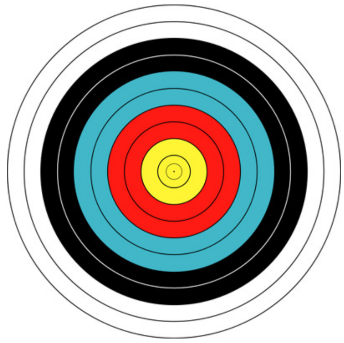
I- Loi à densité sur un intervalle.

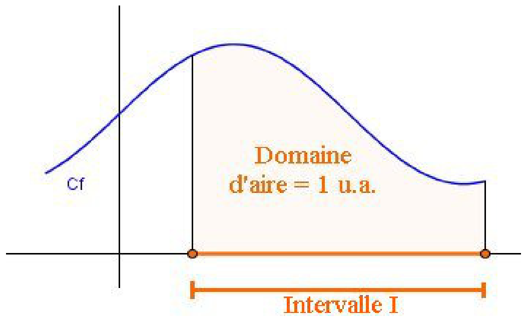


Contrairement à une **variable aléatoire discrète** qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, une **variable aléatoire continue** prend un nombre infini de valeurs dans un intervalle donné de $\mathbb{R}$.

Exemple de variable aléatoire continue : On lance une flèche sur une cible de rayon 1 mètre, et on mesure la distance d en mètres entre le point d'impact et le centre de la cible. Le réel d peut prendre une infinité de valeurs dans l'intervalle [0;1].

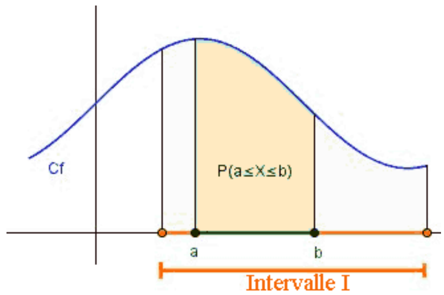
Définition 1 : On appelle **fonction de densité** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ une fonction f définie sur I telle que :

- f est continue sur I
- f est positive sur I. (c'est-à-dire : $\forall\ x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geqslant 0$)
- $\int_{\mathrm{I}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$



Définition 2 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I et f une fonction de densité sur I.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de densité f si pour tout intervalle [a;b] inclus dans I, la probabilité pour que X soit dans l'intervalle [a;b] est :

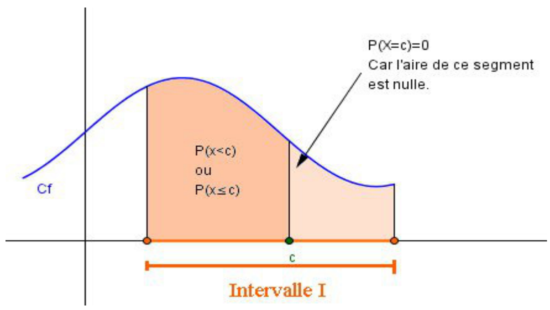
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Propriétés 1 : Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans I qui suit une loi de densité f.

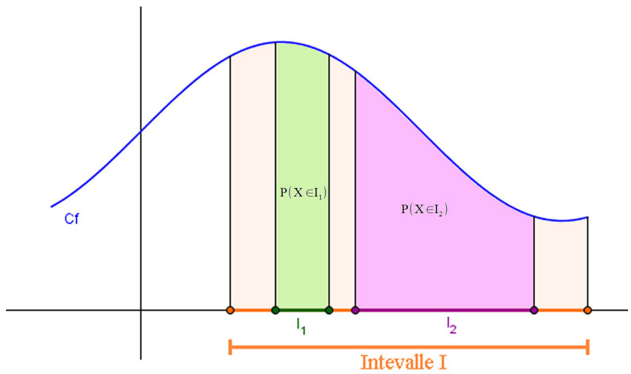
(1) $P(X \in \mathrm{I}) = 1$

(2) $\forall\ c \in \mathrm{I}$, $P(X = c) = 0$
$P(X \leqslant c) = P(X < c)$



(3) Si I_1 et I_2 sont deux intervalles disjoints inclus dans I, alors :

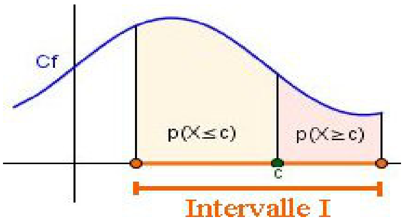
$$P(X \in \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2) = P(X \in \mathrm{I}_1) + P(X \in \mathrm{I}_2)$$



Remarque : c'est le même résultat qu'en probabilités discrètes : si A et B sont deux événements incompatibles ou disjoints (c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(4) Pour tout $c \in \mathrm{I}$, $\mathrm{P}(x \leqslant c) + \mathrm{P}(x \geqslant c) = 1$

(Correspond à la règle $\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1$ en probabilités discrètes)

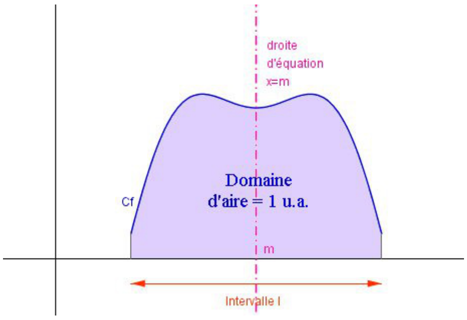


Définition 3 : Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I qui suit une loi de densité *f*.

On appelle **espérance mathématique de X** le nombre E(X)= $\int_{\mathrm{I}} x f(x) \mathrm{d}x$.

La notion d'espérance correspond à une moyenne des valeurs prises par X pour un grand nombre d'expériences aléatoires.

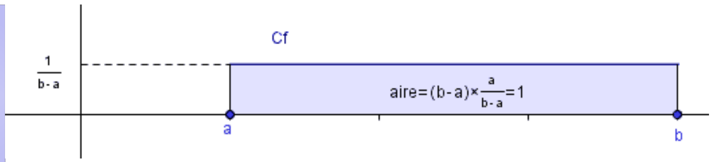
Remarque : si la courbe de la loi de densité admet un axe de symétrie vertical d'équation $x = m$, l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi de densité f est m.



II- Loi uniforme.

La loi uniforme modélise l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un réel au hasard dans un intervalle donné [a;b]. (Avec équiprobabilité du choix)

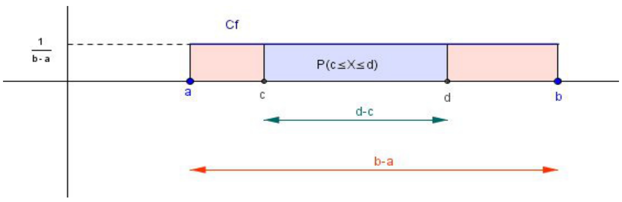
Définition 4 : On dit qu'une variable aléatoire X **suit la loi uniforme sur [a;b]** lorsqu'elle admet comme fonction de densité de probabilité la fonction constante f définie sur [a;b] par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$



Propriété 2 : Calculs de probabilités avec la loi uniforme :

Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme sur [a;b].
Alors, pour tout intervalle [c;d] inclus dans [a;b], on a :

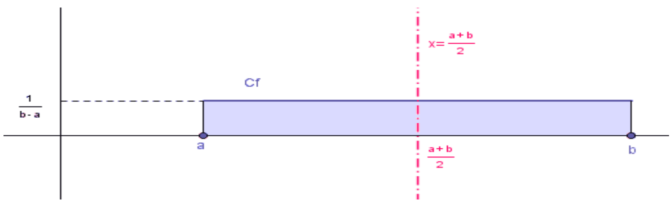
$$\mathrm{P}(c \leqslant \mathrm{X} \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$



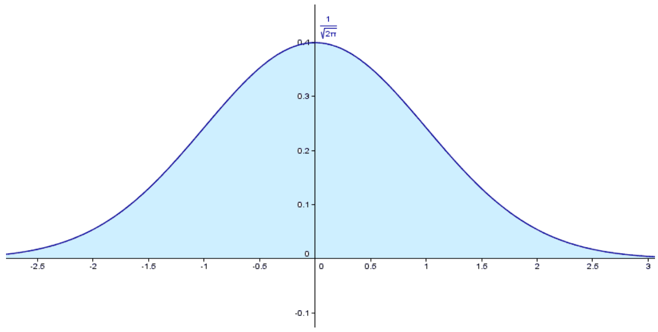
Propriété 3 : Espérance de la loi uniforme :

Si X suit la loi uniforme sur [a;b], alors

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{a+b}{2}$$



III- Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.



Définition 5 : On dit qu'**une variable aléatoire continue suit une loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0;1)$, lorsqu'elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

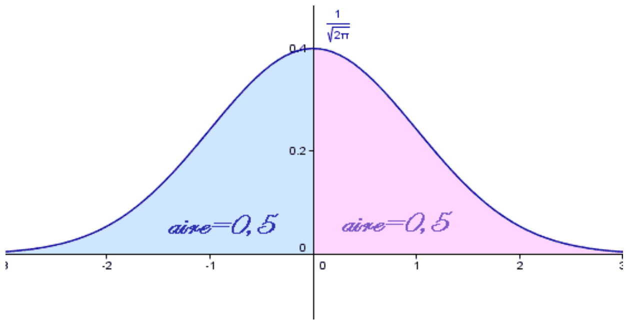
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Remarques : 1) la fonction f n'a pas de primitive explicite. On utilise la calculatrice pour calculer une aire sous cette courbe.

2) L'aire totale sous la courbe, pour x variant de $-\infty$ à $+\infty$, vaut 1, bien que la courbe ne coupe jamais l'axe des abscisses. Celui-ci est asymptote horizontale à la courbe.

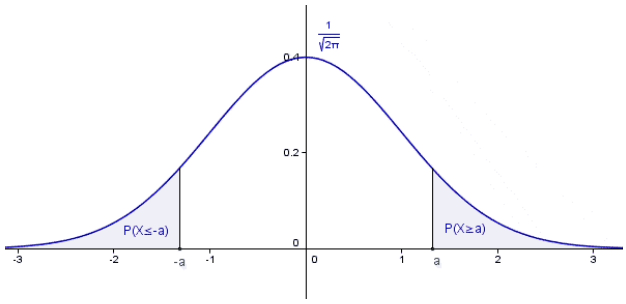
Propriétés 4 : Propriétés de la loi normale centrée réduite.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Alors :



(1) $P(X\in\mathbb{R})=1$ (l'aire sous la courbe vaut 1)

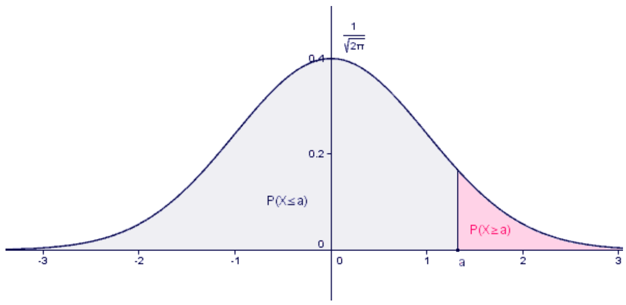
(2) $P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 0)=0{,}5$
(par symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées)



(3) Pour tout réel a,

$P(X\leqslant -a)=P(X\geqslant a)$

(par symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées)



(4) $P(X\geqslant a)=1-P(X\leqslant a)$

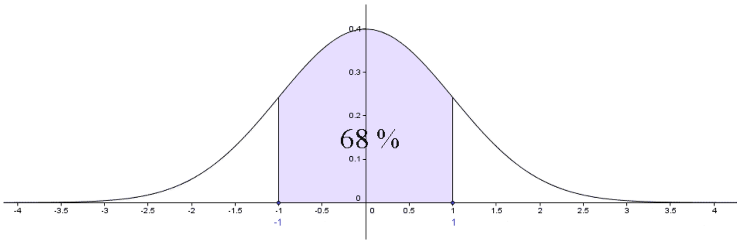
(Déja vu en propriété 1-(4) car ce résultat est valable quelle que soit la fonction de densité.
En discret : $P(\overline{A})=1-P(A)$)

(5) $E(X)=0$, l'espérance de X est nulle, c'est pourquoi on dit que cette loi est « centrée ».

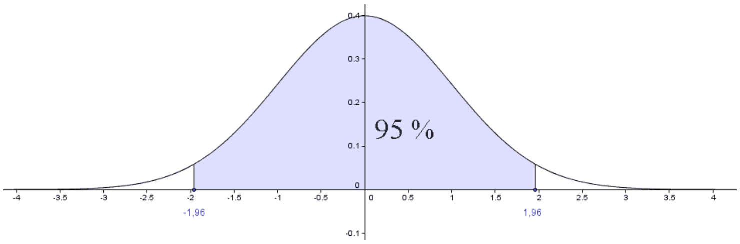
(6) $\sigma(X)=1$, l'écart-type de X vaut 1, c'est pourquoi on dit que cette loi est « réduite ».

Propriétés 5 : Valeur particulières à connaître pour les utiliser dans les exercices.

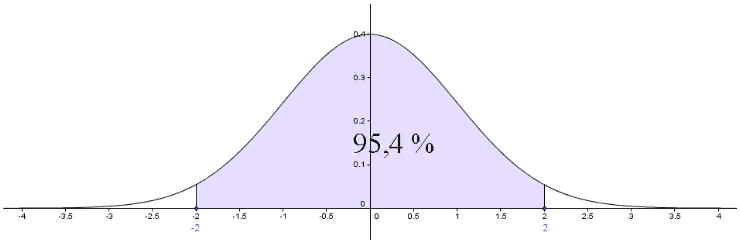
Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.



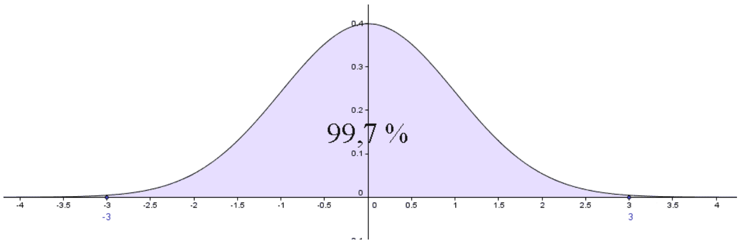
- $P(-\sigma \leqslant X \leqslant \sigma) = P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0{,}68$



- $P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$



- $P(-2\sigma \leqslant X \leqslant 2\sigma) = P(-2 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0{,}954$



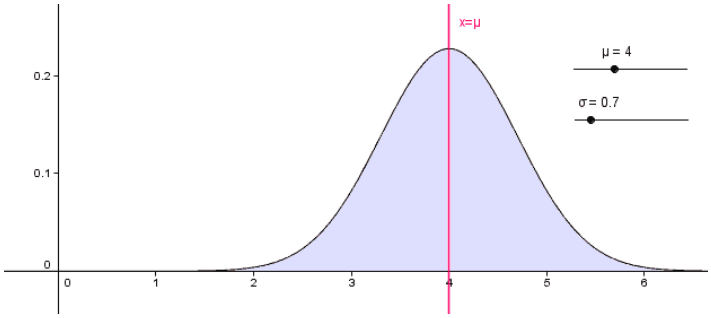
- $P(-3\sigma \leqslant X \leqslant 3\sigma) = P(-3 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0{,}997$

La calculatrice et le tableur savent faire afficher $P(c \leqslant X \leqslant d)$ pour deux réels c et d donnés, tels que $c < d$.

Pour le modèle récent de calculatrice CASIO, si on veut faire afficher par exemple $P(-3 \leqslant X \leqslant 2)$,
on tape :NormCD(-3,2,1,0) car $c=-3$, $d=2$, $\sigma=1$ et $\mu=0$.
Vérifiez que vous trouvez $P(-3 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0{,}98759$, puis vérifiez les résultats de la propriété 5.

IV- Loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ

Définition 6 : On dit qu'**une variable aléatoire** X **suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ**, notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, si la variable aléatoire $Y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.



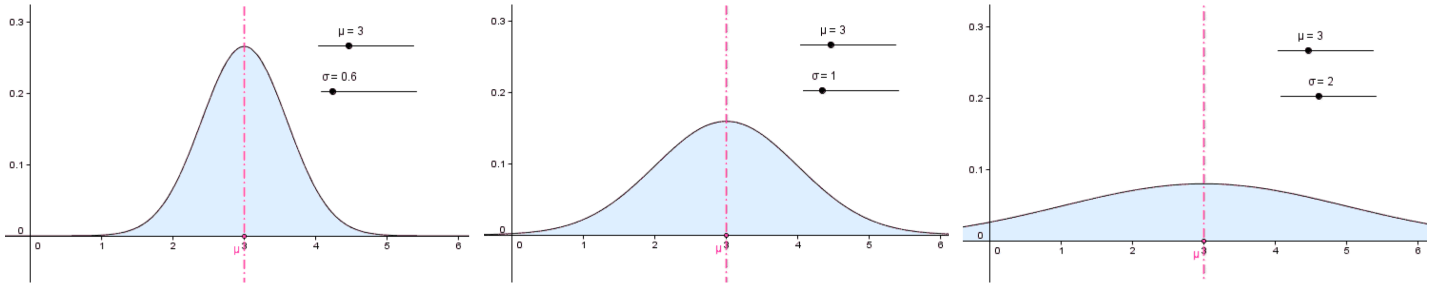
Remarques : 1) La fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, est $x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. Elle n'a pas de primitive explicite.

2) L'aire sous la courbe représentative de cette fonction, pour x variant de $-\infty$ à $+\infty$, vaut 1.
3) La courbe représentative de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation x=μ.

Propriétés 6 : Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, alors :

- Son espérance E(X)=μ
- Son écart-type σ(X)=σ
- Sa variance $V(X)=\sigma^2$

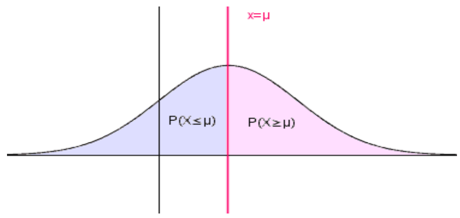
Interprétation de l'écart-type : L'écart-type est un critère de dispersion. Plus l'écart-type σ est grand, plus les valeurs de X sont dispersées autour de l'espérance μ.



En gros : diminuer σ « réhausse » la courbe et rassemble l'aire sous la courbe autour de l'axe d'équation $x=\mu$. augmenter σ « aplatit » la courbe, mais l'aire « sous la courbe » reste toujours 1 u.a. !

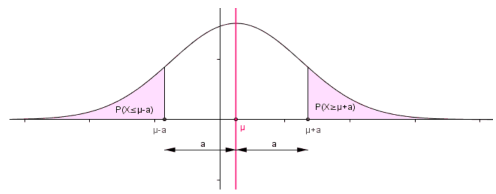
Faire varier μ sans faire varier σ consisterait à déplacer la courbe par une translation horizontale.

Propriétés 7 : Si X suit une loi normale $\mathscr{N}(\mu;\sigma)$, alors :



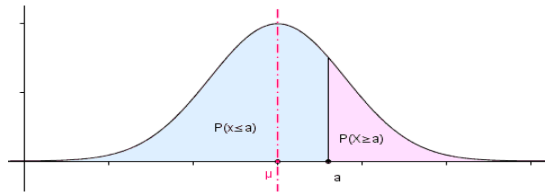
- $P(X \in \mathbb{R})=1$ (car l'aire sous la courbe vaut 1)
- $P(X \leqslant \mu)=P(X \geqslant \mu)=0{,}5$

(par symétrie de la courbe par rapport à l'axe d'équation $x=\mu$)



- $P(X \leqslant \mu - a)=P(X \geqslant \mu + a)$

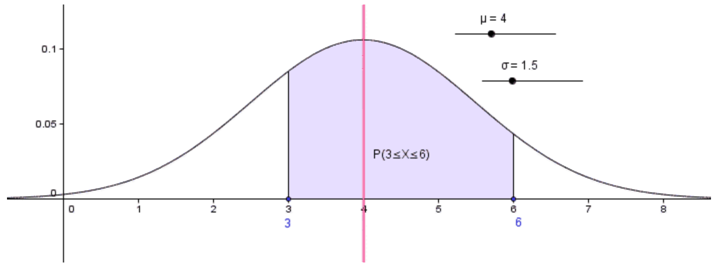
(par symétrie de la courbe par rapport à l'axe d'équation $x=\mu$)



- $P(X \geqslant a)=1-P(X \leqslant a)$

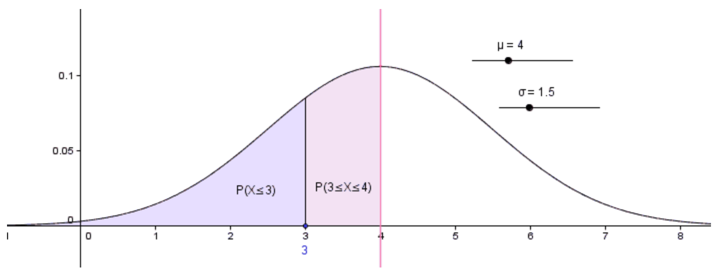
(Déja vu en propriété 1-(4) car ce résultat est valable quelle que soit la fonction de densité)

En pratique : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathscr{N}(4;1{,}5)$.
On veut connaître les valeurs de $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$, de $P(X \leqslant 3)$, de $P(X \geqslant 3)$, de $P(X \leqslant 6)$ et de $P(X \geqslant 6)$.



$P(3 \leqslant X \leqslant 6)$ nous est donné par la commande :
NormCD(3,6,1.5,4).

$P(3 \leqslant X \leqslant 6) \approx 0{,}656$.

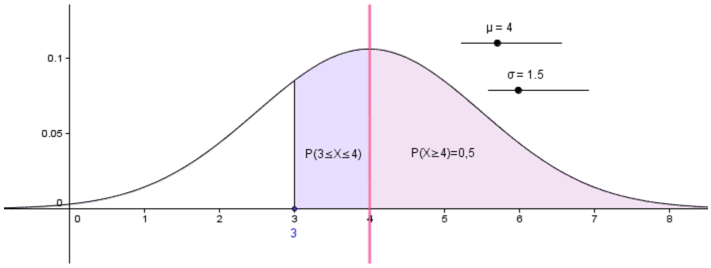


3<μ car $\mu=4$, donc
$P(X \leqslant 3)=P(X \leqslant \mu)-P(3 \leqslant X \leqslant \mu)$, soit
$P(X \leqslant 3)=0{,}5-P(3 \leqslant X \leqslant 4)$
Comme $P(3 \leqslant X \leqslant 4) \approx 0{,}2475$ d'après la calculatrice,
$P(X \leqslant 3) \approx 0{,}5-0{,}2475=0{,}2525$

(On doit pouvoir taper *0,5–NormCD(3,4,1.5,4)* sur les nouvelles CASIO pour avoir directement le résultat. moi, je n'ai qu'une ancienne casio et cette commande n'est pas accessible dans le Menu RUN)

$3<\mu$ car $\mu=4$, donc
$P(X\geqslant 3)=P(3\leqslant X\leqslant \mu)+P(X\geqslant \mu)$
$P(X\geqslant 3)=P(3\leqslant X\leqslant 4)+0{,}5$
Donc $P(X\geqslant 3)\approx 0{,}2475+0{,}5=0{,}7475$

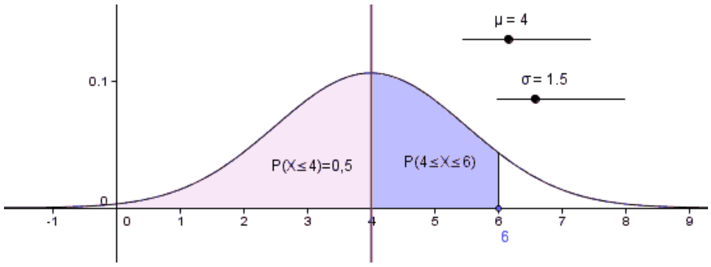
On peut aussi calculer : $P(X\geqslant 3)=1-P(X\leqslant 3)$ [1]



$6>\mu$, donc $P(X\leqslant 6)=P(X\leqslant 4)+P(4\leqslant X\leqslant 6)$
$P(X\leqslant 6)=0{,}5+P(4\leqslant X\leqslant 6)$

La commande NormCD(4,6,1.5,4) nous donne :
$P(4\leqslant X\leqslant 6)\approx 0{,}4088$

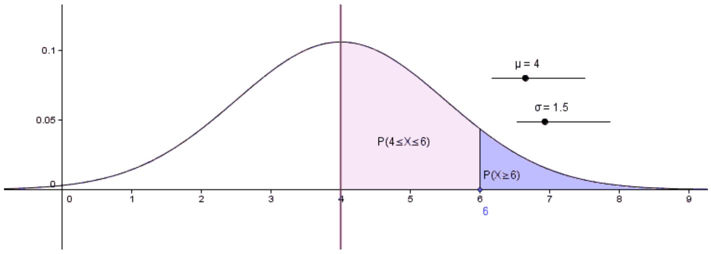
Donc $P(X\leqslant 6)\approx 0{,}5+0{,}4088=0{,}9088$



$6>\mu$ car $\mu=4$, donc

$P(X\geqslant 6)=P(X\geqslant \mu)-P(\mu\leqslant X\leqslant 6)$
$P(X\geqslant 6)=0{,}5-P(4\leqslant X\leqslant 6)$
$P(X\geqslant 6)\approx 0{,}5-0{,}4088=0{,}0912$

On peut aussi calculer : $P(X\geqslant 6)=1-P(X\leqslant 6)$

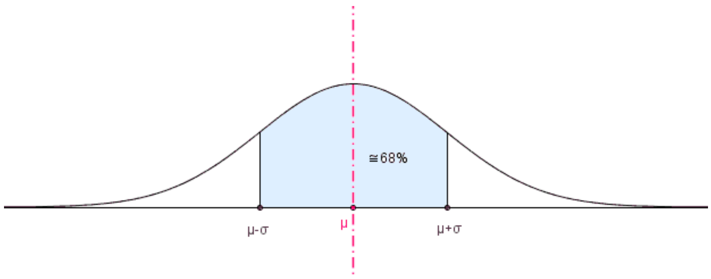


Intérêt de la loi normale : on retrouve la loi normale dans un très grand nombre de distributions dans la nature, dans l'industrie, en économie, en médecine ou dans les sciences sociales, car beaucoup de phénomènes naturels, industriels, physiologiques ou sociaux résultent d'un grand nombre de causes de fluctuations indépendantes. En effet, lorsqu'on fait la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes de lois quelconques, cette somme suit la loi normale. C'est le cas de la taille ou du poids d'un individu en fonction de son âge, que l'on retrouve dans les carnets de santé par exemple.

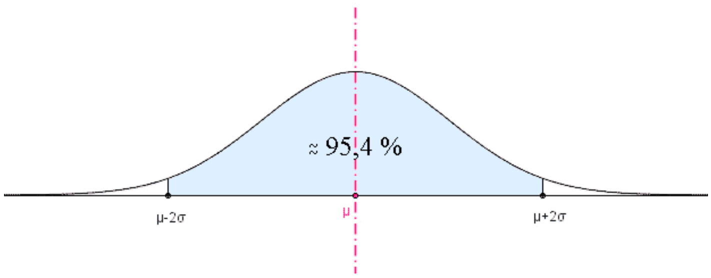
Propriété 8 : Résultats à connaître concernant la loi normale :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Alors :

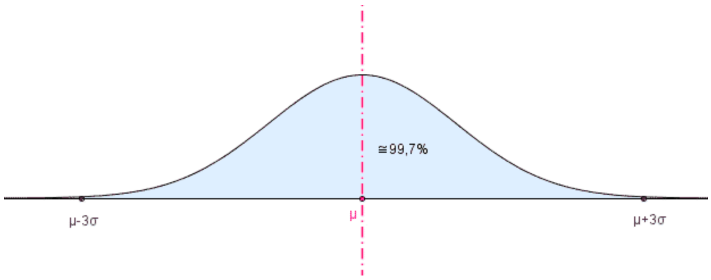
- $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant \mu+\sigma)\approx 0{,}68$



- $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant \mu+2\sigma)\approx 0{,}954$



- $P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant \mu+3\sigma)\approx 0{,}997$



1 Mais là, j'ai procédé comme si on n'avait pas préalablement le résultat de $P(X\leqslant 3)$