Terminale ES – Exercices sur les suites arithmético-géométriques - Corrigés

Exercice 1 : $\boxed{u_0=1}$ et, pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{u_{n+1}=2u_n-3}$.

1) $u_1=2u_0-3=2\times 1-3$ $\boxed{u_1=-1}$ $u_2=2u_1-3=2\times(-1)-3$ $\boxed{u_2=-5}$

$u_3=2u_3-3=2\times(-5)-3=-10-3$ $\boxed{u_3=-13}$ $u_4=2u_3-3=2\times(-13)-3=-26-3$ $\boxed{u_4=-29}$

2) a) Pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_n=u_n-3}$, donc $v_{n+1}=u_{n+1}-3=(2u_n-3)-3=2u_n-6=2(u_n-3)=2v_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2.

b) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=v_0\times 2^n$ avec $v_0=u_0-3=1-3=-2$. Donc $v_n=-2\times 2^n$ soit $\boxed{v_n=-2^{n+1}}$.

3) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n-3 \Leftrightarrow v_n+3=u_n$.
Donc pour tout n ∈ ℕ, $u_n=v_n+3$, soit $\boxed{u_n=-2^{n+1}+3}$.

4) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n)=+\infty$ car 2>1. (Théorème 9 du cours)
D'après les propriétés sur les limites vues dans le cours,
$\lim\limits_{n\to+\infty} -2\times 2^n=-\infty$ car $-2<0$ (voir limite de $a\times u_n$ lorsque a<0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=+\infty$)
et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\times 2^n+3=-\infty$ (Voir limite de u_n+b lorsque (u_n) a pour limite $-\infty$ et b ∈ ℝ)
Comme pour tout n ∈ ℕ, $u_n=-2^{n+1}+3=-2\times 2^n+3$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=-\infty}$.

Exercice 2 : a) $\boxed{u_0=10}$. Pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{u_{n+1}=2u_n-1}$ et $\boxed{v_n=u_n-1}$.
Donc pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=u_{n+1}-1=(2u_n-1)-1=2u_n-2=2(u_n-1)=2v_n$.
(v_n) est donc une suite géométrique de raison 2.

b) $\boxed{u_0=500}$ et, pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{u_{n+1}=0{,}95u_n+100}$ et $\boxed{v_n=u_n-2000}$.
Donc $v_{n+1}=u_{n+1}-200=(0{,}95u_n+100)-2000=0{,}95u_n-1900=0{,}95\left(u_n-\dfrac{1900}{0{,}95}\right)=0{,}95(u_n-2000)=0{,}95v_n$
(v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,95.

Exercice 3 : $\boxed{u_0=5}$ et pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+4}$.

1) $u_1=\dfrac{1}{2}u_0+4=\dfrac{1}{2}\times 5+4=2{,}5+4$ $\boxed{u_1=6{,}5}$ ou $u_1=\dfrac{5}{2}+\dfrac{8}{2}$, $\boxed{u_1=\dfrac{13}{2}}$.

$u_2=\dfrac{1}{2}u_1+4=\dfrac{1}{2}\times 6{,}5+4=3{,}25+4$ $\boxed{u_2=7{,}25}$ ou $u_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{13}{2}+4=\dfrac{13}{4}+\dfrac{16}{4}$ $\boxed{u_2=\dfrac{29}{4}}$.

$u_3=\dfrac{1}{2}u_2+4=\dfrac{1}{2}\times 7{,}25+4=3{,}625+4$ $\boxed{u_3=7{,}625}$ ou $u_3=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{29}{4}\times 4=\dfrac{29}{8}+\dfrac{32}{8}$ $\boxed{u_3=\dfrac{61}{8}}$

$u_4=\dfrac{1}{2}u_3+4=\dfrac{1}{2}\times 7{,}625+4=3{,}8125+4$ $\boxed{u_4=7{,}8125}$ ou $u_4=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{61}{8}+4=\dfrac{61}{16}+\dfrac{64}{16}$ $\boxed{u_4=\dfrac{125}{16}}$.

2) a) Pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_n=u_n-8}$, donc $v_{n+1}=u_{n+1}-8=\left(\dfrac{1}{2}u_n+4\right)-8=\dfrac{1}{2}u_n-4=\dfrac{1}{2}(u_n-8)=\dfrac{1}{2}v_n$.

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

b) $v_0=u_0-8=5-8=-3$.

Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, pour tout n, $v_n=v_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=-3\times\frac{1^n}{2^n}$.

Pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_n=\frac{-3}{2^n}}$.

3) a) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n-8$ donc $v_n+8=u_n$, soit $u_n=v_n+8$.

Comme, pour tout n ∈ ℕ, $v_n=-\frac{3}{2^n}$, $u_n=-\frac{3}{2^n}+8$ ou $\boxed{u_n=8-\frac{3}{2^n}}$.

b) $u_{10}=8-\frac{3}{2^{10}}=8-\frac{3}{1024}=\frac{8\times1024}{1024}-\frac{3}{1024}=\frac{8192}{1024}-\frac{3}{1024}$ $\boxed{u_{10}=\frac{8189}{1024}}$.

4) Transformons l'écriture du terme général u_n de la suite (u_n) afin de déterminer sa limite.

$u_n=8-\frac{3}{2^n}=8-3\times\frac{1}{2^n}=8-3\times\frac{1^n}{2^n}=8-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ car $0<\frac{1}{2}<1$ et d'après le théorème 9 du cours.

D'après les propriétés sur les limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty}-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}8-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=8-0=8$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=8}$.

Exercice 4 : $\boxed{u_0=-2}$ et pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{u_{n+1}=3u_n+5}$.

1) $u_1=3u_0+5=3\times(-2)+5$ $\boxed{u_1=-1}$. $u_2=3u_1+5=3\times(-1)+5=-3+5$ $\boxed{u_2=2}$.

$u_3=3u_2+5=3\times2+5=6+5$ $\boxed{u_3=11}$ $u_4=3u_3+5=3\times11+5=33+5$ $\boxed{u_4=38}$.

2) a) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n+a$, donc $v_{n+1}=u_{n+1}+a=(3u_n+5)+a$ soit $\boxed{v_{n+1}=3u_n+5+a}$.

b) Pour démontrer cette égalité, on va partir du second membre : $3v_n+5-2a$, et on va essayer de prouver qu'il est égal à l'expression $3u_n+5+a$ trouvée au a)

Pour tout n ∈ ℕ, $3v_n+5-2a=3(u_n+a)+5-2a$ car $v_n=u_n+a$ pour tout n.
Donc $3v_n+5-2a=3u_n+3a+5-2a=3u_n+5+a$, expression égale à v_{n+1} d'après le a)

Conclusion : pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_{n+1}=3v_n+5-2a}$

c) (v_n) sera géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=qv_n$.

Comme pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=3v_n+5-2a$, (v_n) sera géométrique si $5-2a=0 \Leftrightarrow 5=2a \Leftrightarrow \frac{5}{2}=a$.

(v_n) sera géométrique si $\boxed{a=\frac{5}{2}}$ ou encore $\boxed{a=2,5}$.

3) a) $a=\frac{5}{2}$ donc pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=3v_n+5-2\times\frac{5}{2}=3v_n+5-5$ soit $v_{n+1}=3v_n$.

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

Son terme initial est $v_0=u_0+\frac{5}{2}=-2+\frac{5}{2}=-\frac{4}{2}+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$.

Donc pour tout n ∈ ℕ, $v_n=v_0\times3^n=\frac{1}{2}\times3^n$, pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_n=\frac{3^n}{2}}$ ou $\boxed{v_n=\frac{1}{2}\times3^n}$ qui est une écriture plus pratique pour calculer une limite.

b) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n+\frac{5}{2}$ donc $u_n=v_n-\frac{5}{2}$ donc $\boxed{u_n=\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{5}{2}}$ ou $\boxed{u_n=\frac{3^n-5}{2}}$.

(On pourrait calculer la limite de (u_n) avec la première expression : +∞)

c) $u_{10}=\frac{3^{10}-5}{2}=\frac{59049-5}{2}=\frac{59044}{2}$ $\boxed{u_{10}=29522}$

Exercice 5 : $\boxed{u_0=3}$ et pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{u_{n+1}=-2u_n+6}$.

1) $u_1=-2u_0+6=-2\times 3+6$ $\boxed{u_1=0}$. $u_2=-2u_1+6=-2\times 0+6$ $\boxed{u_2=6}$.

$u_3=-2u_2+6=-2\times 6+6$ $\boxed{u_3=-6}$. $u_4=-2u_3+6=-2\times(-6)+6$ $\boxed{u_4=18}$.

2) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n+a$.

a) Donc pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=u_{n+1}+a$, soit $\boxed{v_{n+1}=-2u_n+6+a}$.

b) Pour tout n ∈ ℕ, $-2v_n+6+3a=-2(u_n+a)+6+3a=-2u_n-2a+6+3a=-2u_n+6+a$.

Comme $-2u_n+6+a=v_{n+1}$ d'après le a), pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_{n+1}=-2v_n+6+3a}$.

c) (v_n) sera géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que, pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=q\times v_n$.

Comme $v_{n+1}=-2v_n+6+3\text{a}$, il faut que $6+3\text{a}=0$ et on a alors $q=-2$.

$6+3\text{a}=0 \Leftrightarrow 3a=-6 \Leftrightarrow$ $\boxed{a=-2}$. (v_n) sera géométrique si $a=-2$.

3) $\boxed{a=-2}$. a) (v_n) est donc une suite géométrique de raison -2 (puisque pour tout n, $v_{n+1}=-2v_n$)

Son terme initial est $v_0=u_0-2=3-2=1$.

Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=v_0\times(-2)^n=1\times(-2)^n$ soit $\boxed{v_n=(-2)^n}$.

b) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=u_n-2$ donc $u_n=v_n+2$ donc $\boxed{u_n=(-2)^n+2}$.

c) $u_{15}=(-2)^{15}+2=-32768+2$, $\boxed{u_{15}=-32766}$.

Exercice 6 : $\boxed{u_0=-2}$ et, pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+15}$.

1) $u_1=-\frac{1}{2}u_0+15=-\frac{1}{2}\times(-2)+15=1+15$ $\boxed{u_1=16}$.

$u_2=-\frac{1}{2}u_1+15=-\frac{1}{2}\times 16+45=-8+15$ $\boxed{u_2=7}$.

$u_3=-\frac{1}{2}u_2+15=-\frac{1}{2}\times 7+15=-3{,}5+15$ $\boxed{u_3=11{,}5}$.

2) a) Pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_n=u_n-10}$, donc $v_{n+1}=u_{n+1}-10=\left(-\frac{1}{2}u_n+15\right)-10=-\frac{1}{2}u_n+5=-\frac{1}{2}(u_n-10)$.

Donc pour tout n ∈ ℕ, $v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n$. (v_n) est donc <u>une suite géométrique</u> de raison $\boxed{-\frac{1}{2}}$.

b) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n=v_0\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ avec $v_0=u_0-10=-2-10=-12$.

Donc pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_n=-12\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ ou $v_n=-12\times\left(\frac{-1}{2}\right)^n=-12\times\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{-12\times(-1)^n}{2^n}$

$v_n=\frac{12\times(-1)\times(-1)^n}{2^n}=\frac{3\times 2^2\times(-1)^{n+1}}{2^n}$

$v_n = \dfrac{3\times(-1)^{n+1}}{2^{n-2}}$ (Je ne pense pas que ce calcul soit requis en L et ES)

c) $S'_n = v_0+v_1+\ldots+v_n = -12\times\left(-\frac{1}{2}\right)^0+(-12)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^1+(-12)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+(-12)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$S'_n = -12\times\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Comme $-\frac{1}{2}\neq 0$ et $-\frac{1}{2}\neq 1$, $S'_n = -12\times\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$ (Formule du cours : théorème 10)

$$S'_n = -12\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}} = -12\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\times\frac{2}{3} = -8\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = -8+8\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

On peut garder cette expression ou essayer de continuer à la simplifier :

$S'_n = -8+8\times\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} = -8+8\times\dfrac{(-1)\times(-1)^n}{2\times 2^n} = -8-4\times\dfrac{(-1)^n}{2^n}$.

Gardons $\boxed{S'_n = -8+8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

3) a) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n = u_n - 10 \Leftrightarrow u_n = v_n + 10$ et $v_n = -12\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Donc pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{u_n = -12\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+10}$ ou $\boxed{u_n = 10-12\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

b) Comme pour tout n ∈ ℕ, $u_n = v_n + 10$,

$S_n = u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n = (v_0+10)+(v_1+10)+(v_2+10)+\ldots+(v_n+10)$

$S_n = v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+(n+1)\times 10$ car il y a $n+1$ termes du type (v_k+10) dans la somme ci-dessus.

$S_n = S'_n+10(n+1)$, donc $S_n = -8+8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+10(n+1) = 8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-8+10n+10$

$\boxed{S_n = 8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+10n+2}$

c) Avec les premiers termes déjà calculés : $S_3 = u_0+u_1+u_2+u_3 = -2+16+7+11{,}5$ $\boxed{S_3 = 32{,}5}$.

Avec la formule du 3) b) $S_3 = 8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4+10\times 3+2 = 8\times\dfrac{(-1)^4}{2^4}+32 = \dfrac{8\times 1}{16}+32$ $\boxed{S_3 = 32{,}5}$.

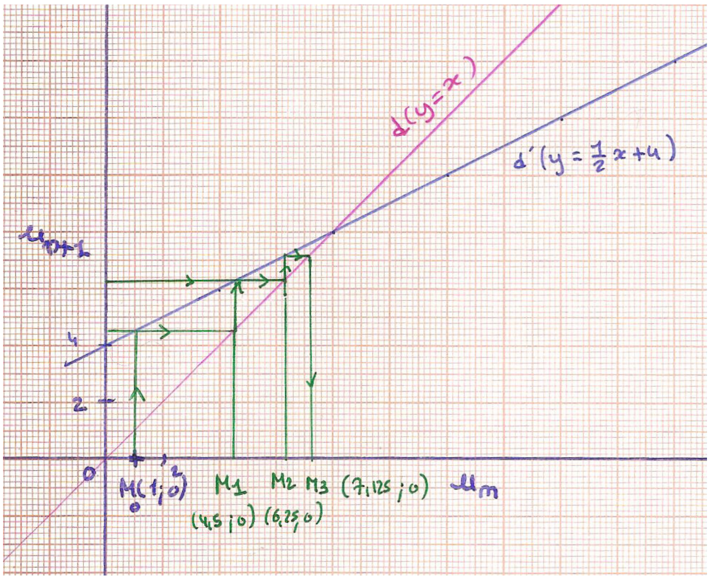
On obtient bien le même résultat.

Exercice 7 : (Voir graphique page suivante).

Exercice 8 : $\boxed{u_0 = 1}$ et, pour tout n ∈ ℕ, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+4}{3}$.

1) $u_1 = \dfrac{2u_0+4}{3} = \dfrac{2\times 1+4}{3} = \dfrac{6}{3}$ $\boxed{u_1 = 2}$ $u_2 = \dfrac{2u_1+4}{3} = \dfrac{2\times 2+4}{3}$ $\boxed{u_2 = \dfrac{8}{3}}$.

$u_3 = \dfrac{2u_2+4}{3} = \dfrac{2\times\frac{8}{3}+4}{3} = \dfrac{\frac{16}{3}+\frac{12}{3}}{3} = \dfrac{\frac{28}{3}}{3} = \dfrac{28}{3}\times\dfrac{1}{3}$ $\boxed{u_3 = \dfrac{28}{9}}$

Graphique de l'exercice 7 :	Graphique de l'exercice 8 :
	

2) a) b) Voir graphique ci-dessus.

c) En regardant la construction, on imagine que les points de coordonnées $(u_n ; f(u_n))$ vont se rapprocher du point d'intersection entre les droites d et Δ, qui a pour coordonnées (4;4). Il semblerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

3) a) Pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_n = u_n - 4}$, donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \dfrac{2u_n+4}{3} - 4 = \dfrac{2u_n+4}{3} - \dfrac{12}{3} = \dfrac{2u_n-8}{3} = \dfrac{2}{3}(u_n-4)$.

Donc pour tout n ∈ ℕ, $\boxed{v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n}$. (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

Son premier terme est $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4$, $\boxed{v_0 = -3}$.

b) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, soit $\boxed{v_n = -3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$ ou encore $v_n = -\dfrac{2^n}{3^{n-1}}$.

c) Pour tout n ∈ ℕ, $v_n = u_n - 4$ donc $u_n = v_n + 4$, soit $u_n = -3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 4$ soit $\boxed{u_n = 4 - 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$.

d) Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0}$.

D'après les propriétés sur les limites vues dans le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$

(Voir limite de $a \times u_n$ lorsque a est un réel et (u_n) a pour limite 0).

D'après les propriétés sur les limites vues dans le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 4 + 0 = 4$.

On a bien $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 4}$, comme on l'avait conjecturé à partir du graphique.