

Problème sur les suites du Bac ES Nouvelle Calédonie de décembre 1998

Énoncé :

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80 %, ainsi que l'apparition de 4000 nouveaux abonnés.
L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre des abonnés, en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans.

Les questions 2 et 3 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On note a_n le nombre d'abonnés à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année et on précise que $a_0=7000$.

- 1) Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n , on a $a_{n+1}=0,8a_n+4000$.
- 2) L'objet de cette question est l'étude graphique de la suite (a_n) .

On considère un repère orthonormal (unité graphique : 0,5 cm représente 1000 abonnés)

a) Tracer dans ce repère la droite (D) d'équation $y=0,8x+4000$ et la droite (Δ) d'équation $y=x$, pour les abscisses comprises entre 0 et 25 000.

b) Placer a_0 sur l'axe des abscisses. Utiliser les droites précédentes pour placer sur l'axe des abscisses les valeurs a_1 , a_2 et a_3 .

c) Si l'on poursuit le processus graphique précédent, quelle limite peut-on présumer pour la suite (a_n) ?

3) L'objet de cette question est l'étude de la suite (a_n) .

Soit (U_n) la suite définie par $U_n=20000-a_n$ pour tout nombre entier naturel n .

a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Soit n un entier naturel ; exprimer U_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $a_n=20000-13000\times 0,8^n$

c) En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n) .

d) Après combien d'années le nombre d'abonnés dépassera-t-il 16000 ?



Corrigé :

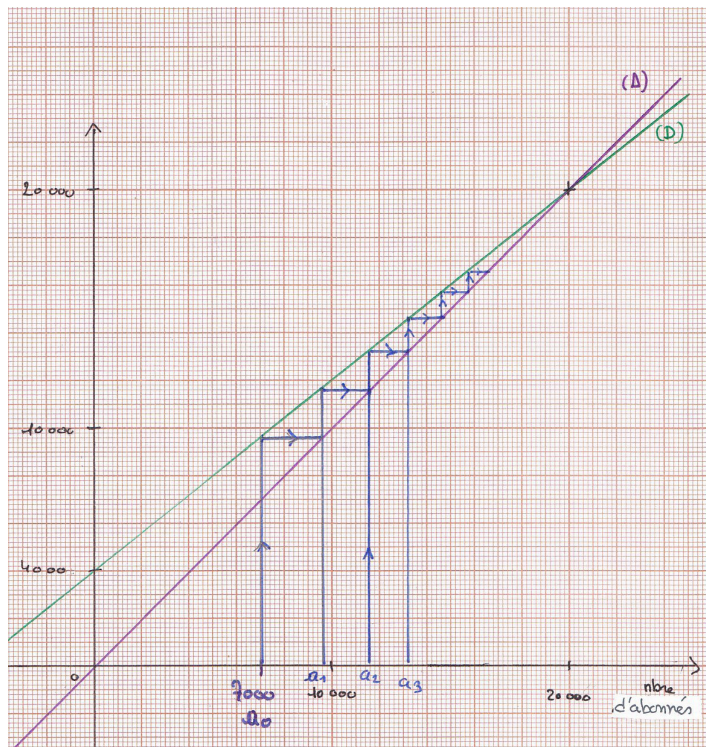
1) Le nombre d'abonnés la $n^{\text{ième}}$ année est a_n . Pour calculer le nombre d'abonnés a_{n+1} de l'année suivante, on multiplie a_n par 0,8 (car 80% des abonnés se réabonnent), ce qui donne un total de $0,8a_n$ abonnés, auquel on ajoute 4 000 nouveaux abonnés. C'est pourquoi, pour tout entier n , on a $a_{n+1} = 0,8a_n + 4000$.

2) a) Pour tracer la droite (D) d'équation $y = 0,8x + 4000$, on détermine les coordonnées de deux points (au moins) de cette droite qui nous permettront de la placer dans le repère.

Si $x = 0$, $0,8x + 4000 = 0,8 \times 0 + 4000 = 4000$.
Donc le point de coordonnées (0;4000) appartient à (D).

Si $x = 20000$, $0,8x + 4000 = 0,8 \times 20000 + 4000$
 $0,8x + 4000 = 16000 + 4000 = 20000$
Donc le point de coordonnées (20 000;20 000) appartient à (D).

Pour tracer (Δ), c'est simple car cette droite passe par tous les points dont l'ordonnée est égale à l'abscisse. Elle passe par exemple par les points de coordonnées (0;0) (l'origine de repère) et (20 000;20 000).



2) c) D'après le graphique, les points de (D) et de (Δ) d'abscisses a_n semblent se rapprocher du point de coordonnées (20 000;20 000). On conjecture donc que la suite (a_n) converge vers 20 000. Nous le vérifierons par le calcul à la question 3.

3) a) Rappel des données : pour tout n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 4000$ et $U_n = 20000 - a_n$.

$$\begin{aligned} \text{Donc pour tout entier } n, \quad U_{n+1} &= 20000 - a_{n+1} \text{ (d'après la formule encadrée en vert)} \\ U_{n+1} &= 20000 - (0,8a_n + 4000) \text{ (d'après la formule encadrée en bleu)} \\ U_{n+1} &= 20000 - 0,8a_n - 4000 \\ U_{n+1} &= 16000 - 0,8a_n \\ U_{n+1} &= 0,8 \times 20000 - 0,8a_n \\ U_{n+1} &= 0,8(20000 - a_n) \end{aligned}$$

Donc, d'après la formule encadrée en vert, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,8U_n$.

(U_n) est donc une suite géométrique de raison 0,8.

Son premier terme est $U_0 = 20000 - a_0 = 20000 - 7000 = 13000$.

3) b) Comme (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 13000$ et de raison 0,8, pour tout entier naturel n , on a $U_n = U_0 \times 0,8^n$, soit $U_n = 13000 \times 0,8^n$.

3) c) Pour tout entier naturel n , $U_n = 20000 - a_n \Leftrightarrow a_n + U_n = 20000 \Leftrightarrow a_n = 20000 - U_n$.

Et comme, pour tout entier naturel n , $U_n = 13000 \times 0,8^n$, $a_n = 20000 - 13000 \times 0,8^n$.

3) d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -13000 \times 0,8^n = -13000 \times 0 = 0$,
donc $\lim_{x \rightarrow n} 20000 - 13000 \times 0,8^n = 20000 - 0 = 20000$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20000$.

3) e) On veut savoir dans combien d'années le nombre d'abonnés dépassera 16000, donc on cherche les valeurs de n telles que $u_n > 16000$.

$$u_n > 16000 \Leftrightarrow 20000 - 13000 \times 0,8^n > 16000 \Leftrightarrow -13000 \times 0,8^n > -4000 \Leftrightarrow 0,8^n < \frac{4}{13}.$$

Méthode 1 : $0,8^n < \frac{4}{13} \Leftrightarrow \ln 0,8^n < \ln \left(\frac{4}{13} \right) \Leftrightarrow n \times \ln 0,8 < \ln 4 - \ln 13 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 4 - \ln 13}{\ln 0,8}$,

(On change le sens du « < » car $\ln 0,8 < 0$ puisque $0 < 0,8 < 1$.)

$$\frac{\ln 4 - \ln 13}{\ln 0,8} \approx 5,28. \text{ Donc c'est à partir de la } 6^{\text{ème}} \text{ année que le nombre d'abonnés dépassera 16000.}$$

Méthode 2 : On sait que la suite $(0,8^n)$ est strictement décroissante car $0 < 0,8 < 1$.

On demande un tableau de valeurs à la calculatrice et on recherche la plus petite valeur de n telle que

$$0,8^n < \frac{4}{13}. \quad \frac{4}{13} \approx 0,3077. \quad 0,8^5 = 0,32768 \text{ donc } 0,8^5 > \frac{4}{13} \text{ et } 0,8^6 = 0,262144 \text{ donc } 0,8^6 < \frac{4}{13}.$$

C'est donc à partir de la 6^{ème} année que le nombre d'abonnés dépassera 16 000.

Remarques :

- On peut faire une vérification par la lecture du graphique de la question 2).
- Une manière encore plus simple de vérifier ce résultat est de faire afficher le tableau des termes a_n dans le menu « récurrence » de la calculatrice : elle affiche $a_5 \approx 15740$ et $a_6 \approx 16592$.

(En paramétrant : $a_{n+1} = 0,8 a_n + 4000$, $a_0 = 7000$ et en faisant afficher les 20 premiers termes par exemple)

Bien évidemment, une telle vérification n'a pas valeur de preuve et risque fort peu de convenir aux correcteurs.