l'évènement : « Le client a souscrit une assurance multirisque » et \bar{S} son évènement contraire.

- 1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
- 2) Calculer la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un client qui voyagera en train et qui a souscrit une assurance multirisque. On donnera la valeur exacte de cette probabilité.
- 3) Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à 0,144.
- 4) On prend un dossier au hasard parmi les clients n'ayant pas souscrit une assurance multirisque.

Calculer la probabilité que ce dossier soit celui d'un client voyageant en train.
Le résultat sera donné arrondi au millième.

5) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On choisit trois dossiers au hasard, indépendamment les uns des autres.

Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins deux des dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque.

Exercice 6 (Bac ES Asie, juin 2012) :

L'opérateur téléphonique Boomtel propose à ses abonnés deux types d'accès internet à haut débit :

- un accès internet sur ligne fixe ;
- un accès 3G sur téléphone portable.

Aujourd'hui, l'entreprise fait les constats suivants sur les accès internet à haut débit de ses abonnés :

- 58 % des abonnés ont un accès internet sur ligne fixe. Parmi ceux-là, 24 % ont également un accès 3G sur téléphone portable ;
- parmi les abonnés qui n'ont pas d'accès internet sur ligne fixe, 13 % ont un accès 3G sur téléphone portable.

Rappels de notation : Soient A et B deux évènements,

- la probabilité de l'évènement A est notée $p(A)$;
- si $p(B) \neq 0$, $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé ;
- l'évènement contraire de l'évènement A est noté \bar{A} .

Pour une enquête de satisfaction, la fiche d'un abonné est prélevée au hasard.

Dans cet exercice on note :

- F l'évènement : « la fiche est celle d'un abonné qui a un accès internet sur ligne fixe » ;
- G l'évènement : « la fiche est celle d'un abonné qui a un accès 3G sur téléphone portable »

1) En utilisant les données de l'énoncé, préciser les valeurs de $p(F)$, de $p_F(G)$ et de $p_{\bar{F}}(G)$.

2) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation.

3) Calculer $p(F \cap \bar{G})$. Interpréter ce résultat.

4) a) Vérifier que la probabilité que la fiche prélevée soit celle d'un abonné qui n'a pas d'accès 3G sur téléphone portable est de 0,8062.

b) Peut-on affirmer qu'au moins 25 % des abonnés ont un accès 3G sur téléphone portable ?

5) On prélève successivement les fiches de trois abonnés. On admet que le nombre de fiches est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler le tirage à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'exactement une des fiches tirées soit celle d'un abonné qui n'a pas d'accès 3G sur téléphone portable. Arrondir le résultat au millième.