Au premier janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2005 :
- Le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5 %, du fait des naissances et des décès.
- du fait des mouvements migratoires, 4000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Partie A : étude théorique.

Pour tout entier n, on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au premier janvier de l'année $2005+n$.
Ainsi, $u_0=100\,000$.

1) Calculer u_1 et u_2 .
2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}05\,u_n+4\,000$.
3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n+80\,000$.
   a) Calculer v_0 .
   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que $u_n=180\,000\times(1{,}05)^n-80\,000$
   d) Calculer la limite de la suite (u_n)

Partie B : le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la partie A.

1) Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?
2) À partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

Corrigé commenté.

Partie A : 1) $u_1=u_0\times1{,}05+4\,000=100\,000\times1{,}05+4\,000$ $\quad\boxed{u_1=109\,000}$

$u_2=u_1\times1{,}05+4\,000=109\,000\times1{,}05+4\,000$ $\quad\boxed{u_2=118\,450}$

2) Chaque année à partir de 2005, donc pour tout entier *n*, la population est multipliée par 1,05, puisque l'effet des décès et des naissances l'augmente de 5 % (et augmenter une valeur de 5 %, c'est la multiplier par $1+5\,\%=1+0{,}05=1{,}05$) et on ajoute 4 000 habitants.

Donc si, en $2005+n$, la population est de u_n habitants, on calculera $\boxed{u_{n+1}}$, la population en $2005+n+1$, à l'aide de l'expression $u_n\times1{,}05+4\,000$, soit $\boxed{1{,}05\,u_n+4000}$.

3) a) $v_0=u_0+80\,000=100\,000+80\,000$ donc $\boxed{v_0=180\,000}$.

b) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n+80\,000$, donc $\boxed{v_{n+1}=u_{n+1}+80\,000}$.

Dans cette expression, on remplace u_{n+1} par son expression en fonction de u_n , soit $1{,}05\,u_n+4\,000$:

On obtient : Pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=1{,}05u_n+4\,000+80\,000$, soit $\boxed{v_{n+1}=1{,}05u_n+84\,000}$.

On factorise cette nouvelle expression par 1,05 : (on divise 84 000 par 1,05 pour le décomposer en un produit)
Pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=1{,}05u_n+1{,}05\times 80\,000$ donc $\boxed{v_{n+1}=1{,}05\times(u_n+80\,000)}$
Dans cette dernière expression, on reconnaît $u_n+80\,000$ qui est égal à v_n . On le remplace donc par v_n .
On obtient : pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_{n+1}=1{,}05\,v_n}$.

On a une relation du type : « Pour tout n, $v_{n+1}=q\times v_n$. ». Cela prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison q.

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 1,05. Son premier terme est $\boxed{v_0=180\,000}$.

c) Comme (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de terme initial $v_0=180\,000$, pour tout n ∈ ℕ, on a : $v_n=v_0\times 1{,}05^n$ soit $\boxed{v_n=180\,000\times 1{,}05^n}$.

Comme pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n+80\,000$, pour tout n ∈ ℕ, $u_n=v_n-80\,000$.
Comme $v_n=180\,000\times 1{,}05^n$, pour tout n ∈ ℕ, on a : $\boxed{u_n=180\,000\times 1{,}05^n-80\,000}$.

d) Comme $1{,}05>1$, la suite $(1{,}05^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(1{,}05)^n=+\infty}$.

Comme $180\,000>0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(1{,}05)^n=+\infty$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}180\,000\times 1{,}05^n=+\infty}$.

(Les propriétés qui servent à calculer cette limite et la suivante ne figure pas dans le cours de votre professeur tel que je l'ai récupéré – ça a peut-être été ajouté par la suite -, mais elle figure dans celui que je vous ai fait : elle fait partie des propriétés sur les limites, paragraphe IV-1)

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}180\,000\times 1{,}05^n=+\infty$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}180\,000\times 1{,}05^n-80\,000=+\infty}$.
Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$.

(Ceci signifie que pour toute valeur A choisie aussi grande qu'on le désire, il existera un rang n_0 à partir duquel tous les u_n seront supérieurs à A. Dans la partie B, il nous faudra trouver le rang n_0 à partir duquel tous les u_n seront supérieurs à 200 000.)

Partie B – 1) $2020=2005+15$. Le nombre d'habitants de la ville en 2020 sera u_{15} .
$u_{15}=180\,000\times 1{,}05^{15}-80\,000$ $\boxed{u_{15}\approx 294\,207}$.

2) Pour trouver le rang n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n\geqslant 200\,000$, on fait faire un tableau de valeurs à la calculatrice (on sait qu'on n'a pas besoin de calculer les u_n pour $n\geqslant 15$ d'après le résultat de la question précédente, qui est déjà supérieur à 200 000).

On trouve $u_9\approx 199\,239$ et $u_{10}\approx 213\,201$. Donc le rang n_0 cherché est 10. $2005+10=2015$.

C'est à partir de l'année 2015 que la population de cette ville dépassera 200 000 habitants, si la situation réelle correspond bien à l'étude théorique.

Remarque : en toute rigueur, il aurait fallu prouver préalablement que la suite (u_n) est croissante pour être sûr que pour tout $n\geqslant 10$, $u_n\geqslant 200\,000$.