Exercice 4 du Bac S – Métropole – 20 juin 2013

Soit la suite numérique (u_n) définie sur ℕ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variations de cette suite.

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n+3$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$

c) En déduire une validation de la conjecture émise à la question 1) b).

3) On désigne par (v_n) la suite définie sur ℕ par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots. + u_n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n}{n^2} .$$

a) Exprimer S_n en fonction de n .

b) Déterminer la limite de la suite (T_n) .