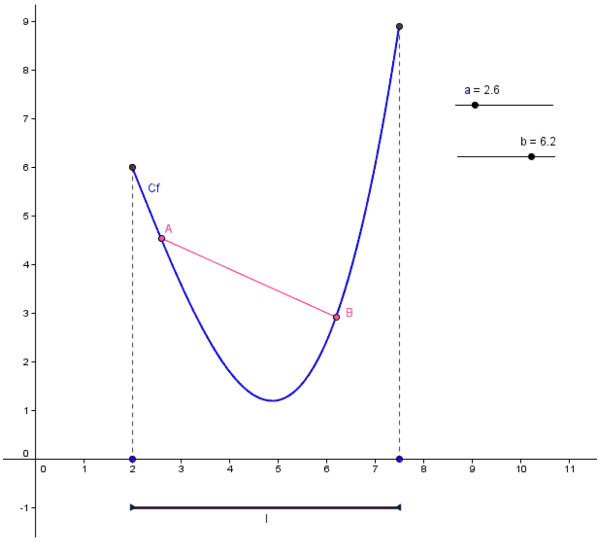
I- Définition.

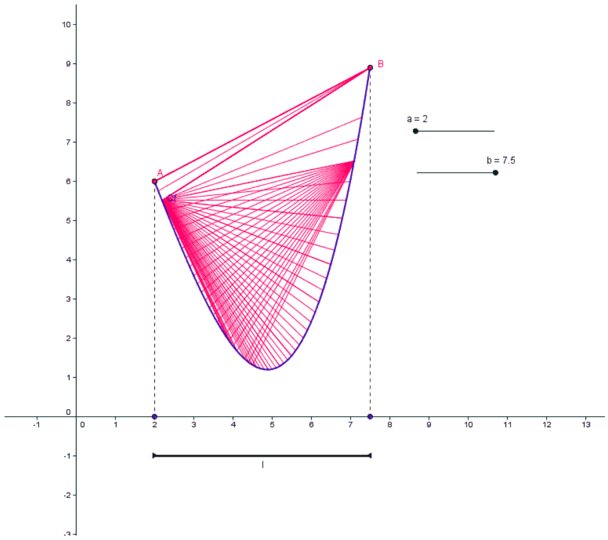
Définition 1 : Une fonction est **convexe** sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative est située en-dessous de chacune de ses cordes.

Rappel : On appelle corde d'une courbe tout segment reliant deux de ses points.

Illustration ci-dessous : on a tracé la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle I :



[AB] est une corde de Cf

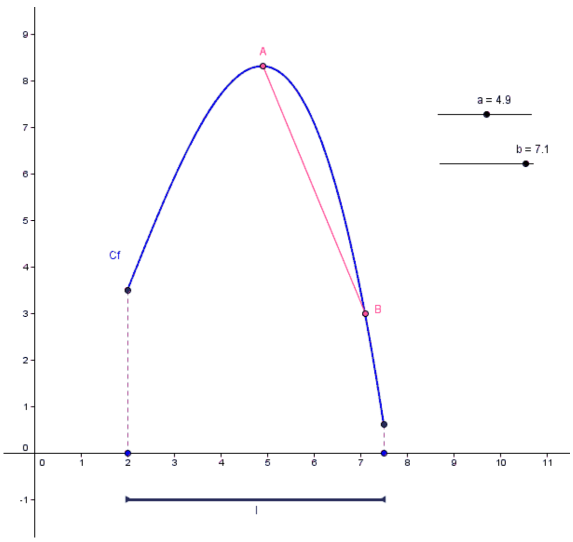


Cf est située en-dessous de chacune de ses cordes, f est donc convexe.

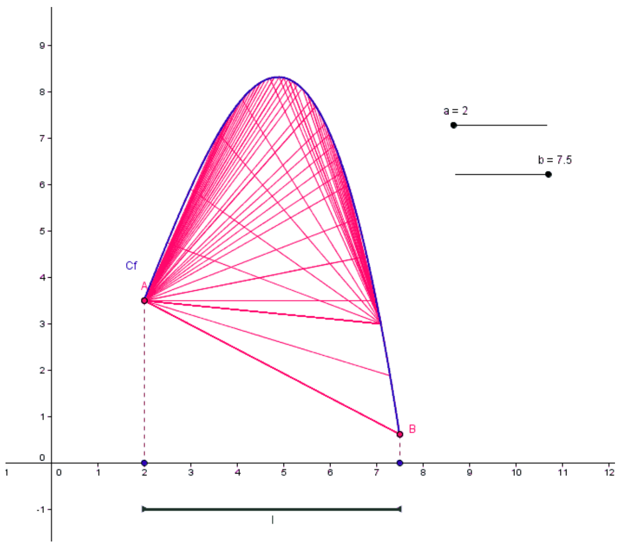
Intuitivement : lorsqu'une fonction est convexe sur un intervalle, sa courbe « est en creux » ou « en sourire ».

Définition 2 : Une fonction est **concave** sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses cordes.

Illustration ci-dessous : on a tracé la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle I :



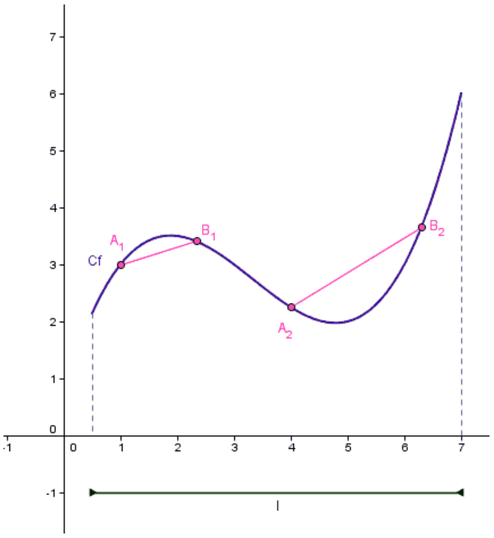
[AB] est une corde de Cf



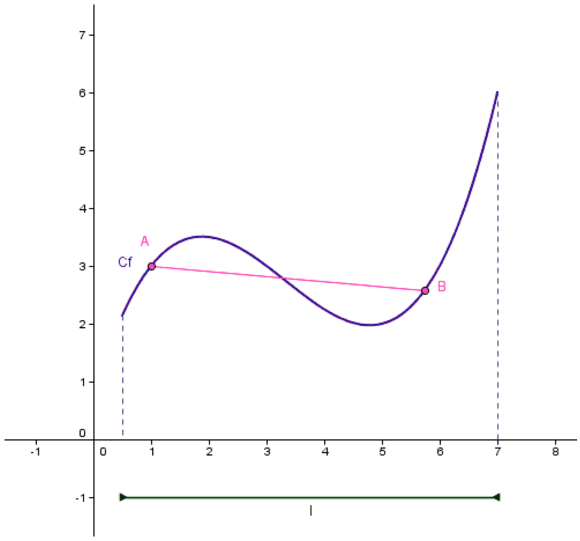
Cf est située au-dessus de chacune de ses cordes.

f est donc concave sur I. Intuitivement : lorsqu'une fonction est concave, sa courbe « forme une bosse ».

Dans l'exemple suivant, la fonction f représentée par la courbe C_f n'est ni convexe, ni concave sur I :



Certaines cordes sont situées au-dessus de la courbe, d'autres en-dessous.



Certaines cordes coupent la courbe.

II- Convexité des fonctions dérivables.

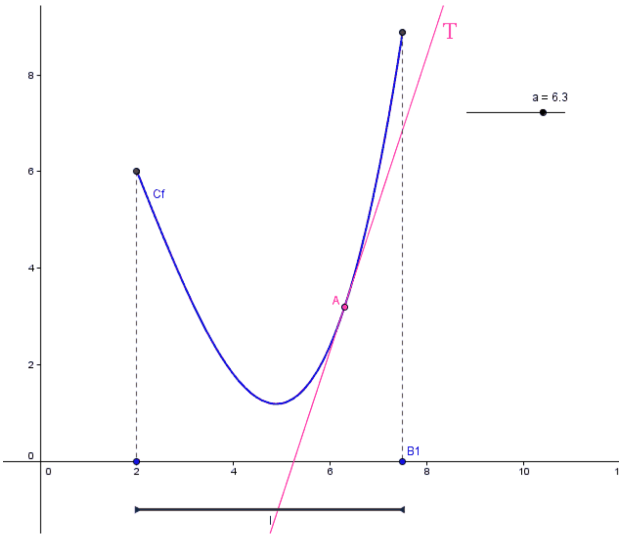
1) Position de la courbe par rapport à ses tangentes.

Propriété 1 : (admise)

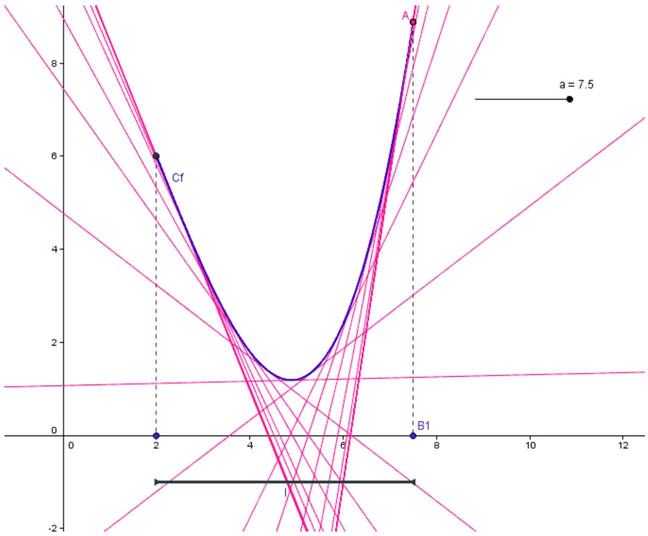
- Une fonction dérivable sur un intervalle I est **convexe** lorsque sa courbe est située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- Une fonction dérivable sur un intervalle I est **concave** lorsque sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

Remarque : on a besoin, dans cette propriété, que la fonction soit dérivable, pour que sa courbe admette une tangente en chacun de ses points.

Illustration avec une fonction convexe :

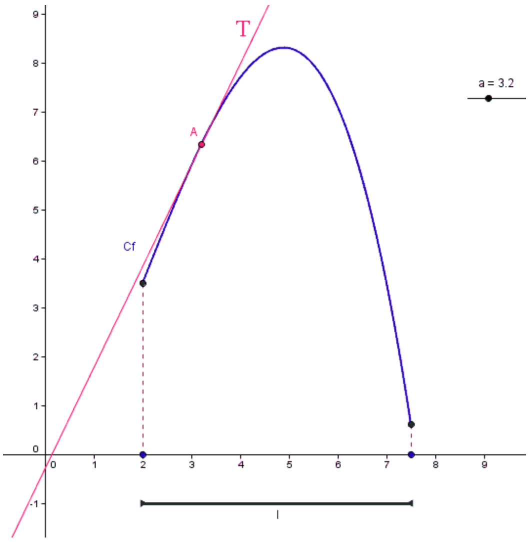


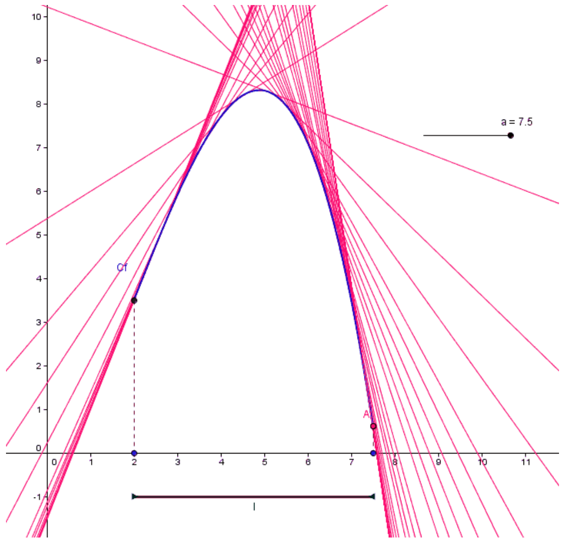
A est un point de Cf. La tangente à Cf en A est située en-dessous de Cf (Sauf en A où elles se coupent)



Cf est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

Illustration avec une fonction concave :

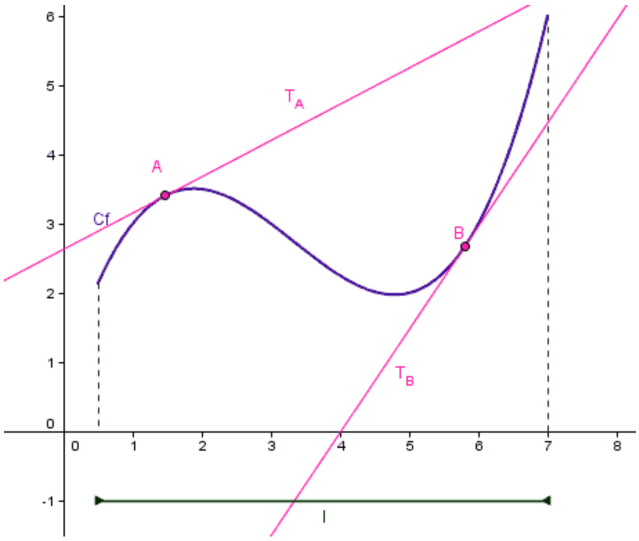


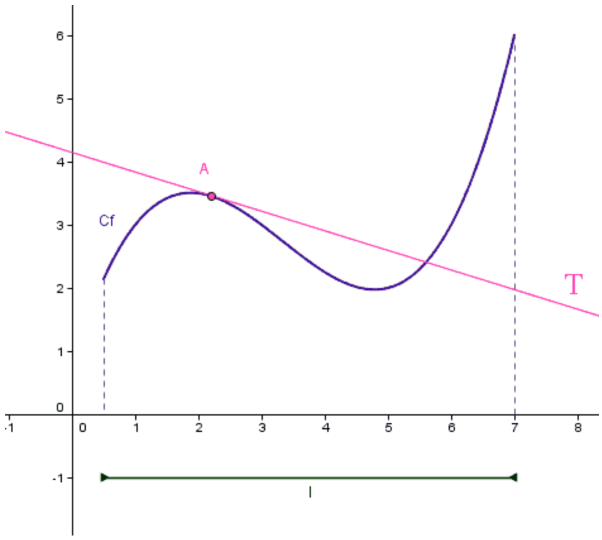


A est un point de Cf. La tangente à Cf en A est située au-dessus de Cf (Sauf en A où elles se coupent)

Cf est située en-dessous de chacune de ses tangentes.

Avec une fonction ni convexe, ni concave :





Certaines tangentes sont en-dessous de la courbe, d'autres au-dessus.

Certaines tangentes peuvent recouper la courbe.

2) Convexité et sens variation de la dérivée.

Propriété 2 : (admise) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est **convexe** si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I.
- f est **concave** si et seulement si sa dérivée f' est décroissante sur I.

On rappelle que $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse x. En reprenant les figures de la courbe de la fonction convexe avec des tangentes multiples et de celle de la fonction concave avec ses tangentes multiples, constatez graphiquement que lorsque x parcourt I dans le sens croissant, le coefficient directeur de la tangente augmente dans le cas de la fonction convexe, et diminue dans le cas de la fonction concave.

III- Convexité d'une fonction deux fois dérivables.

Définition 3 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, telle que sa dérivée f' soit elle aussi dérivable sur I. On dit que f est **deux fois dérivable** sur I. On note f'' (« f seconde ») la dérivée de f'. f'' est appelée la **dérivée seconde** de f.

Propriété 3 : (admise dans le sens ⇒) Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f sera convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout x ∈ I.
- f sera concave si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout x ∈ I.

Autrement dit :

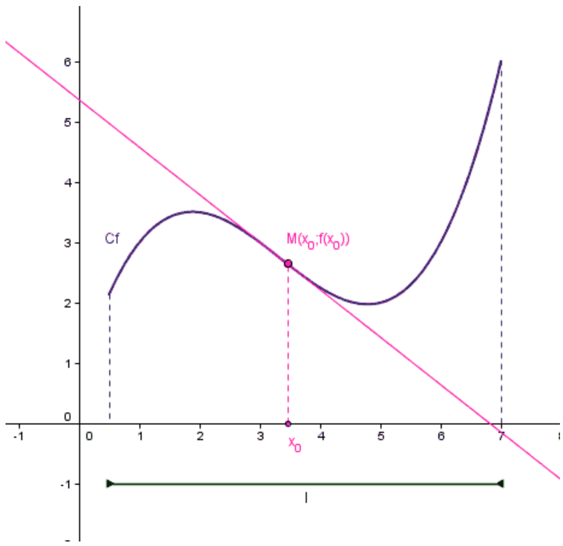
f sera convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive. (Ce qui implique que f' est croissante)
f sera concave si et seulement si sa dérivée seconde est négative. (Ce qui implique que f' est décroissante)

IV- Point d'inflexion.

Définition 4 : Un point d'inflexion d'une courbe est un point où la courbe est traversée par sa tangente.

Propriété 4 : (admise) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et Cf sa courbe représentative. Si M est un point d'inflexion de Cf, alors la convexité de Cf change en M.

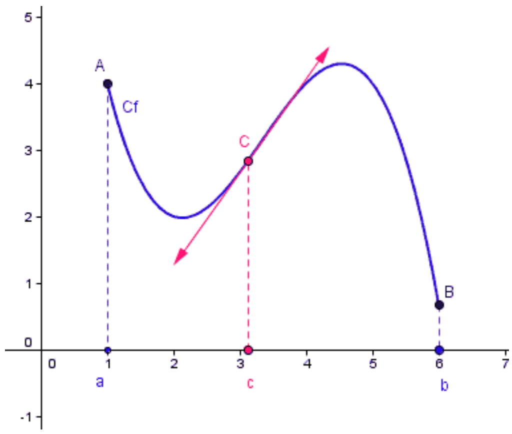
Propriété 5 : (admise) Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 ∈ I, alors $M(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de Cf.



Dans l'exemple illustré ci-contre, f' est décroissante sur $[0{,}5; x_0]$ et croissante sur $[x_0; 7]$.
$f''(x) < 0$ pour x ∈ $[0{,}5; x_0]$, $f''(x_0) = 0$ et $f''(x) > 0$ pour x ∈ $[x_0; 7]$.

Petit bilan sur un exemple :

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a; b]$ et Cf est sa courbe représentative.



x	a	c	b
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↗		↘
convexité de f	convexe ☺		concave ☹

Le point de Cf d'abscisse c est un point d'inflexion.

V- Propriétés des fonctions convexes.

Théorème 1 : Si f et g sont deux fonctions dérivables et convexes sur un intervalle I, et si λ est un réel strictement positif, alors :

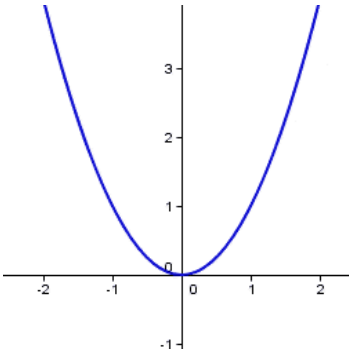
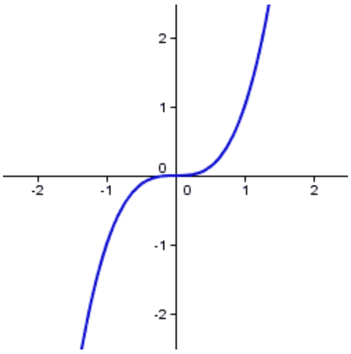
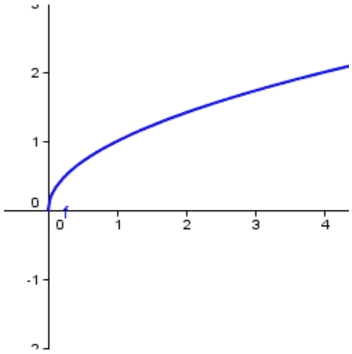
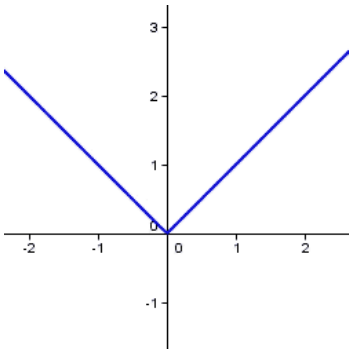
- $f + g$ est convexe sur I
- λf est convexe sur I.
- Si $\lambda < 0$, alors λf est concave sur I.

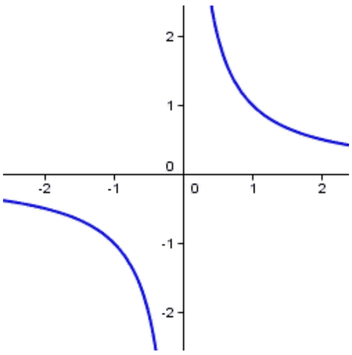
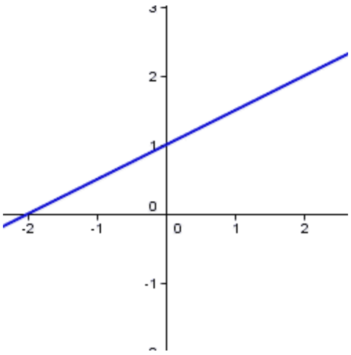
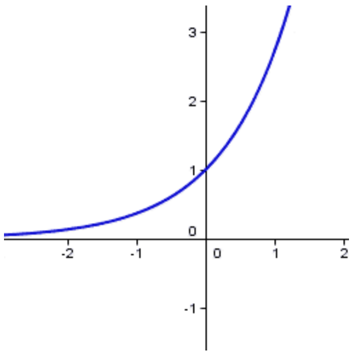
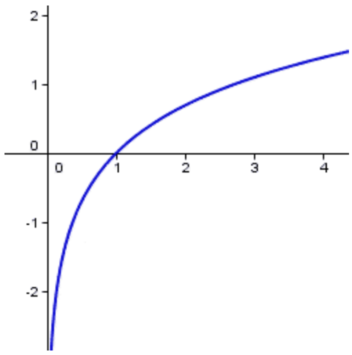
Théorème 2 : Si f et g sont deux fonctions dérivables et concaves sur un intervalle I, et si λ est un réel strictement positif, alors :
- $f+g$ est concave sur I
- λf est concave sur I.
- Si $\lambda<0$, alors λf est convexe sur I.

Idée de démonstration : Ces théorèmes se démontrent en étudiant les variations de la dérivée.

VI- Convexité des fonctions usuelles.

(Vous pouvez vous entraîner à le démontrer en dérivant deux fois ces fonctions et en étudiant le signe de leur dérivée seconde)

			
La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$	La fonction cube est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$ L'origine du repère est un point d'inflexion pour sa courbe.	La fonction racine carrée est concave sur $[0;+\infty[$	La fonction valeur absolue est convexe. On rappelle qu'elle n'est pas dérivable en O(0;0)

			
La fonction inverse est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$	Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$. Au sens large, tous les points de leurs courbes sont des points d'inflexion.	La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. (voir ultérieurement)	La fonction logarithme népérien est concave sur $]0;+\infty[$ (voir ultérieurement)