Problème d'étude de fonctions du Bac Blanc du 12 avril 2013.

Énoncé :

Partie A :

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x)=e^{x-1}+x-1$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;I,J)$ d'unité graphique 1 cm.

1) a) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
c) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
d) Étudier la convexité de f. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle un point d'inflexion ? Justifiez.

2) a) Montrer que sur l'intervalle $[0;1]$, l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α.
b) Donner une valeur arrondie au centième de α.
c) Préciser le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère (O;I,J).

4) Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Résoudre l'équation suivante : $3\ln x+6\leqslant 0$.

Corrigé :

Partie A :

1) a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x-1}+x-1$.
$f(x)$ est de la forme $e^{u(x)}+x-1$ avec $u(x)=x-1$ et $u'(x)=1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}+1$, soit $f'(x)=1\times e^{x-1}+1$, soit
$\boxed{f'(x)=e^{x-1}+1}$.

Pour tout réel X, $e^X>0$, donc pour tout réel x, $e^{x-1}>0$, donc pour tout réel x, $e^{x-1}+1>1$, donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)>0$

1) b)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f		$\nearrow$	

1) c) $f(1)=e^{1-1}+1-1=e^0=1$ Ceci est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.
$f'(1)=e^{1-1}+1=e^0+1=2$ Ceci est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son points d'abscisse 1 est $y=f'(1)(x-1)+f(1)$
Soit $y=2(x-1)+1 \Leftrightarrow y=2x-2+1 \Leftrightarrow \boxed{y=2x-1}$.

Si on ne connaît pas par cœur la formule de l'équation de la tangente, on procède comme suit :

Nommons (T) la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.
A a pour coordonnées (1;1) puisque $f(1)=1$.
(T) a pour coefficient directeur 2, puisque $f'(1)=2$, donc son équation réduite est de la forme $y=2x+p$.
Comme A(1;1) ∈ (T), les coordonnées de A vérifient l'équation de (T), à savoir : $y_A=2x_A+p$, ou encore $1=2\times1+p \Leftrightarrow 1=2+p \Leftrightarrow -1=p \Leftrightarrow p=-1$.

L'équation réduite de (T) est donc $\boxed{y=2x-1}$.

1) d) Pour étudier la convexité de f, on étudie le signe de sa dérivée seconde f''.
f' est dérivable sur ℝ et, pour tout x de ℝ, $f''(x)=e^{x-1}$.

(En effet, on a déjà vu au 1)a) que x $\mapsto$ e^{x-1} a pour dérivée x $\mapsto$ e^{x-1}, et comme 1 a pour dérivée 0, on obtient bien cette expression pour $f''(x)$)

Pour tout X ∈ ℝ, $e^X>0$, donc pour tout x ∈ ℝ, $e^{x-1}>0$. f'' est donc strictement positive sur ℝ, donc f est convexe sur ℝ.

<u>Remarque</u> : l'énoncé aurait pu demander la position relative entre la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente (T). Comme f est convexe, sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes. On aurait répondu que $\mathscr{C}$ était située au-dessus de (T), $\mathscr{C}$ et (T) ayant un seul point commun : A.

2) a) $f(0)=e^{0-1}+0-1=\frac{1}{e}-1$. Comme $e>2$, $\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{e}-1<\frac{1}{2}-1$, soit $f(0)<-\frac{1}{2}$.
On a vu par ailleurs que $f(1)=1$.

On a donc :
- $f(0)<0$ et $f(1)>0$
- f est continue car dérivable sur [0;1] (puisqu'elle l'est sur ℝ)
- f est strictement croissante sur [0;1] (puisqu'elle l'est sur ℝ)

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur [0;1].

<u>Remarque</u>: d'après les variations de f, cette solution est même unique sur ℝ.

2) b) On utilise la fonction TABLE de la calculatrice pour effectuer des balayages de l'intervalle [0;1].

Premier balayage (de pas 0,1) : On trouve $f(0{,}4)<0$ et $f(0{,}5)>0$.
Deuxième balayage (entre 0,4 et 0,5 de pas 0,01) : on trouve : $f(0{,}43)<0$ et $f(0{,}44)>0$,
Troisième balayage (entre 0,43 et 0,44 de pas 0,001) : on trouve $f(0{,}432)<0$ et $f(0{,}433)>0$.

Une valeur arrondie au centième de α est donc $\boxed{\alpha\approx0{,}43}$.

2) c) Comme f est strictement croissante sur ℝ, on a :
- $f(x)=0 \Leftrightarrow$ x=α
- $f(x)<0 \Leftrightarrow x<\alpha$
- $f(x)>0 \Leftrightarrow x>\alpha$

Ce qu'on peut résumer dans un tableau de signes :

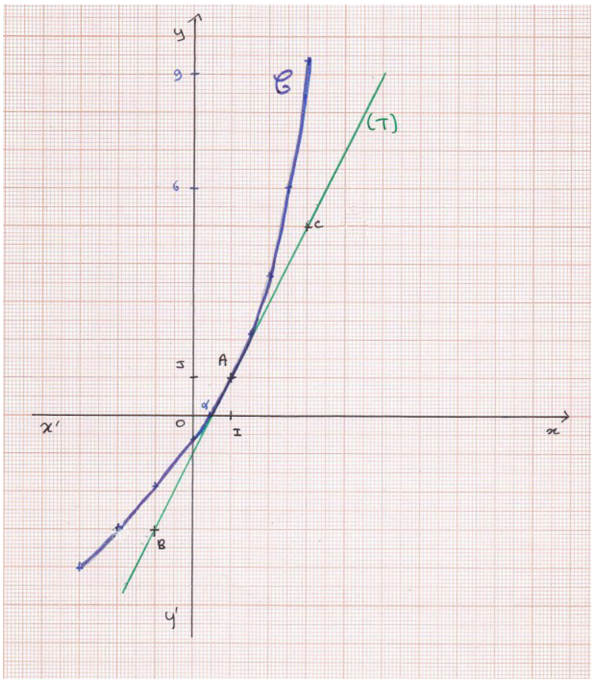
x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

3) Pour le tracé de la courbe, on peut s'aider en traçant d'abord la tangente (T), dont on peut déterminer deux points autres que A : (On rappelle que (T) a pour équation réduite $y=2x-1$)

B d'abscisse -1 : $2\times(-1)-1=-3$, donc $B(-1;-3)$.
C d'abscisse 3 : $2\times3-1=6-1=5$. Donc $C(3;5)$.

Pour le tracé de $\mathscr{C}$, on utilise les éléments que nous avons étudié, et on établit un tableau de valeurs (arrondies à 10^{-2} près ici) : (On essaie de choisir judicieusement les abscisses en fonction de l'allure de la courbe donnée par la calculatrice)

x	-3	-2	-1	0	$\alpha\approx0{,}43$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$f(x)$	$-3{,}98$	$-2{,}95$	$-1{,}86$	$-0{,}63$	0	1	$2{,}15$	$3{,}71$	$5{,}98$	$9{,}39$



4) On a vu que la fonction $x \longmapsto e^{x-1}$ restait la même quand on la dérive. L'une de ses primitives est donc elle-même.

Primitivons maintenant la fonction $x \longmapsto x+1$.

On sait qu'une primitive de $x \longmapsto x$ est $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$

et qu'une primitive de $x \longmapsto 1$ est $x \longmapsto x$.

Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=e^{x-1}+\dfrac{x^2}{2}-x$.

<u>Remarque</u> : l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions $F_k : x \longmapsto e^{x-1}+\dfrac{x^2}{2}-x+k$, où k est un réel constant.

Partie B

<u>Remarque personnelle</u> : elle n'a aucun rapport avec la partie A. Pourquoi ne pas en faire un exercice à part ?

L'inéquation $3\ln x+6\leqslant0$ est définie sur $]0;+\infty[$, puisque la fonction logarithme népérien n'est définie que sur cet intervalle.

On nomme (I) cette inéquation et on la résout dans $]0;+\infty[$:

(I) $\Leftrightarrow$ $3\ln x\leqslant-6$ $\Leftrightarrow$ $\ln x\leqslant-2$ $\Leftrightarrow$ $e^{\ln x}\leqslant e^{-2}$ (on peut composer les deux membres par la fonction exponentielle sans changer le sens du $\leqslant$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

(I) $\Leftrightarrow$ $x\leqslant e^{-2}$. Comme on résout dans $]0;+\infty[$, $\boxed{S=]0;e^{-2}]}$.