Terminale ES – Chapitre III – Suites numériques.

I- Généralités.

1) Vocabulaire.

Voici une liste de nombres :	1	3	6	10	15	21	…	(termes)
On peut les numéroter :	n°0	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	…	(rangs)

Ainsi, le **terme** de **rang** 4, dans cet exemple, est 15.

Si on nomme cette suite (u_n) (Remarque : le nom de la suite est noté entre parenthèse), on notera :
$u_0=1$ (le terme de rang 0 est égal à 1) $u_1=3$, $u_2=6$, $u_3=10$ etc...

Pour un entier naturel, u_n , le terme de rang n de la suite, est appelé **terme général**. (Lui est noté sans parenthèses, contrairement au nom de la suite.)

Remarque : on n'est pas obligé de commencer la numérotation à 0, on peut la commencer à 1 ou à un autre rang.

2) Suites définies explicitement en fonction de n.

Une suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n lorsqu'elle est donnée, pour tout n, par une formule du type $u_n=f(n)$.

Exemple : Soit u_n la suite définie pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{3}{n}+n$.

On peut alors calculer n'importe quel terme de la suite.

Dans l'exemple, calculons u_{100} : $u_{100}=\frac{3}{100}+100$, $u_{100}=100{,}03$.

On peut aussi calculer u_3 : $u_3=\frac{3}{3}+3$, $u_3=4$.

3) Suites définies par récurrence.

Une suite est définie par récurrence lorsqu'on fournit :
- Son terme initial
- et une relation permettant de calculer chaque terme à partir du terme qui le précède. (Appelée **relation de récurrence**)

Exemple : Soit (v_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0=10 & \longleftarrow \text{terme initial} \\ \forall n \in \mathbb{N},\, v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+3 & \longleftarrow \text{relation de récurrence} \end{cases}$$

Ici, on ne peut pas calculer directement n'importe quel terme. On doit les calculer de proche en proche à partir de v_0 :

$$v_1=\frac{1}{2}\times v_0+3=\frac{1}{2}\times 10+3=5+3=8$$

$$v_2=\frac{1}{2}\times v_1+3=\frac{1}{2}\times 8+3=4+3=7$$

$$v_3=\frac{1}{2}\times v_2+3=\frac{1}{2}\times 7+3=6{,}5$$

etc...

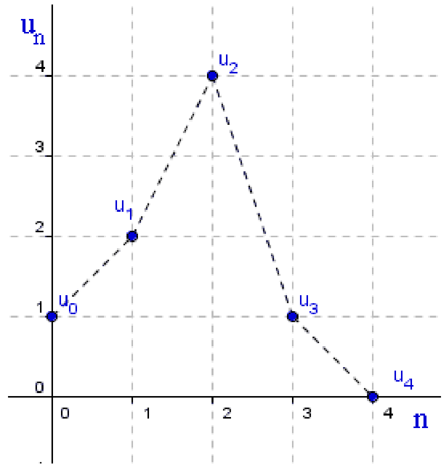
4) Sens de variation d'une suite.

Définition 1 : On dira qu'une suite (u_n) est :

- **Croissante** lorsque pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- **Décroissante** lorsque pour tout , $u_{n+1} \leqslant u_n$
- **Constante** lorsque pour tout n, $u_{n+1} = u_n$

Lorsqu'une suite est croissante, décroissante ou constante, on dit qu'elle est **monotone**. (Cela signifie que son sens de variation est constant).

Exemple de suite non monotone : (u_n) telle que $u_0=1$, $u_1=2$, $u_2=4$, $u_3=1$ et $u_4=0$.
(Cette suite est croissante pour n variant de 0 à 2, puis décroissante pour n variant de 2 à 4)



Remarque : si l'inégalité est stricte (> ou <), on parle de suite **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

En pratique : pour étudier le sens de variations d'une suite (u_n), on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple : Soit (w_n) la fonction définie pour tout n ∈ ℕ par $w_n = \dfrac{1}{3n+1}$.

Pour étudier son sens de variation, on peut calculer $w_{n+1} - w_n$ pour tout n ∈ ℕ.

∀ n ∈ ℕ, $w_{n+1} = \dfrac{1}{3(n+1)+1} = \dfrac{1}{3n+3+1} = \dfrac{1}{3n+4}$.

Donc ∀ n ∈ ℕ, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{3n+4} - \dfrac{1}{3n+1} = \dfrac{3n+1}{(3n+4)(3n+1)} - \dfrac{3n+4}{(3n+1)(3n+4)} = \dfrac{-3}{(3n+1)(3n+4)}$.

D'après la règle des signes, $w_{n+1} - w_n$ est strictement négatif pour tout n (car -3 est négatif, $3n+1$ est positif puisque $n \geqslant 0$ et $3n+4$ aussi). Donc la suite (w_n) est strictement décroissante.

II- Suites arithmétiques.

1) Définition.

Définition 1 : Une **suite** (u_n) est **arithmétique** lorsqu'il existe un réel constant[1] r tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé **la raison** de la suite arithmétique.

Exemple : $u_0=3 \xrightarrow{+2} u_1=5 \xrightarrow{+2} u_2=7 \xrightarrow{+2} u_3=9 \xrightarrow{+2} u_4=11 \xrightarrow{+2}$ etc...

Pour tout n ∈ ℕ, $u_{n+1} = u_n + 2$. (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.

1 En l'occurrence, ce réel sera constant si sa valeur ne dépend pas de n.

2) Calcul du terme général d'une suite arithmétique.

a) Lorsque le terme initial est le terme de rang 0.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0=5$ et de raison $r=7$. $u_0=5$ (pour n=0) $u_1=5+7$ (pour n=1) $u_2=u_1+7=5+7+7=5+2\times 7$ (pour n=2) $u_3=5+2\times 7+7=5+3\times 7$ (pour n=3) $u_4=5+4\times 7$ etc... (pour n=4) Pour tout n ∈ ℕ, $u_n=5+n\times 7$ ou $u_n=5+7n$.	Formule générale : Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r. $u_0=u_0$ (pour n=0) $u_1=u_0+r$ (pour n=1) $u_2=u_1+r=u_0+2r$ (pour n=2) $u_3=u_0+3r$ (pour n=3) $u_4=u_0+4r$ etc (pour n=4) Pour tout n ∈ ℕ, $u_n=u_0+nr$.

Théorème 1 : Si (u_n) est une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r, alors, pour tout n ∈ ℕ, $u_n=u_0+nr$.

b) Lorsque le terme initial est le terme de rang 1.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_1=7$ et de raison $r=10$. $u_1=7$ (pour n=1) $u_2=7+10$ (pour n=2) $u_3=u_2+10=7+10+10=7+2\times 10$ (pour n=3) $u_4=7+2\times 10+10=7+3\times 10$ (pour n=4) $u_5=7+4\times 10$ etc... (pour n=5) Pour tout n ∈ ℕ*, $u_n=7+(n-1)\times 10$.	Formule générale : Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_1 et de raison r. $u_1=u_1$ (pour n=1) $u_2=u_1+r$ (pour n=2) $u_3=u_2+r=u_1+2r$ (pour n=3) $u_4=u_1+3r$ (pour n=4) $u_5=u_1+4r$ etc (pour n=5) Pour tout n ∈ ℕ, $u_n=u_1+(n-1)r$.

Théorème 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique de terme initial u_1 et de raison r, alors, pour tout n ∈ ℕ, $u_n=u_0+(n-1)r$.

Remarque : si le terme initial est le terme de rang p, alors pour tout $n\geqslant p$, $\boxed{u_n=u_p+(n-p)r}$.

3) Comment prouver qu'une suite est arithmétique ?

a) En prouvant que sa variation absolue est constante.

Définition 2 : On appelle variation absolue de la suite (u_n) la différence $u_{n+1}-u_n$.

Théorème 3 : Une suite (u_n) est arithmétique si sa variation absolue $u_{n+1}-u_n$ est constante.
Cette variation absolue constante est alors la raison de la suite arithmétique.

Preuve :

- Si $u_{n+1}-u_n$ est une constante égale à a, alors pour tout n, $u_{n+1}-u_n=a \Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+a$.

Donc, par définition, (u_n) est une suite arithmétique de raison a.

- Réciproquement, si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout n, $u_{n+1}=u_n+r$ soit $u_{n+1}-u_n=r$, donc sa variation absolue est constante.

b) En prouvant que son terme général peut s'écrire explicitement sous la forme $u_n=b+an$.

Réciproque du théorème 1 : Si une suite (u_n) a un terme général de la forme $u_n=b+an$ où a et b sont des constantes, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a et u_0 , s'il existe, est égal à b.

Preuve : Soit (u_n) définie pour tout n par $u_n=b+an$ où a et b sont des constantes.
Alors, pour tout n, $u_{n+1}-u_n=[b+a(n+1)]-[b+an]=an+a-an=a$.
D'après le théorème 3, (u_n) est une suite arithmétique de raison a.
Si u_0 est défini, on a $u_0=b+a\times 0=b$.

Exemple : la suite définie pour tout n ∈ ℕ par $v_n=4-6n$ est arithmétique de terme initial $v_0=4$ et de raison -6 .

4) Sens de variations d'une suite arithmétique.

Théorème 4 : une suite arithmétique est :
- (strictement) croissante lorsque sa raison est (strictement) positive.
- (strictement) décroissante lorsque sa raison est (strictement) négative.
- constante lorsque sa raison est nulle.

Preuve : Immédiate car $u_{n+1}-u_n$ est égal à la raison, donc du signe de la raison.

III- Suites géométriques.

1) Définition.

Définition 3 : Une **suite** (u_n) est **géométrique** lorsqu'il existe un réel constant q tel que, pour tout n, $u_{n+1}=u_n\times q$. Le réel q est appelé **la raison** de la suite géométrique.

Exemple : $u_0=0{,}003 \xrightarrow{\times 10} u_1=0{,}03 \xrightarrow{\times 10} u_2=0{,}3 \xrightarrow{\times 10} u_3=3 \xrightarrow{\times 10} u_4=30 \xrightarrow{\times 10}$ etc...

Pour tout n ∈ ℕ, $u_{n+1}=u_n\times 10$. (u_n) est une suite géométrique de raison 10.

2) Calcul du terme général.

a) Lorsque le terme initial est le terme de rang 0.

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_0=3$ et de raison $q=5$.	Formule générale : Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q.
$u_0=3$ (pour n=0) $u_1=3\times 5$ (pour n=1) $u_2=u_1\times 5=3\times 5\times 5=3\times 5^2$ (pour n=2) $u_3=3\times 5^2\times 5=3\times 5^3$ (pour n=3) $u_4=3\times 5^4$ etc... (pour n=4)	$u_0=u_0$ (pour n=0) $u_1=u_0\times q$ (pour n=1) $u_2=u_1\times q=u_0\times q\times q=u_0\times q^2$ (pour n=2) $u_3=u_0\times q^2\times q=u_0\times q^3$ (pour n=3) $u_4=u_0\times q^4$ etc (pour n=4)

Pour tout n ∈ ℕ, $u_n = 3\times 5^n$.	Pour tout n ∈ ℕ, $u_n = u_0 \times q^n$.

<u>Théorème 5</u> : Si (u_n) est une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q, alors, pour tout n ∈ ℕ, $u_n = u_0 \times q^n$.

b) <u>Lorsque le terme initial est le terme de rang 1</u>.

<u>Exemple</u> : Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_1 = 5$ et de raison $q = 8$. $u_1 = 5$ (pour n=1) $u_2 = 5\times 8$ (pour n=2) $u_3 = u_2 \times 8 = 5\times 8\times 8 = 5\times 8^2$ (pour n=3) $u_4 = 5\times 8^2 \times 8 = 5\times 8^3$ (pour n=4) $u_5 = 5\times 8^4$ etc... (pour n=5) Pour tout n ∈ ℕ*, $u_n = 5\times 8^{n-1}$.	<u>Formule générale</u> : Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_1 et de raison q. $u_1 = u_1$ (pour n=1) $u_2 = u_1 \times q$ (pour n=2) $u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q \times q = u_1 \times q^2$ (pour n=3) $u_4 = u_1 \times q^3$ (pour n=4) $u_5 = u_1 \times q^4$ etc (pour n=5) Pour tout n ∈ ℕ, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

<u>Théorème 6</u> : Si (u_n) est une suite géométrique de terme initial u_1 et de raison q, alors, pour tout n ∈ ℕ, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

<u>Remarque</u> : si le terme initial est le terme de rang p, alors pour tout $n \geqslant p$, $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.

3) <u>Comment prouver qu'une suite est géométrique</u> ?

a) <u>On prouve qu'il existe un nombre constant q tel que pour tout n,</u> $u_{n+1} = u_n \times q$.

C'est la définition d'une suite géométrique !

<u>Variante</u> : si on a prouvé (ou si on sait) préalablement que tous les termes de la suite sont non-nuls, on peut calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver qu'il est constant (égal alors à la raison).

b) <u>On prouve que le terme général de la suite est de la forme</u> $b\times a^n$.

<u>Réciproque du théorème 5</u> : Si une suite (u_n) a un terme général de la forme $b\times a^n$ où a et b sont des constantes, alors (u_n) est une suite géométrique de raison a.
S'il est défini, u_0 est égal à b.

<u>Preuve</u> : Soit (u_n) une suite de terme général $u_n = b\times a^n$. Pour tout n, $u_n = b\times a^n$ et $u_{n+1} = b\times a^{n+1}$.
Donc $u_{n+1} = b\times a^n \times a = u_n \times a$. Donc (u_n) est géométrique de raison a.
Si u_0 est défini, alors $u_0 = b\times a^0 = b\times 1 = a$. On rappelle que pour tout réel a, $a^0 = 1$.

c) <u>On prouve que sa variation relative est constante</u>.

Définition 4 : Soit (u_n) une suite à termes tous non nuls.
On appelle variation relative de u_n le nombre $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$.

Théorème 7 : Une suite à termes tous non nuls est géométrique si et seulement si sa variation relative $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ est constante.

Remarque : la constante en question est $q-1$, où q est la raison de la suite géométrique.

Preuve :

- Soit (u_n) une suite géométrique à termes non nuls de raison q (Remarque : q est nécessairement non nul puisque les termes de la suite le sont).
  Pour tout n, $u_{n+1}=u_n\times q$ donc $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=\frac{u_n\times q-u_n}{u_n}=\frac{u_n\times(q-1)}{u_n}=q-1$.
  (On a le droit de simplifier par u_n car $u_n\neq 0$ pour tout n)
  La variation relative $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ est donc une constante, égale à $q-1$.
- Réciproquement, si (u_n) est une suite à termes non nuls telle que, pour tout n, $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ est égal à une constante C. $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=C \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=C\times u_n \Leftrightarrow u_{n+1}=C\times u_n+u_n \Leftrightarrow u_{n+1}=(C+1)u_n$.
  (u_n) est donc une suite géométrique de raison C+1.

4) Sens de variation d'une suite géométrique.

Nous ne traiterons que le cas où le premier terme et la raison sont positifs, donc les cas de suites géométriques à termes positifs.

Théorème 8 : Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial strictement positif et de raison $q>0$.

- Si $q>1$, alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $q=1$, alors (u_n) est constante.
- Si $0<q<1$, alors (u_n) est strictement décroissante.

Preuve : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison q>0.

Comme chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par q et comme le premier terme est strictement positif, de proche en proche et d'après la règle des signes, tous les termes de la suite seront strictement positifs.

Pour tout n, $u_{n+1}=u_n\times q$.

Si $q>1$, pour tout n, $u_n\times q>u_n$ (en multipliant les deux membres par u_n qui est strictement positif) Soit $u_{n+1}>u_n$. (u_n) est strictement croissante.	Si $q=1$, Pour tout n, $u_{n+1}=1\times u_n$ Soit $u_{n+1}=u_n$. (u_n) est donc constante.	Si $0<q<1$, alors, pour tout n, $0<q\times u_n<u_n$ (En multipliant les 3 membres par u_n qui est strictement positif) Donc $u_{n+1}<u_n$. (u_n) est donc strictement décroissante.

IV- Quelques résultats à propos de la suite (q^n), où $q>1$.

Remarque : La suite (q^n) est une suite géométrique de terme initial 1 (pour n=0) et de raison q.

1) Limite de la suite (q^n).

La définition de la notion de limite est hors programme.

Intuitivement, on dira :

- Que la limite d'une suite est +∞ si les nombres u_n finissent par dépasser un nombre aussi grand que l'on veut lorsque les valeurs de n deviennent suffisamment grandes. On note alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$[2].
- Que la limite d'une suite est –∞ si les nombres u_n finissent par dépasser un nombre négatif aussi petit que l'on veut lorsque les valeurs de n deviennent suffisamment grandes. On note alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty}$[3].
- Que la limite d'une suite est un réel L lorsque les nombres u_n finissent par s'accumuler autour d'un nombre fixe L lorsque n devient très grand.On note alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L}$[4].

Théorème 9 (admis) :

- Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- Si q=1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$
- Si $0<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$

Propriétés (admises) :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	$+\infty$	L ∈ ℝ	$-\infty$
Alors, pour tout réel b, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+b=$	$+\infty$	L+b	$-\infty$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a\times u_n=$	$+\infty$	L ∈ ℝ	$-\infty$
Si a>0	$+\infty$	aL	$-\infty$
Si a=0		0	
Si $a<0$	$-\infty$	aL	$+\infty$

Exemple : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\times u_n=-\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2u_n+100=-\infty$.

Application : détermination de la limite d'une suite géométrique de raison q>0.

Exemple : Soit (v_n) la suite géométrique de terme initial $v_0=8$ et de raison 0,1.
Comme $0<0{,}1<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 8\times 0{,}1^n=0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.
Soit (w_n) la suite géométrique de terme initial $w_0=-10$ et de raison 7.
Comme $7>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -10\times 7^n=-\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=-\infty$.

2 Et on dit « La limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers +∞ est +∞ » ou « La suite (u_n) diverge vers +∞. »
3 Et on dit « La limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers +∞ est –∞ » ou « La suite (u_n) diverge vers –∞. »
4 Et on dit « La limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers +∞ est L. » ou « La suite (u_n) converge vers L ».

2) Somme des (n+1) premiers termes de la suite (q^n).

Théorème 10 : Soit q un réel différent de 0 et de 1.
Alors la somme $S_n=1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n$ est égale à $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Preuve :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & S_n & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & & \\
+ & & & & \times(-q) & & \times(-q) & & \times(-q) & & \times(-q) & & \times(-q) & \\
 & -qS_n & = & & - & q & - & q^2 & - & \ldots & - & q^n & - & q^{n+1} \\
\hline
= & S_n-qS_n & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & - & q^{n+1}
\end{array}
$$

Soit $(1-q)\times S_n=1-q^{n+1}$ soit $\boxed{S_n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ (On peut diviser les deux membres par q car q≠1)

Conséquence : Si (u_n) est une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q différente de 0 et de 1, alors

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=u_0+u_0\times q+u_0\times q^2+u_0\times q^3+\ldots+u_0\times q^n=u_0(1+q+q^2+\ldots+q^n)=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

V- Suites arithmético-géométriques.

Définition 5 : (u_n) est une **suite arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux constantes a et b telles que, pour tout n, $u_{n+1}=a\times u_n+b$.

Remarques : Si a=1, (u_n) est arithmétique de raison b. Si b=0, (u_n) est géométrique de raison a.

Exemple : Soit (t_n) une suite telle que, pour tout n, $t_{n+1}=3t_n-2$
(t_n) est arithmético-géométrique avec a=3 et $b=-2$.

Dans les exercices, pour étudier une suite (u_n) arithmético-géométrique, on utilise une suite annexe (v_n), donnée par l'énoncé et définie en fonction de (u_n), qui est géométrique.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0=10 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=2u_n-1 \end{cases}$
et (v_n) la suite définie pour tout n ∈ ℕ par $v_n=u_n-1$.

On prouve que (v_n) est géométrique et on détermine son terme général :
∀ n ∈ ℕ, $v_n=u_n-1$ donc $v_{n+1}=u_{n+1}-1=2u_n-1-1=2u_n-2=2(u_n-1)=2v_n$.
(v_n) est donc géométrique de raison 2 et de terme initial $v_0=u_0-1=10-1=9$.
Donc ∀ n ∈ ℕ, $v_n=v_0\times 2^n=9\times 2^n$.
Et comme ∀ n ∈ ℕ, $v_n=u_n-1 \Leftrightarrow v_n+1=u_n$,
∀ n ∈ ℕ, $u_n=v_n+1$ soit $u_n=9\times 2^n+1$.
On a le terme général de (u_n), on peut aussi déterminer ses variations et sa limite.

Variations : ∀ n ∈ ℕ, $u_{n+1}-u_n=9\times 2^{n+1}-9\times 2^n=9\times 2^n\times 2-9\times 2^n\times 1=9\times 2^n(2-1)=9\times 2^n>0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Limite : comme $\lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} 9\times 2^n=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} 9\times 2^n+1=+\infty$, soit $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.